MÉTODO DE LOS MOMENTOS PARA OBTENER ESTIMADORES PUNTUALES

El método consiste fundamentalmente en proponer como estimadores de los momentos poblacionales respecto al origen, a los correspondientes momentos muestrales.

Si X en una variable aleatoria, se define el k-ésimo momento poblacional como:

$$\mu'_k = E\{X^k\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx & ;\ si\ x\ es\ contínua \\ \sum_{\forall i} x_i^k p(x_i) & ;\ si\ x\ es\ discreta \end{cases}$$

donde f(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, si X es continua, ó P(x) es la distribución de probabilidad de X, si X es discreta.

Mientras que si se tiene una muestra aleatoria simple, de tamaño n, el k-ésimo momento muestral se define como:

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

El método de los momentos consiste en igualar los momentos poblacionales con los correspondientes momentos muestrales, planteando tantas ecuaciones como parámetros desconocidos se tengan, resolviendo luego el sistema de ecuaciones para los parámentros desconocidos. Finalmente, se proponen como estimadores de los parámetros a aquellos que son soluciones del sistema de ecuaciones.

Si *t* es el número de parámetros desconocidos el sistema de ecuaciones está dado por:

$$\mu'_k = m'_k \qquad k= 1, 2, 3, \ldots t$$

o bien:

$$\begin{cases} \mu'_1 = m'_1 \\ \mu'_2 = m'_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mu'_k = m'_k \end{cases} \qquad k= t$$

Ejemplo 1:

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\theta^2}\right)(\theta - x) & ;\ 0 \le x \le \theta \\ 0 & ;\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Obtener un estimador para el parámetro θ por el método de los momentos.

Resolución:

Como en este caso sólo existe un parámetro desconocido, , sólo es necesario plantear una ecuación, igualando el primer momento poblacional con el primer momento muestral.

$$\mu'_1 = m'_1$$

donde el primer momento poblacional es simplemente el valor esperado de la variable aleatoria X, o media poblacional:

$$\mu'_1 = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} x\left(\frac{2}{\theta^2}\right)(\theta - x)dx = \int_0^{\theta}\left(\frac{2}{\theta}x - \frac{2}{\theta^2}x^2\right)dx$$

$$\mu'_1 = \left[\frac{x^2}{\theta} - \frac{2}{3\theta^2}x^3\right]_0^{\theta} = \frac{\theta}{3} \ ; \qquad \mu'_1 = \frac{\theta}{3}$$

Por otro lado, el primer momento muestral es:

$m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ observese que el primer momento muestral es la media de la muestra: $m'_1 = \overline{X}$

así que, igualando momentos poblacionales con momentos muestrales tenemos:

$$\frac{\theta}{3} = \overline{X}$$

Despejando al parámetro θ tenemos que su estimador es:

$$\hat{\theta} = 3\overline{X}$$

Ejemplo 2:

Sea una población con distribución normal, encontrar estimadores para los parámetros μ y σ^2, por el método de los momentos, basados en una muestra aleatoria simple de tamaño n.

Resolución:

Si X es una variable aleatoria normal, su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Como se tienen dos parámetros desconocidos, μ y σ^2, es necesario plantear dos ecuaciones.

El primer momento poblacional es:

$$\mu'_1=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\mu$$

El segundo momento poblacional, respecto al origen es:

$$\mu'_2=E\left(x^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)dx=\sigma^2+\mu^2$$

(Nota: el segundo momento con respecto al origen puede obtenerse utilizando la función generatriz de momentos de la distribución normal).

Por otro lado, los primeros dos momentos muestrales respecto al origen son:

$$m'_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \text{y} \qquad m'_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

Igualando los correspondientes momentos tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\mu'_1=m'_1 \qquad \mu=\overline{X} \qquad \text{......}\in$$

$$\mu'_2=m'_2 \qquad \sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \text{......}\notin$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo $\in$ en $\notin$:

$$\sigma^2 + \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$$

Por lo tanto, se proponen como estimadores, los que son solución del sistema:

$\hat{\mu} = \overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$

Nótese que $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$ también puede escribirse como: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2$, que ya se ha visto que es un **estimar sesgado** de σ^2.

Tanto el método de los momentos como el método de máxima verosimilitud proporcionan estimadores que no siempre son insesgados, por lo que es deseable analizar posteriormente todas las propiedades de los estimadores que se obtengan por cualquiera de estos métodos; y dado el caso, corregirlos si ello es posible.