FACULTAD DE INGENIERÍA
U N A M

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

Irene Patricia Valdez y Alfaro

irenev@unam.mx

T E M A S DEL CURSO

1. Análisis Estadístico de datos muestrales.
2. Fundamentos de la Teoría de la probabilidad.
3. Variables aleatorias.
4. Modelos probabilísticos comunes.
5. Variables aleatorias conjuntas.
6. Distribuciones muestrales.

CONTENIDO TEMA 4

4. Modelos probabilísticos comunes.

Objetivo: El alumno conocerá algunas de las distribuciones más utilizadas en la práctica de la ingeniería y seleccionará la más adecuada para analizar algún fenómeno aleatorio en particular.

4.1 Ensayo de Bernoulli y Distribución de Bernoulli.

4.2 Distribucion Binomial, Geométrica, Pascal e Hipergeométrica.

4.3 Proceso de Poisson y Distribución de Poisson.

4.4 Distribución uniforme continua.

4.4 Distribuciones normal y normal estándar.

4.5 Generación de números aleatorios.

MODELOS PROBABILÍSTICOS COMUNES

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

ENSAYO DE BERNOULLI

Consiste en realizar un sólo experimento (ensayo) en el cual existen únicamente dos posibles resultados:

S = { éxito, fracaso }

Por ejemplo: observar un artículo y ver si es defectuoso

Definimos a la variable aleatoria de Bernoulli de la siguiente forma:

$$I = \begin{cases} 0\ ; & \text{Si el resultado del ensayo es “fracaso”.} \\ 1\ ; & \text{Si el resultado del ensayo es “éxito”.} \end{cases}$$

A ésta última se le conoce como “función indicadora”

DISTRIBUCIÓN DE BERNULLI (1/3)

Supongamos que en un ensayo de Bernoulli la probabilidad de obtener éxito es p. Como el ensayo tiene únicamente dos resultados posibles, entonces la probabilidad de obtener un fracaso es 1-p. llamaremos q a la probabilidad de fracaso.

p = Probabilidad de éxito

q = (1-p) = Probabilidad de fracaso

Con esto, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$$P(I) = \begin{cases} q\,; & I = 0 \\ p\,; & I = 1 \\ 0\,; & \text{c.o.c} \end{cases}$$

DISTRIBUCIÓN DE BERNULLI (2/3)

$$P(I) = \begin{cases} q\,; & I = 0 \\ p\,; & I = 1 \\ 0\,; & \text{c.o.c} \end{cases}$$

La media o valor esperado de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$$E[I] = 0q + 1p = p$$

$$\boxed{\mu_I = p}$$

La varianza de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$$V[I] = E[I^2] - E[I]^2$$

$$V[I] = (0^2 q + 1^2 p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\boxed{\sigma_I^2 = pq}$$

DISTRIBUCIÓN DE BERNULLI (3/3)

Si llamamos X, en lugar de I, a la Variable aleatoria de Bernoulli, su distribución de probabilidad queda:

$$P(x) = \begin{cases} q\,; & x = 0 \\ p\,; & x = 1 \\ 0\,; & \text{c.o.c} \end{cases}$$

La cual también se puede abreviar de la forma:

$$P(x) = \begin{cases} p^{x} q^{1-x}; & \mathrm{x} = 0,1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Esta es la forma más usual de representar a la distribución de Bernoulli

$$\mu_X = p$$

$$\sigma_X^2 = pq$$

ENSAYO BINOMIAL

Consiste en realizar n veces el ensayo de bernoulli, de manera independiente uno de otro y suponiendo que la probabilidad de éxito p permanence constante en cada uno de ellos.

Por ejemplo: observar cinco artículos de un mismo lote y contar el número de artículos con defecto.

Definimos a la variable aleatoria de Binomial de la siguiente forma:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots I_n = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

donde las I_j son variables aleatorias de Bernoulli independientes, cada una con media p y varianza pq.

Así definida, X representa entonces el número de éxitos obtenidos al realizar n veces el ensayo de Bernoulli.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (1/3)

Al realizar el ensayo binomial, la variable aleatoria puede adquirir los valores: X={0,1,2,...,n}

*Supongamos que se realizan **n** ensayos de Bernoulli y la probabilidad de éxito es p, la distribución de X para n =2, 3 ó 4 es:*

Para n= 2

X	P(x)
0	q q = p^0q^2 (1 vez)
1	p q + q p = p^1q^1 (2 veces)
2	p p p^2q^0 (1 vez)

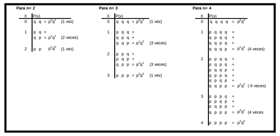
Para n= 3

X	P(x)
0	q q q = p^0q^3 (1 vez)
1	p q q + q p q + q q p = p^1q^2 (3 veces)
2	p p q + p q p + q p p = p^2q^1 (3 veces)
3	p p p = p^3q^0 (1 vez)

Para n= 4

X	P(x)
0	q q q q = p^0q^4
1	p q q q + q p q q + q q p q + q q q p = p^1q^3 (4 veces)
2	p p q q + p q p q + p q q p + q p p q + q p q p + q q p p = p^2q^2 (6 veces)
3	p p p q + p p q p + p q p p + q p p p = p^3q^1 (4 veces
4	p p p p = p^4q^0

Se observa que el término genérico es p^xq^{n-x} repetido un determinado número de veces ¿cuántas?



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (2/3)

Supongamos que se obtienen consecutivamente primero los X éxitos y luego los n-x fracasos:

$$A=\{\ \underbrace{e, e, e, e, \ldots. e}_{x \text{ éxitos}},\ \underbrace{f, f, f, f, \ldots, f}_{n-x \text{ fracasos}}\ \}$$

$$P(A)=p^{x}q^{n-x}$$

Para encontrar el número de formas en que se pueden obtener X éxitos y n-x fracasos, recordemos la expresión para el cálculo de permutaciones con grupos de objetos iguales:

$$P^{n}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ \ldots \ m_k!}$$

Hagamos $m_1=x$ y $m_2=n-x$:

$$\boxed{P^{n}_{x,n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = C^{n}_{x}}$$

Es decir que el número de formas en que se pueden ordenar los éxitos y los fracasos es C(n,x)

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (3/3)

Finalmente, tenemos que el término $p^x q^{n-x}$ se repite un numero de veces igual a C(n,x) :

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x q^{n-x}; & x = 0, 1, 2, .., n \\ 0; & \text{c.o.c} \end{cases}$$

En forma resumida, la distribución de la variable aleatoria binomial es:

$$\boxed{P(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, .., n}$$

Puesto que la forma de P(x) depende de p y de n, éstos son los pámetros de la distribución binomial: $P(x;\, n,p)$

La media de la VA binomial es:

$$E[X] = E[I_1 + I_2 + ... + I_j + ... + I_n] = E[I_1] + E[I_2] + ... + E[I_j] + ... + E[I_n] = p + p + ... + p = np \qquad \boxed{\mu_X = np}$$

La varianza de la VA binomial es:

$$V[X] = V[I_1 + I_2 + ... + I_j + ... + I_n] = V[I_1] + V[I_2] + ... + V[I_j] + ... + V[I_n] = pq + pq + ... + pq = npq \qquad \boxed{\sigma_X^2 = npq}$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL ACUMULATIVA

La distribución de probabilidad acumulativa de la variable aleatoria binomial es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}; \quad \mathrm{i} = 0, 1, 2, .., \mathrm{x}$$

Como el cálculo de F(X) puede resultar tedioso cuando x es relativamente grande, existen tablas de F(x) hasta para n=30.

Ejercicio:

Se afirma que 30% de la producción de ciertos instrumentos se realiza con material nacional y los demás con material importado.

Si se toma una muestra aleatoria con reemplazo de 25 de estos instrumentos:

$n=25, \quad p=0.3$

1.- ¿cuál es la probabilidad de que 3 de ellos sean de material nacional?

$P(X=3)$

2.- ¿cuál es la probabilidad de que no más de 3 de ellos sean de material nacional?

$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

3.- ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 sean de material nacional?

$P(X\leq 3)=1-P(X \leq 2)$

4.-¿Cuántos instrumentos fabricados con material nacional se esperaría encontrar en la muestra?

$E[X]=np$

Distribución Geométrica

Definamos una variable aleatoria X como el número de ensayos de Bernoulli, independientes, necesarios para obtener el primer éxito. donde la próbabilidad de éxito es p

Implica que realizamos repetidamente el ensayo y nos detenemos al obtener el primer éxito. Cada ensayo es realizado de manera independiente uno de otro y suponiendo que la probabilidad de éxito p permanence constante en cada uno de ellos.

P(X=1)=P(e)=p
P(X=2)=P(f,e)=pq
P(X=3)=P(f,f,e)=q^2p
P(X=4)=P(f,f,fe)=q^3p
.....
P(X=x)=$q^{x-1}p$

$$P(x) = pq^{x-1}; \quad \mathrm{x} = 1, 2, 3, \ldots$$

La media y varianza de la variable aletoria Geométrica son:

$$\mu_X = \frac{1}{p} \qquad \sigma_X^2 = \frac{q}{p^2}$$

El único parámetro de la distribución geométrica es p.

Distribución de Pascal
(Binomial Negativa)

Definamos una variable aleatoria X como el número de ensayos de Bernoulli necesarios para obtener exactamente K éxitos

$$P(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}; \quad \mathrm{x} = \mathrm{k},\ \mathrm{k}+1,\ \mathrm{k}+2..$$

La media y varianza de la variable aletoria de Pascal son:

$$\mu_X = \frac{k}{p} \qquad \sigma_X^2 = \frac{kq}{p^2}$$

Los parámetros de la distribución de Pascal son p y k. *k = 1, 2, 3, ...*

Distribución Hipergeométrica

Definamos una variable aleatoria X como el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, donde los ensayos se realizan sobre una población finita de tamaño N

Sea K el número de elementos en la población que poseen una característica en particular, tal que p = K/N = Prob de éxito inicial.

$$P(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \qquad \begin{array}{c} \mathrm{x} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n} \\ \mathrm{x} \le \mathrm{k},\ (\mathrm{n}-\mathrm{x}) \le \mathrm{N}-\mathrm{k} \\ \mathrm{N, n, k} \quad \text{enteros} \quad \text{positivos} \end{array}$$

La media y varianza de la variable aletoria de Hipergeométrica son:

$$\mu_X = n\frac{k}{N} = np$$

$$\sigma_X^2 = n\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Los parámetros de la distribución de Hipergeométrica son: N, n y k

Distribución de Poisson

Definamos una variable aleatoria X como el número de eventos independientes que ocurren a una rapidez constante

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; \qquad \begin{matrix} \text{x} = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \lambda > 0 \end{matrix}$$

Donde λ es el número promedio de ocurrencias del evento por unidad de tiempo o espacio. A esta unidad de tiempo o espacio le podemos llamar intervalo.

La media y varianza de la variable aletoria de Poisson son:

$$\mu_X = \lambda \qquad \sigma_X^2 = \lambda$$

El único parámetro de La distribución de Poisson es λ.
La distribución de Poisson es sesgada a la derecha y leptocúrtica, pero tiende a ser insesgada y mesocúrtica cuando aumenta λ.

Distribución de Poisson

Propiedades de la distribución de Poisson:

- *El número de eventos que ocurren en un intervalo, es independiente del número de eventos que ocurren en cualquier otro intervalo.*
- *La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo, es la misma para cualquier otro intervalo de las mismas dimensiones.*
- *La probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos es proporcional al tamaño del intervalo.*
- *La probabilidad de que ocurran dos o más eventos en un intervalo, tiende a cero cuando el tamaño del intervalo tiende a cero.*

La Distribución de Poisson como límite de la Distribución Binomial*

Sea X una VA con dsitribución binomial con parámetros n y p

$$P(x;n,p)=\frac{n!}{x!\,(n-\mathrm{x})!}\,p^{x}q^{n-x};\quad \mathrm{x}=0,1,2,..,\mathrm{n}$$

Si para n=1, 2, ... se cumple la realación p= λ/n, para alguna λ>0, entonces:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} p(x;n,p)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!};\mathrm{x}=0,1,2,\ldots$$

la aproximación es mejor cuando n es grande y p pequeño, de tal forma que λ=np tiene un valor moderado

***Ver Canavos.**

MODELOS PROBABILÍSTICOS COMUNES

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

Continuará .....