CAPÍTULO 9
LAS VARIABLES ALEATORIAS Y SUS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

9.1 Introducción

En el capítulo anterior introducimos los conceptos básicos la teoría de la probabilidad tales como el espacio muestral, los eventos, las probabilidades, los teoremas fundamentales de dicha teoría y demostramos algunos teoremas para el cálculo de probabilidades considerando a los eventos desde la perspectiva "literaria o descriptiva"; por ejemplo $D = \{el\ radio\ inspeccionado\ está\ defectuoso\}$; en el presente capítulo, continuaremos con el estudio de otros conceptos de suma importancia de la teoría de la probabilidad pero ahora bajo una perspectiva analítica utilizando los elementos del cálculo integral y diferencial que se estudiaron en el capítulo 6; utilizando, para tal efecto, el concepto de variable aleatoria que es una función que le asigna números o rangos de números a los eventos, de manera tal que podamos calcular las probabilidades de las variables aleatorias y estudiar su comportamiento a través de las distribuciones de probabilidad.

9.2 Variables Aleatorias -VA-

Recordemos que el espacio muestral $\mathbb{S}$ de un experimento simple es el conjunto de todos sus posibles resultados elementales, los cuáles pueden expresarse con números como sucede de manera natural con el número de hijos de una familia elegida aleatoriamente, la cantidad de lluvia que cae en determinada región en un día y hora determinados, el número de artículos defectuosos que salen de un proceso productivo, etc.; o bien en términos no numéricos como ocurre con los ojos de un alumno elegido de una lista, la preferencia del partido político de una persona que se entrevista, la ocurrencia o no ocurrencia de un sismo el día de mañana; y así.

Consideremos la asignación de uno y solo un número a cada uno de los resultados del experimento, o sea a sus eventos elementales. Lo razonable es que asignemos el número que resulta del ensayo; por ejemplo, para el caso de los hijos de una familia elegida al azar asignemos 0 si no tienen hijos, 1 si tiene 1 hijo, 2 si tienen 2 hijos y así; sin embargo, también es posible asignarles otros número diferentes tales como 5 si no tiene hijos, 4 si tiene 1, 3 si tienen 2 y así; o bien otros diferentes, con la condición de que los número asignados sean únicos e indistinguibles para cada resultado posible. Los mismos números también pueden asignarse a los conjuntos de eventos elementales, por ejemplo, se puede asignar 1 si la familia en cuestión tiene a lo más un hijo y 2 si tiene más de un hijo, o bien asignamos 0 si el primer hijo es hombre y 1 si es mujer, o asignamos 10 si mañana ocurre un sismo o 20 si no ocurre. Estos son ejemplos de cómo a más de un evento elemental se puede asociar con un número y de la asignación de números a eventos que no están expresados originalmente en términos numéricos.

Llamaremos Variable Aleatoria X a la función definida sobre el espacio muestral que asocia un número real a cada evento elemental del espacio muestral $\mathbb{S}$. X es una función valuada en los números reales definida sobre el espacio muestral $\mathbb{S}$ como se representa en la figura 9.1.

En resumen, los posibles resultados de un fenómeno aleatorio pueden identificarse numéricamente bien sea de manera natural si los posibles resultados del experimento son numéricos o de forma artificial si no lo son; pero en cualquier caso, los posibles resultados pueden identificarse mediante los valores de una función conocida como variable aleatoria que se denotan con las letras mayúsculas de las incógnitas que se utilizan en las funciones escalares: W, X, Y, Z y así, y a sus valores generalizados con las minúsculas correspondientes w, x, y, z. Es decir, una variable aleatoria es una función que mapea uno a uno los eventos de $\mathbb{S}$ en valores de la recta de los reales $\mathbb{R}$.

La variable aleatoria es entonces una regla intermedia de transformación -una función- de los eventos a los números reales que posibilita la utilización de los conceptos de la matemática para el cálculo de probabilidades.

Como se ilustra en las figura 9.1, a diferencia del capítulo anterior donde asignábamos directamente probabilidades a eventos, la función variable aleatoria X asigna un valor $x \in \mathbb{R}$ al evento $a \subseteq \mathbb{S}$ y, posteriormente, la función de probabilidad p asigna un valor a $x;$

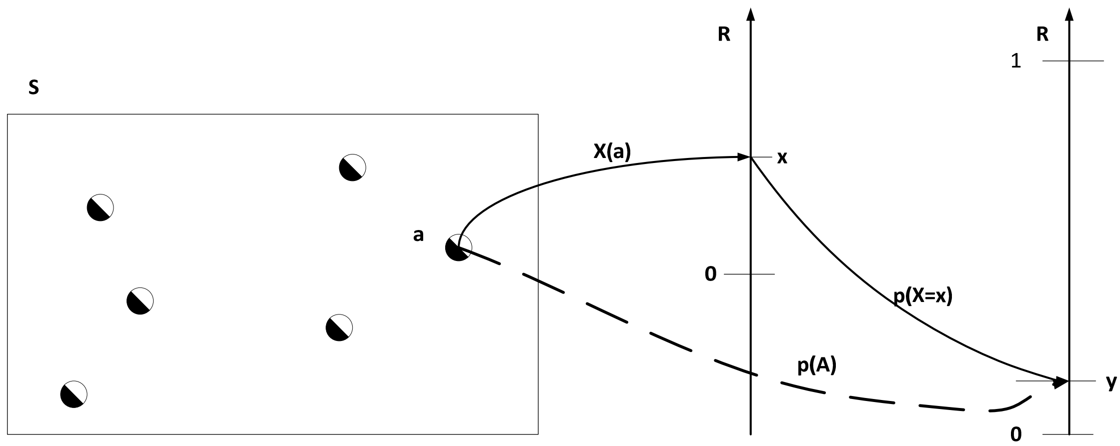


Figura 9.1. Asignación de probabilidades y de valores reales a eventos elementales

La figura 9.2 generaliza el concepto de eventos que pertenecen a $\mathbb{S}$ en términos de la variable aleatoria X siendo algunos de ellos

$A = x_3 < X \leq x_6$, $B = x_1 < X \leq x_4$ y, además

$C = A \cap B = x_3 < X \leq x_4$, $D = \overline{A \cup B} = (X \leq x_1) \cup (X > x_6)$

Y sus respectivas probabilidades

$p(A) = p(x_3 < X \leq x_6)$, $p(B) = p(x_1 < X \leq x_4)$

$p(C) = p(A \cap B) = p(x_3 < X \leq x_4)$,

$p(D) = p(\overline{A \cup B}) = p[(X \leq x_1) \cup (X > x_6)] = p(X \leq x_1) + p(X > x_6)$

Aunque existen otros términos para nombrar a la variable aleatoria tales como cantidad incierta, variable estocástica, cantidad incierta o variable de azar, todos los cuáles son la misma cosa: una función valuada en los números reales definida sobre un espacio muestral; en adelante usaremos el primero por ser el más comúnmente utilizado en la teoría de la probabilidad.

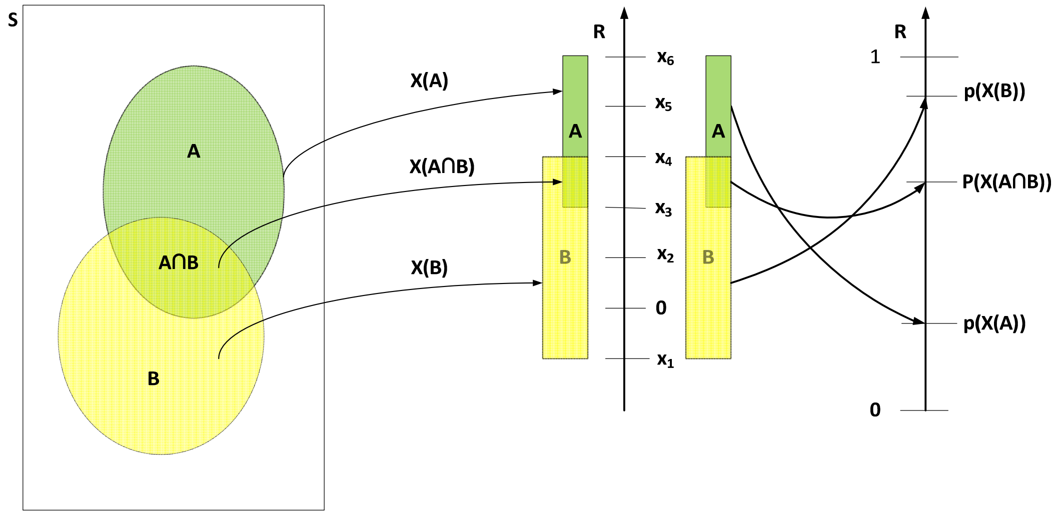


Figura 9.2. Valores de la variable aleatoria X y sus probabilidades

Los fenómenos aleatorios que ocurren en la naturaleza pueden clasificarse en deterministas y aleatorios. Los primeros son aquellos para los cuáles el estado actual de la ciencia ha formulado las teorías que permiten conocer de antemano el resultado bajo condiciones establecidas; por ejemplo, en un circuito eléctrico formado por una fuente de voltaje y una resistencia se conoce la corriente que circula por el circuito aplicando la Ley de Ohm -$v = Ri$-; o bien en un sistema masa-resorte en el que se conocen la masa m -en kg- y la rigidez del resorte k -en Newton/metro de deflexión- donde se deprecia su masa, entonces se puede conocer la frecuencia natural de oscilación del sistema – en ciclos/segundo- mediante la expresión $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Por otro lado, el objeto de estudio de la teoría de la probabilidad es el de los fenómenos aleatorios que se clasifican en discretos y continuos y se analizan por medio de las variables aleatorias correspondientes: variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas.

9.2.1 Variables aleatorias discretas -VAD-

Estas variables se utilizan en aquellas situaciones en las que solamente pueden asumir un conjunto particular de valores finito o infinito pero contable; es decir, que el número de valores posibles de la variable aleatoria X es finito o puede ser infinito pero deben ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números enteros. En resumen, Una variable aleatoria es discreta si puede asumir solamente un conjunto particular de valores finito o infinito numerable.

9.2.1.1 Distribuciones de probabilidad las Variables aleatorias discretas

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es una función que relaciona los valores de X con sus probabilidades correspondientes que comúnmente se conoce como Función Masa de Probabilidades -FMP-, función de probabilidad o distribución de probabilidad ; así si los valores que puede tomar la variable aleatoria discreta son $x_1, x_2, \dots x_n$ la FMP es el conjunto de pares de valores $[x_i,\ p(x_i)]$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ que, conforme a los axiomas fundamentales de la teoría de la probabilidad, debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$p(x_i) \geq 0 \tag{9.1}$$

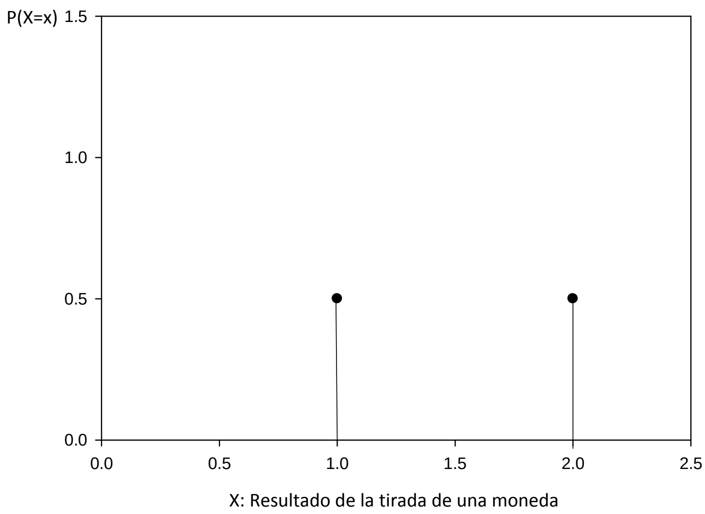
$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \tag{9.2}$$

Ejemplo 9.1 La FMP de la variable aleatoria discreta que representa la tirada de una moneda al aire es

A = Cae águila, X=1	**P(X=1) = 0.5**
B = Cae sol; X = 2	P(X=2) = 0.5

Cuya representación gráfica se muestra en la figura 9.3

Figura 9.3. Distribución o FMP del lanzamiento de una moneda



Ejemplo 9.2 El Jefe del Departamento de Contabilidad de la Facultad de Ingeniería, tiene a su cargo 8 personas de las cuales 4 son mujeres y 4 son hombres. Para un trabajo urgente que le encargó el Director necesita 2 personas que, para evitar el sesgo de sexo, las elige al azar. Si X representa el número de hombres los valores posibles de X son 0, 1 y 2 cuyas probabilidades de elección son las siguientes.

El número total de secuencias de seleccionar 2 de los 8 trabajadores a su cargo es $\binom{8}{2} = 28$, el número de maneras de seleccionar 0 hombres es $\binom{4}{0}\binom{4}{2} = 6$; por lo tanto, la probabilidad de $X = 0$ es

$$p(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28} = 0.21$$

De manera similar

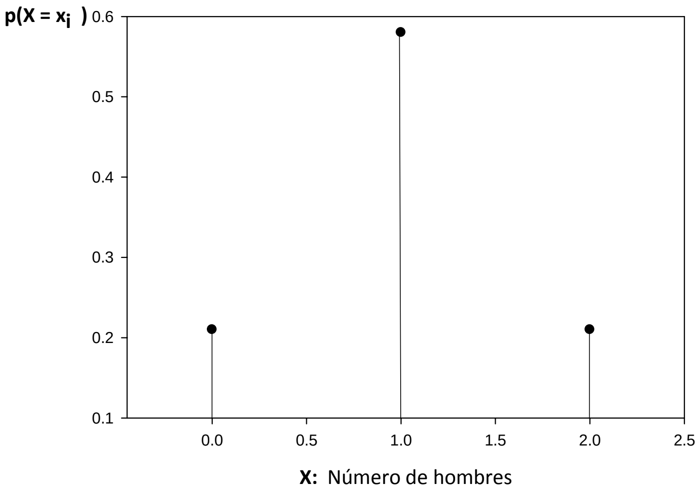
$$p(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{16}{28} = 0.58 \quad \text{y} \quad p(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28} = 0.21$$

Por lo que la función de distribución de probabilidades es la que se muestra en la siguiente tabla y la gráfica correspondiente en la figura 9.4. Observe que todas las probabilidades son mayores que 0 y su suma es 1.

Tabla 2. Distribución de probabilidades del número de hombres para el trabajo urgente

$X = x_i$	$P(X = x_i)$
0	0.21
1	0.58
2	0.21
	Suma = 1

Figura 9.4. FMP del número de hombres



9.2.2 Variables aleatorias continuas -VAC-

Una variable aleatoria continua es una abstracción matemática que, conceptualmente, puede medirse a cualquier grado de exactitud deseada, y si los posibles valores de la variable aleatoria X consisten de conjuntos de números reales, que es un conjunto de un número infinito de valores o un conjunto incontable, entonces la variable aleatoria X es continua.

Ejemplo 9.3 Algunos problemas de fenómenos aleatorios continuos que se modelan matemáticamente con la variable aleatoria continua son la cantidad de agua que hay en un manto específico del subsuelo de la Ciudad de México; la presión de sangre en un paciente a una hora determinada; la temperatura de otro paciente y la cantidad de agua de lluvia que caerá en un punto específico de la Ciudad Universitaria, suponiendo que está lloviendo. Todas las mediciones de estas variables pueden tomarse sobre algún número real como valor, aunque por las limitaciones de los equipos de medición implican que las medidas sean discretas.

Más formalmente, una variable aleatoria es continua si para cualquier par de valores a y b con $a < b$ se tiene que $p(X \leq a) < p(X \leq b)$ y se cumple $p(a < X < b$.

Debe observarse que para una variable aleatoria X sea continua en un rango de valores $[a, b]$ es necesario que cada intervalo diferente de cero en el rango tenga una probabilidad diferente de cero, para lo cual la variable debe asumir un número infinito de valores posibles. También debe reiterarse que la variable aleatoria continua es una idealización porque el trabajo más preciso no permite darnos las medidas exactas de las variables con cualquier número de decimales deseados lo que limita la posibilidad real de encontrar variables aleatorias continuas en la práctica; no obstante estas idealizaciones matemáticas las funciones de estas variables son mucho más fáciles de establecer y estudiarlas utilizando las potentes herramientas del análisis matemático y; además, las distribuciones continuas se pueden aproximar o ajustar con fidelidad a muchas de las distribuciones discretas con lo cual es posible organizar la teoría estadística en torno a las distribuciones continuas idealizadas y utilizar métodos aproximados para situaciones discretas complicadas.

Finalmente, debe insistirse que la variable aleatoria continua es una abstracción matemática idealizada de los fenómenos reales de esta clase de mucha utilidad para su análisis matemático, pero que no necesariamente describe de manera exacta las situaciones reales bajo estudio.

9.2.2.1 Distribuciones de probabilidad las Variables Aleatorias Continuas

En la sección anterior se vio que la probabilidad $p(X = x_i)$ toma un valor exacto; pero para el caso de las VAC $p(X = x_i)$, que es la probabilidad de que X tome un valor exacto tiene una probabilidad de cero; por lo que es necesario considerar probabilidades para intervalos de valores de X, lo que da origen a la ***función de densidad*** o densidad de probabilidad de X, que se denota con $\boldsymbol{f(x)}$, la cual conforme a los axiomas de la teoría de la probabilidad, debe satisfacer las siguientes condiciones.

$$f(x) \geq 0 \; para \; toda \; x \qquad (9.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{9.4}$$

Lo que significa que la función de densidad $f(x)$ debe ser positiva definida en el semiplano superior y el área bajo la curva $f(x)$ y el eje x debe ser igual a 1 como se ilustra en la figura 9.5, y se vio en el capítulo 8. Estas condiciones son análogas a las (9.1) y (9.2) impuestas a las distribuciones de las variables aleatorias discretas, puesto que la integral es una suma de elementos diferenciales.

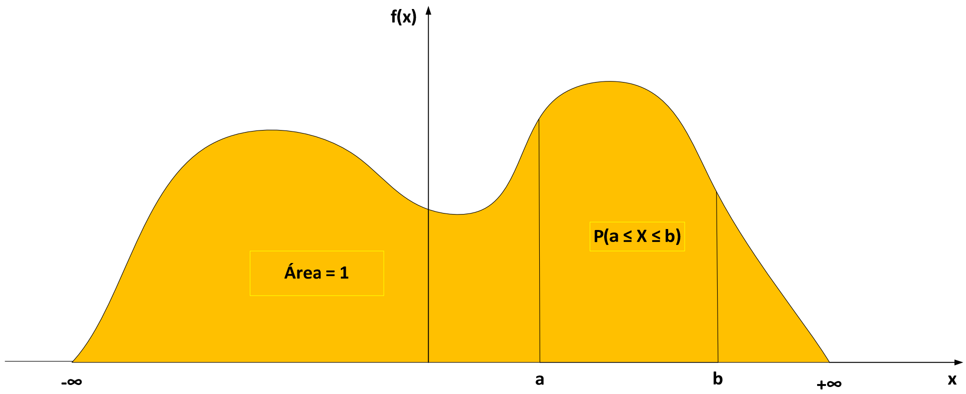


Figura 9.5 El espacio muestral de la FDP y la probabilidad del evento $p(a \leq X \leq b)$

El área bajo la curva de la función de densidad $f(x)$ constituye el espacio muestral $\mathbb{S}$ y el área comprendida en cualquier intervalo tal como el $[a, b]$ mostrado en la figura es la probabilidad de ese evento:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{9.5}$$

Que es igual a la probabilidad de que X tome un valor comprendido en el intervalo $[a, b]$.

Obsérvese que

$$p(a \leq X \leq a) = p(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Ya que el área es igual a cero, lo que demuestra que las probabilidades puntuales de las VAC son cero. Entonces, una distinción importante entre las variables aleatorias discretas y continuas consiste en que para las primeras $p(X = x_i) \neq 0$ para algunos valores x_i, en tanto que para las variables aleatorias continuas $p(X = x_i) = 0$ para todos los valores x_i.

Ejemplo 9.4 Los estudios de laboratorio en la fábrica de los sensores ópticos colocados en los reproductores de DVD's, reportaron que el tiempo de vida en hrs, T, se comporta conforme la función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{100}\right) e^{-\left(\frac{t}{100}\right)} & si\ t \geq 0 \\ 0 \qquad si & t < 0 \end{cases}$$

Primero, verifiquemos que se trata de una función de densidad.

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)e^{-\left(\frac{t}{100}\right)}\,dt = -e^{-\left(\frac{t}{100}\right)}\Big|_0^{\infty} = 0 + e^0 = 1$$

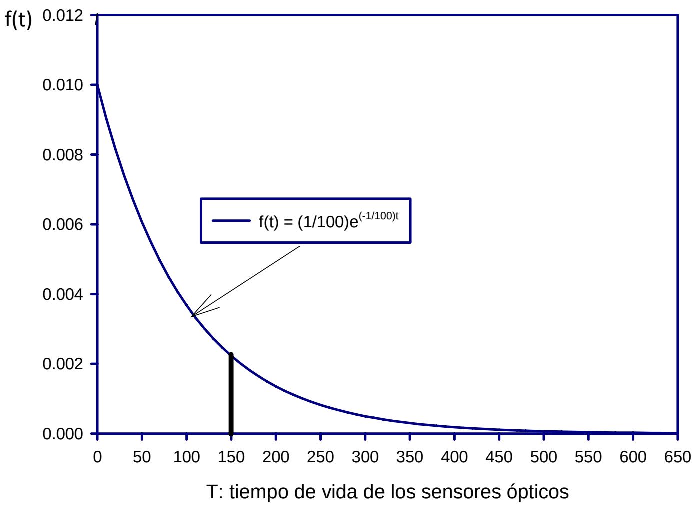
Lo que demuestra que si es una FDP y el área bajo la curva que aparece en la figura 9.6 es igual a 1.

La probabilidad de que el sensor óptico dure más de 150 hrs es

$$p(T \geq 150) = \int_{150}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)e^{-\left(\frac{t}{100}\right)}\,dt = -e^{-\left(\frac{t}{100}\right)}\Big|_{150}^{\infty} = e^{-\left(\frac{150}{100}\right)} = e^{-(1.5)} = 0.223$$

Que es igual al área bajo la curva y a la derecha de la recta vertical situada en 150 hrs.

Figura 9.6. Función de densidad de probabilidad del tiempo de vida



Ejemplo 9.5 Si el asentamiento de una estructura tiene la FDP mostrada en la figura 9.7, determinemos la función de densidad de probabilidad de los asentamientos.

Aplicando los conceptos de geometría y geometría analítica, de la figura observamos que los triángulos tienen la misma base y la misma altura por lo que son iguales a los comprendidos dentro del rectángulo que se obtienen trazando cualquier diagonal dentro de este. Más aún puesto que el área comprendida en el trapecio tiene que ser igual a 1puesto que es una FDP, entonces el área del rectángulo debe ser igual a 0.5 y las de los rectángulos igual a 0.25.

Con estas bases, $A_2 = 2h = 0.50 \quad \Rightarrow \quad h = 0.25$

Y con los datos de la figura se calculan las ecuaciones de las rectas que integran la función de densidad de probabilidad.

a) La función que es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0.125x & para\ \ x < 2 \\ 0.25 & para\ 2 \leq\ x \leq 4 \\ -0.125x + 0.75 & para\ 4 <\ x \leq 6 \end{cases}$$

b) La probabilidad que el asentamiento sea menor que 2 cm es

$$p(x \leq 2) = \int_0^2 0.125x dx = \frac{0.125x^2}{2} |_0^2 = 0.250$$

c) La probabilidad que el asentamiento esté comprendido entre 2 y 4 cm es

$$p(2 \leq x < 4) = \int_2^4 0.25\ dx = 0.25x\,|_2^4 = 0.50$$

d) Si se ha observado que el asentamiento es mayor de 2 cm, calculemos la probabilidad de este será menor de 4 cm.

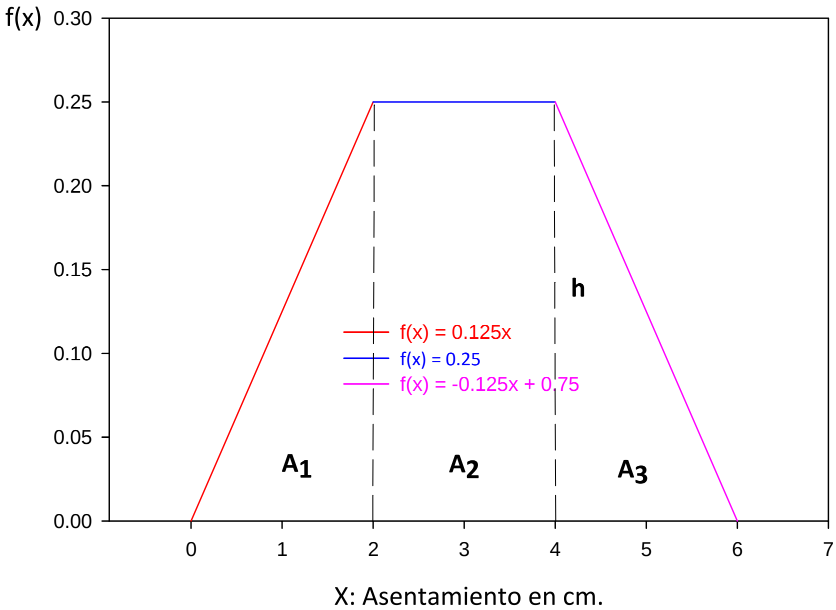
si $A = \{el\ asentamiento\ es\ menor\ de\ 4\ cm\} = X < 4$ y

$B = \{el\ asentamiento\ es\ mayor\ de\ 2\ cm\} = X > 2$

Del capítulo anterior sabemos que $p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)}$; entonces con b) y c)

$$p(X < 4|X > 2) = \frac{p(2 \leq x < 4)}{1 - p(x \leq 2)} = \frac{0.50}{1 - 0.250} = 0.667$$

Figura 7. Función de densidad de probabilidad de los asentamientos



Hemos visto la manera formal de resolver el ejemplo utilizando las potentes herramientas del cálculo integral que estudiamos en el capítulo 6; sin embargo, tal vez se haya advertido una forma más sencilla de resolverlo usando la geometría y las propiedades de la FDP.

Como se anticipó, el área del trapecio constituye el espacio muestral $\mathbb{S}$ por lo que su área es igual a 1.

i. La probabilidad que el asentamiento sea menor que 2 cm es igual al área del triángulo de la izquierda $p(x \leq 2) = 0.25$.

ii. La probabilidad que el asentamiento esté comprendido entre 2 y 4 cm es el área del rectángulo $p(2 \leq x < 4) = 0.50$

iii. Si se ha observado que el asentamiento es mayor de 2 cm, calculamos la probabilidad de este será menor de 4 cm. Mediante el nuevo espacio muestral reducido $X > 2$, que es la suma de la áreas $\boldsymbol{A_2}$ y $\boldsymbol{A_3}$ donde esta contenido el evento $\boldsymbol{A_2} = X < 4$, por lo tanto $p(X < 4|X > 2) = \frac{0.50}{0.75}$.

9.3 Variables Aleatorias Conjuntas

Mucho problemas que se presentan en la ingeniería, la medicina, la economía y demás profesiones, involucran el estudio de más de una variable aleatoria; por ejemplo, un ingeniero de telecomunicaciones debe diseñar el estado del sistema Y, que consta de una torre y una antena, contra la carga producida por el viento histórico local X; un ingeniero en estructuras debe tomar en consideración la interrelación del comportamiento de la estructura Y y la magnitud de los sismos a que estará expuesta X; en los estudios de investigación de los alumnos de la Facultad de Ingeniería, podemos estar interesados en el grado en que ciertos factores que afectan la calificación de los alumnos Y, tales como el tiempo que le dedican al estudio X_1, sus antecedentes escolares X_2 y el nivel de nutrición X_3; una investigación médica puede interesarse en el tratamiento que se le prescribe a los pacientes X y el grado de mejoría de su salud Y.

Así como el cálculo vectorial es una generalización del cálculo diferencial e integral de una sola variable, **las variables aleatorias conjuntas** que estudiaremos en esta sección, es la generalización de los conceptos de una sola variable aleatoria que estudiamos anteriormente.

9.3.1 Distribución de probabilidad conjunta de las variables discretas $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$

Tomando como base el estudio de las probabilidades conjuntas, vistas en la sección 7.10 del capítulo anterior, ahora supongamos que tenemos dos variables aleatorias discretas $X = (x_1, x_2, \dots x_i, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \dots y_j, \dots, y_m)$, donde x_i y y_j son los valores que pueden tomar X y Y, respectivamente.

Para cualquier evento $A_{ij} = \{X = x_i \cap Y = y_j\} = \{X = x_i, Y = y_j\}$, su probabilidad asociada es $p(A_{ij}) = p\{X = x_i \cap Y = y_j\} = p\{X = x_i, Y = y_j\}$; y el conjunto de todos estos pares de valores: los eventos con sus probabilidades correspondientes, se define como **la función masa de probabilidad conjunta o simplemente distribución de probabilidad conjunta de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$** que**,** como en el caso de una sola variable aleatoria, esta distribución puede representarse mediante una lista como aparece en la tabla 3, de manera gráfica en un espacio tridimensional o mediante una expresión matemática.

Tabla 3. Distribución de probabilidad conjunta de X y Y

$\boldsymbol{A_{11} = \{X = x_1, Y = y_1\}}$	$\boldsymbol{p(A_{11}) = p\{X = x_1, Y = y_1\}}$
$\boldsymbol{A_{12} = \{X = x_1, Y = y_2\}}$	$p(A_{12}) = p\{X = x_1, Y = y_2\}$
....	....
$\boldsymbol{A_{ij} = \{X = x_i, Y = y_j\}}$	$p(A_{ij}) = p\{X = x_i, Y = y_j\}$
....	....
$\boldsymbol{A_{nm} = \{X = x_n, Y = y_m\}}$	$p(A_{nm}) = p\{X = x_n, Y = y_m\}$

Obsérvese que el número de eventos es $n \times m$, y conforme a los axiomas fundamentales de la teoría de la probabilidad, la función de distribución conjunta de X y Y debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$p(X = x_i, Y = y_j) \geq 0 \tag{9.6}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x_i, Y = y_j) = 1 \tag{9.7}$$

Las funciones de distribución conjunta para tres o más variables se expresan mediante una extensión directa de las condiciones anteriores.

$$p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n) \geq 0 \;\; para\ toda\ x \tag{9.6'}$$

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} \dots \sum_{x_n} p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n) = 1 \tag{9.7'}$$

9.3.1.1 Distribuciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias discretas X y Y

Primero es necesario hacer notar que la distribución conjunta de las variables puede también representarse en otra tabla en cuyos márgenes se coloquen los valores de X y Y y en las celdas las probabilidades correspondientes como se ilustra en la tabla 4.

Tabla 4. Distribución de probabilidad conjunta de X y Y

X \ Y	y_1	y_2		y_j		y_m	$p(X{=}x_i)$
x_1	$p\{x_1, y_1\}$	$p\{x_1, y_2\}$	…	$p\{x_1, y_j\}$	…	$p\{x_1, y_m\}$	$p(X{=}x_1)$
x_2	$p\{x_1, y_1\}$	$p\{x_2, y_2\}$	…	$p\{x_2, y_j\}$	…	$p\{x_2, y_m\}$	$p(X{=}x_2)$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p\{x_i, y_1\}$	$p\{x_i, y_2\}$		$p\{x_i, y_j\}$	…	$p\{x_i, y_m\}$	$p(X{=}x_i)$
	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p\{x_n, y_1\}$	$p\{x_n, y_2\}$	…	$p\{x_n, y_j\}$	…	$p\{x_n, y_m\}$	$p(X{=}x_n)$

$p(Y=y_j)$	$p(Y=y_1)$	$p(Y=y_2)$	…	$p(Y=y_j)$	…	$p(Y=y_m)$	$p(Y=y_j)$

En esta tabla se debe satisfacer la propiedad (7) que corresponde a la suma de los valores contenidos en las celdas claras.

Con apoyo en la sección 7.11, donde vimos las relaciones entre las probabilidades conjuntas, marginales y condicionales, es posible definir las distribuciones marginales de X y Y a partir de las distribuciones conjuntas. Así:

Distribución marginal de la variable aleatoria discreta X

$$p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p\{X = x_i, Y = y_j\} \tag{9.8}$$

Si se observa la tabla anterior, esta sumatoria es la suma de los renglones de las probabilidades conjuntas, y se muestran en el margen derecho de la tabla 4, y la distribución de probabilidad marginal de X es el conjunto formado por las parejas $[X = x_i, p(X = x_i)]$

Distribución marginal de la variable aleatoria Y

$$p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p\{X = x_i, Y = y_j\} \tag{9.9}$$

Si se observa la tabla anterior, esta sumatoria corresponde a la suma de las columnas y se muestran en el margen inferior de la tabla 4 y la distribución de probabilidad marginal de Y es el conjunto formado por las parejas $[Y = y_j, p(Y = y_j)]$

Ambas distribuciones marginales se derivan de las distribución conjunta y, además, son distribuciones de una variable iguales a las estudiadas en las secciones anteriores.

Para determinar la función de probabilidad marginal de cualquiera de las variables de una distribución conjunta con N variables, basta sumar sobre las N-1 variables restantes; por ejemplo

$$p(X_n = x_n) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} \dots \sum_{x_{n-1}} p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n) = 1$$

Y para determinar la función de probabilidad conjunta de cualquier par particular de las $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ variables basta sumar $p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n)$ sobre las N-2 variables restantes.

9.3.1.2 Distribución condicional de la variable aleatoria discreta X

Nuevamente, con apoyo en el apartado 7.10 del capítulo anterior, se derivan directamente las funciones de distribución condicionales a partir de las distribuciones conjunta y marginales.

Distribución condicional de X dado $Y = y_j$

$$p(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p\{X = x_i, Y = y_j\}}{p(Y = y_j)}, \text{ para } i = 1,2,3,\dots,n \quad y \quad Y = y_j \tag{9.10}$$

Cabe observar que se tienen m distribuciones marginales de X, una para cada valor de Y, y se calculan valuando la función para $i = 1,2,3,\dots,n$ manteniendo constante $Y = y_j$.

Distribución condicional de Y *dado* $X = x_i$

$$p(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p\{X=x_i, Y=y_j\}}{p(X=x_i)}, \text{ para } j = 1,2,3,\dots,m \quad y \quad X = x_i \tag{9.11}$$

También debe observarse que se tienen n distribuciones marginales de Y, una para cada valor de X, y se calculan valuando la función para $j = 1,2,3,\dots,m$ manteniendo constante $X = x_i$ en el cálculo de cada una de las distribuciones marginales de Y.

9.3.2 Función de densidad conjunta de las variables continuas X y Y

Retomando el estudio de las probabilidades conjuntas, vistas en la sección 7.10 del capítulo anterior y los conceptos de cálculo integral estudiados en el apartado 6.8, podemos definir por analogía la distribución de probabilidades conjuntas o función de densidad conjunta de las variables continuas X y Y a partir de las variables aleatorias discretas. Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable, $f(x,y)$ se llama función de densidad conjunta de X y Y si satisface los teoremas fundamentales de la teoría de la probabilidad.

$$f(x,y) \geq 0 \tag{9.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1 \tag{9.13}$$

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dydx = p(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) \tag{9.14}$$

Al igual que con las variables discretas, las expresiones anteriores pueden generalizarse para el caso de Nvariables aleatorias conjuntas.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \geq 0 \;\; para\; x_1, x_2, x_3, \dots x_n \in \mathbb{R} \tag{9.12'}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)\, dx_1 dx_1 dx_1 \dots dx_1 = 1 \tag{9.13'}$$

Dichas analogías pueden explicarse recordando que para el caso de una variable $f(x)$ tiene como representación gráfica una curva, ahora $f(x,y)$ es la ecuación de una superficie definida en el semiespacio superior o sea que no tiene valores negativos; la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ indica que el área bajo la curva es igual a 1, ahora para las densidades conjuntas $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$ o sea que el volumen bajo la superficie es 1; y para el caso de una variable $\int_{a}^{b} f(x)dx = p(\, a \leq x \leq b)$ la probabilidad del evento $A = \{\, a \leq x \leq b\}$ es igual al área bajo la curva comprendida entre [a,b] mientras que para el caso de las variables conjuntas $\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dydx =$

$p(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ señala que la probabilidad del evento $A = \{ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ es igual al volumen bajo la superficie comprendida debajo de la superficie $f(x, y)$ delimitada por la región formada por los intervalos conjuntos $\Re = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$.

9.3.2.1 Funciones de densidad marginales de las variables aleatorias continuas $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$

Nuevamente, con base en la sección 7.11, donde estudiamos las relaciones entre las probabilidades conjuntas, marginales y condicionales, es posible definir las distribuciones marginales o funciones de densidad marginales de X y Y a partir de las distribuciones conjuntas. Así:

Función de densidad marginal de la variable aleatoria continua X

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \tag{9.15}$$

Que comparada con (8) es la suma infinitesimal respecto a y.

Función de densidad marginal de la variable aleatoria continua Y

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \tag{9.16}$$

Si se observa esta integral se corresponde con la suma (9.9) y es la suma infinitesimal respecto a x. Ambas distribuciones marginales se derivan de las distribución conjunta y, además, son distribuciones de una variable aleatoria, iguales a las estudiadas en las secciones previas.

Para el caso de N variables aleatorias conjuntas, la función de densidad marginal se obtiene integrando sobre las variables restantes; por ejemplo

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)\, dx_2 dx_1 dx_1 \dots dx_1 \tag{9.16'}$$

9.3.2.2 Distribución condicional de la variable aleatoria continua $\boldsymbol{X}$

Nuevamente, con apoyo en el apartado 7.10 del capítulo anterior, se derivan directamente las funciones de distribución condicionales a partir de las distribuciones conjuntas y marginales.

Distribución condicional de X dado $Y = y_j$

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \tag{9.17}$$

Cabe observar que se tienen m distribuciones marginales de X, una para cada valor de Y, y se calculan valuando la función para $i = 1,2,3, \dots, n$ manteniendo constante $Y = y_j$.

Distribución condicional de Y dado $X = x_i$

$$f(y|X = x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \tag{9.18}$$

Cabe observar que para el caso de las variables aleatorias continuas se tienen solo dos funciones marginales -$f(x)$ y $f(y)$-, pero un número infinito de funciones de densidad condicionales tanto para Xcomo para Y puesto que estas variables tienen un número infinito de valores.

9.4 Independencia de Variables aleatorias conjuntas Discretas y continuas

El concepto de independencia de eventos estudiado en la sección 7.12 del capítulo anterior, puede extenderse para el caso de las funciones de distribución estudiadas en este capítulo.

Para el caso de las variables aleatorias conjuntas discretas diremos que son estadísticamente independientes si

$$p\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = p(X = x_i),\ \text{para}\ \ \forall i\ \ y\ \ \forall j \tag{9.19}$$

$$p\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = p(\,Y = y_j),\ \ \text{para}\ \ \forall i\ \ y\ \ \forall j \tag{9.20}$$

O bien**.**

$$p\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p(X = x_i)p(\,Y = y_j),\ \ \ \text{para}\ \ \forall i\ \ y\ \ \forall j \tag{9.21}$$

Expresión que puede generalizarse para el caso de n variables aleatorias conjuntas discretas estadísticamente independientes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$:

$$p(X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n) = p(X = x_1)p(X = x_2), \dots, p(X = x_n) \tag{9.22}$$

Por lo que toca a las variables aleatorias continuas, se tiene:

$$f(x|Y = y) = f(x) \tag{9.23}$$

$$f(y|X = x) = f(y) \tag{9.24}$$

O bien,

$$f(x,y) = f(x)f(y) \tag{9.25}$$

Que también puede generalizarse para el caso de n variables aleatorias conjuntas continuas estadísticamente independientes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)f(x_3) \dots f(x_n) \quad (9.26)$$

9.5 Distribuciones de probabilidad acumulativa de las Variables Aleatorias -FDA-

Ya vimos que las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias se pueden estudiar mediante la función masa de probabilidad -FMP- para el caso discreto o a través de la función de densidad de probabilidad –FDP- si la variable aleatoria es continua; sin embargo, existe otra forma alternativa de mucha utilidad para estudiar las distribuciones de dichas variables, que da pie al uso de las tablas de probabilidad que parecen en la mayoría de los libros, que llamaremos **la función de distribución acumulativa** porque es una función que acumula la probabilidades que se encuentran a la izquierda de un valor especificado x, incluyendo dicho valor. Esta función también se conoce como la función de distribución acumulada, función de probabilidad o simplemente función de distribución, pero en cualquier caso se denota con $F(x)$ y se define a continuación.

La función de distribución acumulativa $F(x)$ es igual a la probabilidad del evento $A = \{X \leq x\}$ o sea

$$F(x) = p(X \leq x) \quad (9.27)$$

Esta es una función que relaciona los valores de X con sus correspondientes probabilidades acumuladas hasta el valor x y, para que sea función de probabilidad debe satisfacer las siguientes condiciones derivadas de los axiomas de la teoría de la probabilidad:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (9.28)$$

$$\text{Si } a < b \succ F(a) < F(b) \quad (9.29)$$

$$F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1 \quad (9.30)$$

Con esta definición general de la FDA y conocidas la FMP y la FDP se tienen las FDA de manera única; así,

Si X es una variable aleatoria discreta:

$$F(x) = p\left(X \leq x_j\right) = \sum_{i=1}^{i=j} p(X = x_i) \quad (9.31)$$

Donde $i = 1$ significa el primer valor e $i = j$ el valor hasta donde se acumula la probabilidad, de la variable aleatoria X; respectivamente. Esta es una función discontinua en forma de escalera donde la altura de cada escalón señala el valor de la probabilidad del punto donde sube el escalón, como se verá en los ejemplos.

Si X es una variable aleatoria continua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{9.32}$$

Que esquemáticamente representa el área comprendida bajo la curva $f(x)$ desde $-\infty$ hasta el valor x, y es una función continua, creciente y generalmente toma la forma de una S. Más aún, por los antecedentes estudiados en el capítulo 6, se tiene

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{9.33}$$

O sea que la función de densidad de probabilidad $f(x)$ puede encontrarse derivando la función de distribución acumulada $F(x)$.

Con la FDA podemos encontrar las probabilidades de eventos intervalares, así, X toma cualquier valor comprendido en el intervalo $(a, b]$ se tiene que

$$p(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{9.34}$$

Ya que $F(b)$ es la probabilidad de que X el valor de b o cualquier valor menor, y $F(a)$ es la probabilidad de que X cualquier valor menor de a, cuya diferencia es $p(a < X \leq b)$; como ya vimos, para las variables aleatorias continuas esta probabilidad es la misma si se intercambia el símbolo $<$ por $\leq$, situación que no sucede con las variables aleatorias discretas ya que el símbolo $<$ da una probabilidad diferente que con $\leq$.

Si se tienen dos variables aleatorias conjuntas discretas, su función de distribución acumulativa es

$$F(x_i, y_j) = p(X \leq x_i, Y \leq y_j) = \sum_{l=1}^{l=i} \sum_{m=1}^{m=j} p(\ X = x_l, Y = y_m) \tag{9.35}$$

Y para el caso de dos variables aleatorias conjuntas continuas, su función de distribución acumulativa es

$$F(x_i, y_j) = p(X \leq x_i, Y \leq y_j) = \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{y_j} f(x, y)dydx \tag{9.36}$$

Ejemplo 9.6. En un estudio origen-destino que se efectúo en la caseta de cobro de tepozotlán estado de México, se efectuaron conteos en periodos de 30 seg de los automóviles que ingresaban y que salían de la ciudad de México, cuyas observaciones se muestran en la tabla 9.5. En la cual

$$X = No. de\ automóviles\ que\ ingresan\ a\ la\ Cd. de\ México\ en\ un\ intervalo\ de\ 30\ seg$$
$$Y = No. de\ automóviles\ que\ salen\ de\ la\ ciudad\ de\ México\ en\ un\ intervalo\ de\ 30\ seg$$

Tabla 9.5. Número total de observaciones

Y \ X	0	1	2	3	4
0	2	5	15	40	58
1	1	6	15	35	62
2	18	15	28	30	30

3	45	32	25	15	10
4	65	58	35	15	5

La tabla 9.6 muestra las observaciones totales por renglón y por columna que nos servirá para calcular las probabilidades frecuentistas.

Tabla 9.6. Observaciones totales por renglón y por columna

X \ Y	0	1	2	3	4	Suma
0	2	5	15	40	58	120
1	1	6	15	35	62	119
2	18	15	28	30	30	121
3	45	32	25	15	10	127
4	65	58	35	15	5	178
	131	116	118	135	165	665

Dividiendo cada celda y los valores de los márgenes derecho e inferior de la tabla 6, entre el número de observaciones totales -665- obtenemos la tabla 9.7, en la que las probabilidades -resaltadas con el color pálido de las celdas-, junto con los valores asociados de X y Y constituye la distribución de probabilidades conjunta, representada en la figura 9.8. Así

x, y	0, 0	0, 1	...	4, 4
P(x, y)	0.0030	0.0075	...	0.0075

Tabla 9.7. Distribución conjunta de X, Y y sus distribuciones marginales

X \ Y	0	1	2	3	4	p(X=x)
0	0.0030	0.0075	0.0226	0.0602	0.0872	0.1805
1	0.0015	0.0090	0.0226	0.0526	0.0932	0.1789
2	0.0271	0.0226	0.0421	0.0451	0.0451	0.1820
3	0.0677	0.0481	0.0376	0.0226	0.0150	0.1910
4	0.0977	0.0872	0.0526	0.0226	0.0075	0.2677
p(Y=y)	0.1970	0.1744	0.1774	0.2030	0.2481	1.0000

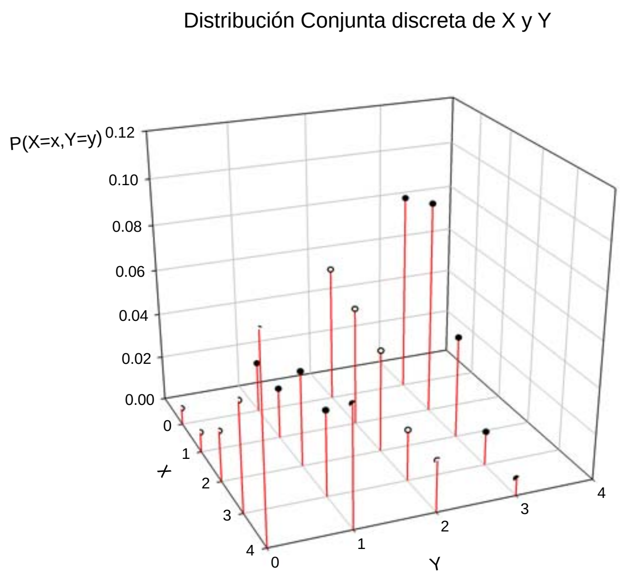


Figura 9.8. Función Masa de probabilidad conjunta de X,Y

La probabilidad de que 4 automóviles estén saliendo de la ciudad de México si también 4 están entrando en el mismo intervalo de 30 seg, con apoyo en la tabla 7 es

$$p(X = 4, Y = 4) = 0.0075$$

Por otro lado, la FMP marginal de X es el conjunto de valores de X y su probabilidad correspondiente que aparecen en el lado derecho de la tabla 7, mientras que la FMP de marginal de Y es el conjunto de valores de Y con sus probabilidades correspondientes que aparecen en el margen inferior de la misma tabla; cuyas gráficas se muestran en la figura 9.9.

Si hay 3 automóviles que ingresan a la ciudad de México en un intervalo de 30 seg, la distribución de probabilidad condicional de los vehículos que salen es, conforme a (11) y con apoyo en las probabilidades de la tabla 7:

$$p(Y = 0|X = 3) = \frac{0.0602}{0.1910} = 0.3543 \qquad p(Y = 1|X = 3) = \frac{0.0526}{0.1910} = 0.2520$$

$$p(Y = 2|X = 3) = \frac{0.0451}{0.1910} = 0.1969 \qquad p(Y = 3|X = 3) = \frac{0.0226}{0.1910} = 0.1181$$

$$p(Y = 4|X = 3) = \frac{0.0226}{0.1910} = 0.0787$$

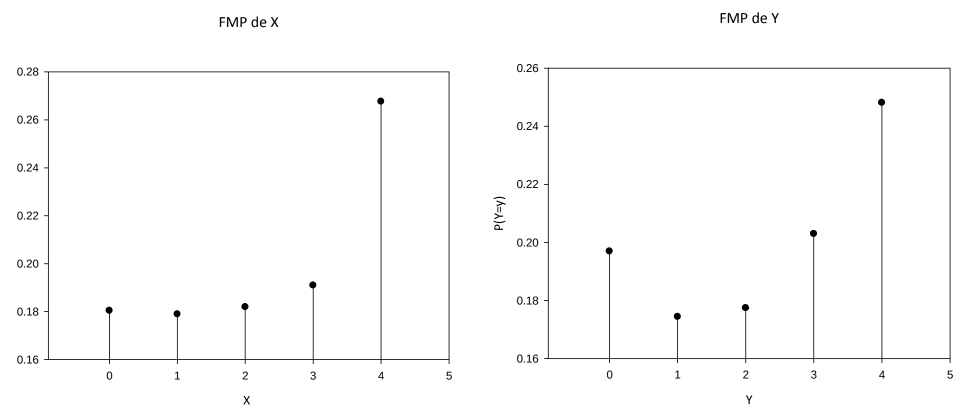


Figura 9.9 Distribuciones marginales de X y Y

La gráfica de esta distribución se muestra en la figura 9.10. Debe observarse que

- las probabilidades son todas positivas y su suma es igual a 1, por lo que es una distribución de probabilidad
- que en este ejemplo se tienen 5 x 5 = 25 distribuciones condicionales, 5 por cada variable.

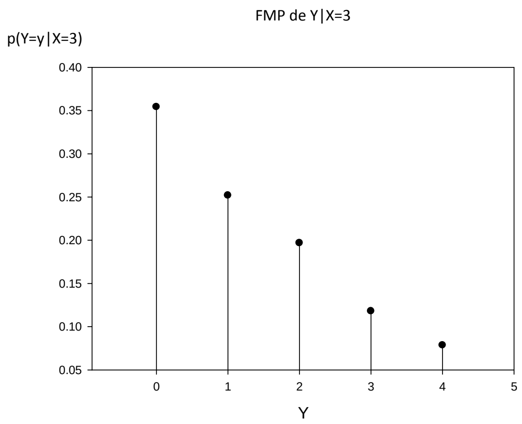


Figura 9.10 Distribución condicional de Y, para X = 3

Las variable aleatorias NO son estadísticamente independientes puesto que

$$p(Y = 0 \mid X = 3) = 0.3543 \neq p(Y = 0) = 0.1970$$

O bien

$$p(Y = 0 \cap X = 3) = 0.0677 \neq p(Y = 0)p(X = 3) = 0.1970 \times 0.1910 = 0.0376$$

Basta que una de las condiciones no se cumpla para que no exista independencia estadística.

La función de distribución acumulada de esta distribución condicional, con base en la expresión (9.31) es, como su nombre lo indica, el conjunto de parejas formadas por los valores de la variable y la suma acumulada de las probabilidades hasta el valor correspondiente; y aparece en la tabla 8 y su representación gráfica en la figura 9.11.

Tabla 8. FDA de Y|X=3

y	P(Y=y)	F(Y|X=3)
0	0.3543	0.3543
1	0.2520	0.6063
2	0.1969	0.8031
3	0.1181	0.9213
4	0.0787	1.0000

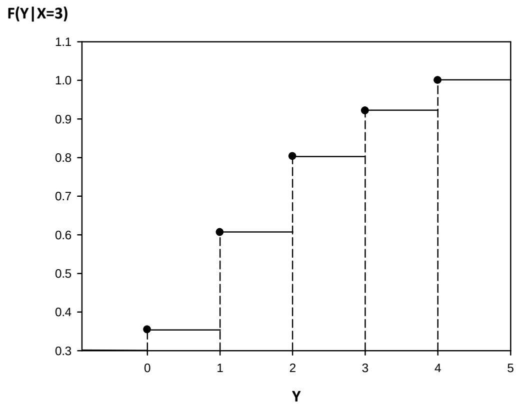


Figura 9.11. Función de Distribución Acumulada de Y|X=3

Conforme a (9.34), la probabilidad de que y esté comprendida en el intervalo $(2,4]$, con apoyo en la tabla 8 es

$$p(2 < Y \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - 0.8031 = 0.1969$$

O bien, con apoyo en la misma tabla 8 es

$$p(2 < Y \leq 4) = p(Y = 3) + p(Y = 4) = 0.1181 + 0.0787 = 0.1968$$

La diferencia de los valores obedece al truncamiento decimal.

La probabilidad que durante un intervalo de 30 seg haya cuando más 3 automóviles que ingresan a la ciudad de México y 2 que salen, con base en la expresión (9.35) con la cual se construyó la tabla 9.9, es

$$F(3,2) = p(X \leq 3, Y \leq 2) = 0.311$$

La probabilidad que durante un intervalo de 30 seg haya más 3 automóviles que ingresan a la ciudad de México y 2 que salen, es

$$F(3,2) = p(X > 3, Y > 2) = 1 - p(X \leq 3, Y \leq 2) = 1 - F(3,2) = 1 - 0.311 = 0.689$$

Tabla 9.9. Funciones de Distribución Acumuladas de $X \cap Y, X$ y Y.

X \ Y	0	1	2	3	4	$p(X \leq x)$
0	0.003	0.011	0.033	0.093	0.180	0.1805
1	0.005	0.021	0.066	0.179	0.359	0.3594
2	0.032	0.071	0.158	0.316	0.541	0.5414
3	0.099	0.186	0.311	0.492	0.732	0.7323
4	0.197	0.371	0.549	0.752	1.000	1.0000
$p(Y \leq y))$	0.197	0.371	0.549	0.752	1.000	

Cabe observar que las FDA marginales no son la suma de los renglones ni las columnas como podría esperarse, sino las sumas acumuladas de las distribuciones marginales correspondientes, que son iguales a los valores de las probabilidades acumuladas conjuntas para los valores extremos de X y de Y.

La probabilidad que durante un intervalo de 30 seg haya el menos 3 automóviles que ingresan a la ciudad de México es

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) = 0.1910 + 0.2677 = 0.4587$$

La probabilidad que durante un intervalo de 30 seg haya más 2 automóviles que salen, es

$$p(Y > 2) = 1 - p(Y \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.549 = 0.451$$

Ejemplo 9.7 Si X y Y corresponden a la proporción de tiempo que dos empleados utilizan en efectuar sus tareas asignadas, y el comportamiento conjunto de las frecuencias relativas se modela por la función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y \ \ para\ 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad para\ ptros\ valores \end{cases}$$

Verifiquemos que es una función de densidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)dydx = \int_0^1\int_0^1(x+y)dydx = \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=1} dx$$

$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 1$, por lo tanto si es densidad.

Calculemos

$$p\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/2}\int_{1/4}^{1}(x+y)dydx = \int_0^{1/2}(\frac{3x}{4} + \frac{15}{32})\,dx = \frac{21}{64}$$

Calculemos

$$p(X + Y \leq 1) = p(Y \leq 1 - X) = \int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)dydx = \frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)dx = \frac{1}{3}$$

Calculemos las FDP marginales de X y Y

$$f(x) = \int_0^1 (x+y)dy = (xy + \frac{y^2}{2})\Big|\begin{matrix} y=1 \\ y=0 \end{matrix} = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = \int_0^1 (x+y)dx = (xy + \frac{x^2}{2})\Big|\begin{matrix} y=1 \\ y=0 \end{matrix} = y + \frac{1}{2}$$

Calculemos ahora las FDP condicionales de X y Y

$$f(x|y) = \frac{(x+y)}{y+{}^1\!/_2} \qquad \text{y} \qquad f(y|x) = \frac{(x+y)}{x+{}^1\!/_2}$$

Calculemos ahora las FDP condicionales para $X = {}^1\!/_2$ y $Y = {}^1\!/_2$

$$f\left(y|x = {}^1\!/_2\right) = \frac{({}^1\!/_2+y)}{{}^1\!/_2+{}^1\!/_2} = {}^1\!/_2 + y \quad \text{y} \quad f\left(x|y = {}^1\!/_2\right) = \frac{(x+{}^1\!/_2)}{{}^1\!/_2+{}^1\!/_2} = x + {}^1\!/_2$$

Cabe observar que éstas son solo dos de un número infinito de funciones de densidad marginales que pueden tenerse puesto que X y Y pueden tomar un número infinito de valores y; en particular, para los valores $x = {}^1\!/_2$ y $y = {}^1\!/_2$ se tiene

$$f(x) = f\left(x|y = {}^1\!/_2\right) = x + {}^1\!/_2 \text{ y } f(y) = f\left(y|x = {}^1\!/_2\right) = {}^1\!/_2 + y;$$

Por lo que podría pensarse que las variables aleatorias X y Y son independientes; sin embargo, no lo son puesto que

$$f(x,y) = (x+y) \neq f(x)f(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(y + \frac{1}{2})$$

Finalmente, calculemos la función de densidad acumulada conjunta.

$$F(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y (x+y)dydx = \int_0^x (xy + \frac{y^2}{2})dx = \frac{xy^2}{2} + \frac{yx^2}{2}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & para\ x < 0, y < 0 \\ \frac{1}{2}(xy^2 + yx^2) & para\ 0 \leq x \leq 1;\ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & para\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

9.6 Bibliografía y referencias

Larson R. Hostetler R. Edwards B. (2006) *CÁLCULO*, Octava edición, McGraw-Hill Interamericana, México.

Mendenhall W. Schaeffer R. Wackerly D. (1981) *Mathematical Statistics with Applications*, Second Edition, PWS PUBLISHERS, USA.

Olkin I. Gleser L. Derman C. (1980) *Probability Models and Applications, Macmillan* Publishing Co., Inc. USA.

Walpole R. Myers R. (1985) *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, THIRD EDITION, *Macmillan* Publishing Co., Inc. USA.

Winkler R. Hays W. (1975) Statistics: *Probability, Inference and Decision*, Second Edition, Holt, Rinehart and Winston, USA.

Nombre de archivo: cap9 var_aleatorias y distribuciones.docx
Directorio: C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\g-1) Capítulos de mi libro de Probabilidad y estadística 2007-2009
Plantilla: C:\Documents and Settings\bfc\Datos de programa\Microsoft\Plantillas\Normal.dotm
Título:
Asunto:
Autor: fACULTAD DE INGENIERÍA
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 28/09/2009 15:20:00
Cambio número: 62
Guardado el: 14/06/2010 15:26:00
Guardado por: FACULTAD DE INGENIERÍA
Tiempo de edición: 2,244 minutos
Impreso el: 30/08/2010 12:59:00
Última impresión completa
Número de páginas: 24
Número de palabras: 6,577 (aprox.)
Número de caracteres: 36,176 (aprox.)