

CAPÍTULO 13

MODELOS DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS

13.1 Introducción

Al igual que como vimos en los modelos de las distribuciones discretas encontradas principalmente por los matemáticos, también hay familias de distribuciones continuas cuya gama de aplicaciones es muy amplia sobre todo en el desarrollo y utilización de las técnicas estadísticas. La gama de estas familias continuas es muy amplia, por lo que en este capítulo nos enfocaremos solamente al estudio de algunos modelos continuos que han probado su utilidad en la ingeniería, iniciando con el modelo normal por ser el más importante, teniendo siempre presente que estos modelos son idealizaciones y aproximaciones razonables y prácticas de usar en lugar de los modelos discretos complicados.

13.2 Importancia de la Distribución Normal

Con mucho, este modelo es el que mejor se conoce y el más ampliamente utilizado en la estadística aplicada, particularmente en la inferencia estadística, por varias razones.

Se puede asumir que una población sigue un modelo normal porque se conoce o se presume que es cierto por los datos mismos, o sea que los datos observados de las muestras tienen este comportamiento o bien pueden ajustarse en primera aproximación a este modelo, aunque es cierto que ninguna distribución empírica de los datos puede ser exactamente normal porque los valores de cualquier variable aleatoria normal van de $(-\infty, +\infty)$ y se necesitaría un número infinito de decimales para representarlos; no obstante, la aproximación es frecuentemente buena. Cuando nos enfocamos a una medición particular en un proceso de manufactura, o consideramos los errores de las mediciones, o controlamos una temperatura, o estimamos alguna concentración química o recolectamos datos influenciados por un conjunto de causas aleatorias, los datos frecuentemente se distribuyen aproximadamente de manera normal. Más aún, la suposición de normalidad como base para el análisis de los datos muestrales se usa frecuentemente en los desarrollos de la teoría estadística avanzada. También encontramos que muchos de los estadísticos de las muestras tienden a la normalidad cuando aumenta el tamaño de la muestra.

En dos sentidos, la variable aleatoria que representa la medición de una determinada cantidad puede considerarse normal. Primero cuando consideramos la distribución hipotética de los errores de la medición, como ya se vio en el capítulo 9, cualquier medida puede considerarse formada de una cantidad cierta más un error aleatorio con cierta magnitud y dirección causado por una vasta cantidad de circunstancias operativas del momento y cualquier factor que influye la operación en el momento contribuye con una pequeña cantidad en la magnitud y dirección del error. Tales errores afectan la medición observada en algún sentido con igual verosimilitud y son independientes durante el

muestreo y se cancelan en el largo plazo; por ello, en teoría, tiene sentido que los errores de la medición se comporten normalmente.

En el otro sentido, algunas distribuciones de mediciones en biología o antropometría tienen frecuencias relativas muy cerradas a las probabilidades normales, por lo que la distribución de la verdadera magnitud también puede considerarse normal como sucede por ejemplo con la altura de las personas, pero de aquí no debe concluirse que la distribución normal es una regla de la naturaleza puesto que, de ser así, no tendría ningún sentido el hallazgo y el estudio de los demás modelos continuos.

Sobre las bases matemáticas solamente, puede ser conveniente considerar la distribución normal porque tiene importantes propiedades matemáticas por sí misma. La suposición de normalidad proporciona a la estadística un conjunto de consecuencias matemáticas muy valiosas que se utilizan en sus métodos. Más aún, como se verá más adelante, la distribución normal puede considerarse la madre de otras distribuciones teóricas que se utilizan ampliamente en la inferencia estadística y algunos problemas de ésta solo se pueden resolver con la distribución normal y los métodos que se desarrollan con apoyo en esta distribución trabajan aceptablemente aún cuando no se cumplan las suposiciones de normalidad.

La distribución normal también es una buena aproximación a otros modelos teóricos continuos o discretos muy laboriosos de trabajar o con poca exactitud, como sucede por ejemplo con la Binomial para grandes tamaños de muestra n o con intervalos del modelo normal cuyas probabilidades pueden usarse en las probabilidades Binomiales.

Existe un vínculo muy estrecho entre el tamaño de una muestra n y el grado al cual una distribución muestral se aproxima al modelo normal como caso límite, según lo postula el teorema de límite central; aún cuando la distribución de la población sea definitivamente no normal, como se verá en el capítulo sobre muestro.

Lo anterior pone de manifiesto la valía de esta distribución o su aproximación a ella en la inferencia estadística y su uso no es arbitrario como pudiera parecer.

13.3 La Distribución Normal

Esta distribución queda completamente especificada por su función cuya representación gráfica es una curva continua muy familiar conocida como la forma de campana según se aprecia en la figura 13.1, donde se observa que tiene un modo coincidente con la media y la mediana, por lo que es simétrica; los valores de la variable aleatoria van desde $-\infty$ hasta $+\infty$; y a cada intervalo diferente de cero le corresponde una probabilidad diferente de 0; y en las colas extremas las densidades de probabilidad disminuyen. Más aún, como sucede con cualquier distribución continua, la altura desde cualquier punto mide la densidad de probabilidad $f(x)$ y el área bajo la curva comprendida en cualquier intervalo es la probabilidad de que la variable aleatoria X esté comprendida en dicho intervalo.

Debe tenerse en cuenta que “no todo lo que brilla es oro” y que la forma de esta y cualquier otra distribución no es suficiente para determinar la distribución, o sea que existen otras distribuciones que también tienen forma de campana similares a la de la

normal, pero no son normales; tal como sucede con la distribución t de Student que se estudiará más adelante en este capítulo.

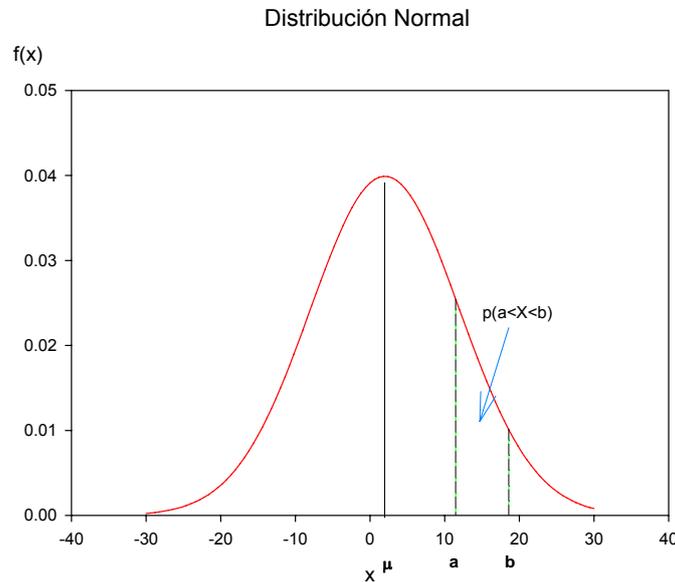


Figura 13.1. La distribución Normal

y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} \text{ para } -\infty < x < +\infty \quad (13.1)$$

Donde 2 , π y e son constantes matemáticas positivas, y μ_X y σ_X son a la vez los parámetros particulares y generales media y desviación estándar de la distribución, respectivamente y en el exponente $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2$, x es un valor de la variable aleatoria X que aparece con los parámetros μ_X y σ_X . Al igual que las demás distribuciones, se denota en forma breve como $N(\mu_X, \sigma_X)$ o $N(\mu, \sigma)$.

Algunas de las observaciones que se pueden hacer a la función son las siguientes. Entre más se desvía x de la media mayor será el valor del exponente, pero como la desviación está al cuadrado, entonces dos valores diferentes de x que muestren la misma desviación absoluta de μ_X tienen la misma densidad de probabilidad para esta función, lo que establece la simetría: como el exponente tiene un signo negativo, a mayor desviación absoluta, menor será la densidad de x asignada por la función, lo que demuestra que ambas colas de la FDP tienen densidades decrecientes porque entre más se aleja x de la media μ_X la cola de la función tendrá menor altura; ningún valor real de X hace que la densidad sea negativa o cero lo que indica que la función nunca toca ni atraviesa al eje x , por lo cual la función es positiva. Si $x = \mu_X$, el valor de la función de densidad es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}$ lo que sucede en el punto máximo e indica que tiene un solo modo con máximo en μ_X .

Finalmente, conviene recordar que mientras las funciones de densidad pueden tomar valores mayores que 1, las probabilidades nunca pueden tener dichos valores, μ_X puede tomar cualquier valor finito pero, por su propia definición, la desviación estándar σ_X solamente admite valores positivos. Esta distribución es de dos parámetros $-\mu_X$ y σ_X que deben darse en las mismas unidades tales como m, °C, % de concentración etc.; y una dupla particular de ellos define un miembro de la familia de las distribuciones normales, como se muestra en la figura 13.2 que difieren en medias y desviaciones estándar.

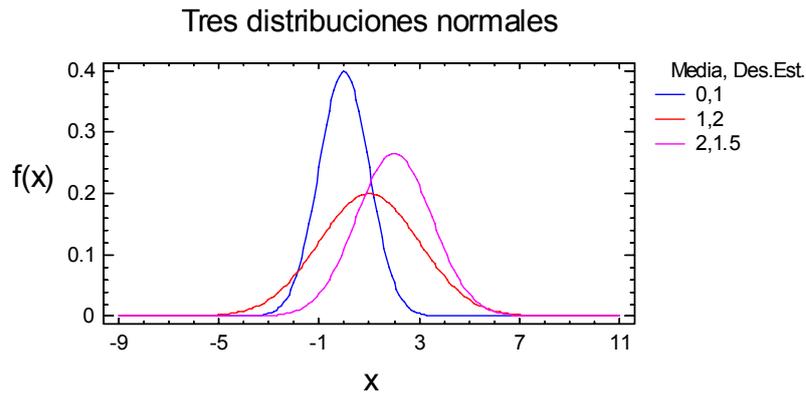


Figura 13.2. Tres miembros de la familia de la distribución normal

En efecto, la ecuación (13.1) es una función de densidad porque satisface las condiciones

$$f(x) > 0,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx = 1$; lo que indica que el área bajo la curva de la FDP es igual a 1.

$p(a < x < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx$; o sea que la probabilidad de que x se encuentre dentro del intervalo $a < x < b$ es igual al área comprendida abajo de la curva $f(x)$ y dicho intervalo como se muestra en la figura 13.1.

Si se calculan las dos primeras derivadas de (13.1) y se iguala a cero se obtiene

$x = \mu_X$ Que corresponde al valor máximo de $f(x)$, como ya se había anticipado, y

$x = \mu_X \pm \sigma_X$ Que son los puntos de inflexión de $f(x)$

La media y la varianza de esta distribución pueden calcularse a partir de las propias definiciones establecidas en el capítulo 10.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx = \mu_X \text{ y}$$

$$Var(x) = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \sigma_X^2$$

Como ya se había anticipado.

También se vio en el capítulo de los momentos que

$$\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = 3\sigma_X^4$$

13.4 La distribución Normal Estándar

Si deseamos determinar la probabilidad

$$p(x > a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx$$

Se resuelve mediante integración numérica que resulta muy tedioso y esta dificultad se allana mediante *la transformación de la distribución normal a la distribución normal estándar* a través de la variable aleatoria estandarizada **vista en la sección y del capítulo r**

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{13.2}$$

Que es exactamente la expresión contenida en el cuadrado de la FDP de X .

También vimos en dicho capítulo que la nueva FDP normal estandarizada tiene $\mu_Z = 0$ y $\sigma_Z = 1$; por lo que la función de densidad de la distribución normal estandarizada -cuya gráfica aparece en la figura 13.3- es

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)(z)^2}$$

Para la cual

$$f(z) > 0 \text{ y}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)(z)^2} dz = 1 \text{ para } -\infty < z < +\infty \tag{13.3}$$

Cabe observar que esta distribución depende solamente del valor absoluto de z puesto que para $-z$ y $+z$, z^2 tiene el mismo valor y tienen la misma densidad y mientras mayor

sea el valor de z , menor será la densidad asociada. Para esta FDP, la función de distribución acumulada o acumulativa, que se muestra en la figura 13.4, es

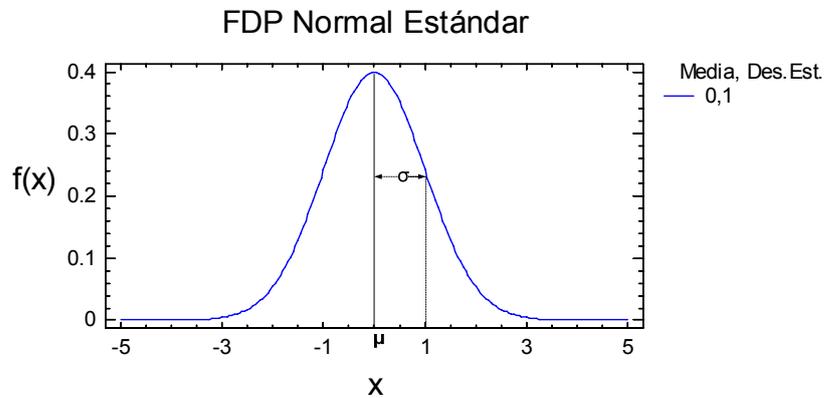


Figura 13.3. La distribución normal estándar

$$F(z) = \Phi(z) = p(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)(z)^2} dz \quad (13.4)$$

Cabe observar que $\Phi(z)$ es otra notación para la FDA, comúnmente utilizada en la bibliografía.

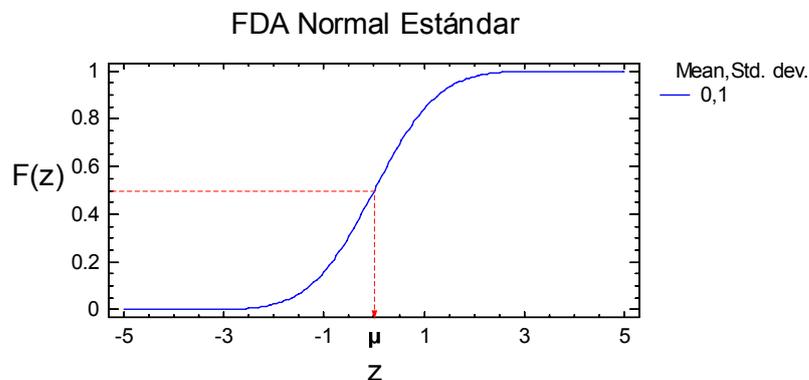


Figura 13.4. La Función de Distribución Acumulada Normal Estándar

Esta es la distribución que se encuentra en varias tablas elaboradas por matemáticos y la variable estandarizada Z , que es el único valor que se requiere para determinar $F(z)$, hace posible usar una sola tabla para cualquier distribución normal para determinar probabilidades independientemente de sus parámetros particulares como se verá más adelante.

Con esta transformación de variables de $X \rightarrow Z$, las relaciones de sus probabilidades acumuladas son

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (13.5)$$

$$p(Z \leq z) = p(X \leq \mu_x + z\sigma_x) \quad (13.6)$$

Y cuando se desea calcular probabilidades de intervalos

$$p(a \leq X \leq b) = p\left(\frac{a - \mu_x}{\sigma_x} \leq Z \leq \frac{b - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (13.7)$$

$$p(z_1 \leq Z \leq z_2) = p(\mu_x + z_1\sigma_x \leq X \leq \mu_x + z_2\sigma_x) \quad (13.8)$$

Más aún, aprovechando la simetría de la función, dichas tablas generalmente proporcionan los valores de $F(z)$ para valores positivos de Z , por lo que para los valores negativos se tiene

$$F(-z) = 1 - F(z) \quad (13.9)$$

Esta relación se muestra en la figura 13.5 en la cual, el área a la izquierda de $-a$ es la probabilidad acumulada hasta ese punto, es decir $p(Z \leq -a)$ y, por la propiedad de simetría de la función, dicha área es igual al área que vale 1 menos la probabilidad acumulada hasta a , es decir, $1 - F(a) = p(Z > a)$.

FDP Normal Estándar

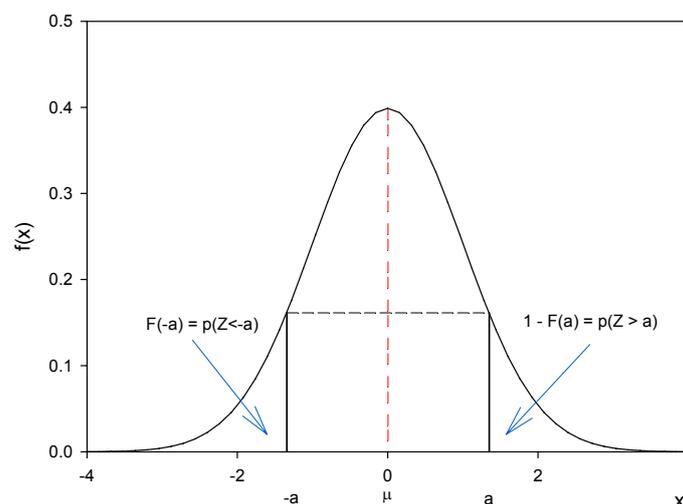


Figura 13.5. La relación entre $F(a)$ y $F(-a)$ para la FDP Normal Estándar

Por el mismo razonamiento, si se desea encontrar un valor de z para una probabilidad menor que 0.5, este puede encontrarse entrando a la tabla en sentido inverso, o sea, con la probabilidad complementaria de p y colocando el signo menos al valor de z localizado:

$$z = F^{-1}(p) = -F^{-1}(1 - p) \quad (13.10)$$

Para esta distribución, su parámetro de sesgo es

$$\alpha_3 = 0$$

Y el de curtosis o aplanamiento es

$$\alpha_4 = 3$$

Que, como ya hemos visto, son los parámetros de referencia para las demás FDP.

Ejemplo 13.1. Para utilizar la tabla de la distribución normal estándar y las relaciones ya vistas, calculemos las siguientes probabilidades

- a) $p(Z \leq 1) = F(1) = 0.8413$
- b) $p(Z \leq 1.95) = F(1.95) = 0.974$
- c) $p(Z \leq -1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
- d) $p(Z \leq -1.95) = 1 - p(Z \leq 1.95) = 0.026$
- e) $p(1 < Z \leq 1.95) = F(1.95) - F(1) = 0.974 - 0.8413 = 0.1327$
- f) $p(-1.95 < Z \leq -1) = F(-1) - F(-1.95) = 0.1587 - 0.026 = 0.1327$
- g) $p(-2 \leq Z < 0) = F(0) - F(-2) = 0.5 - [1 - F(2)] = -0.5 + 0.9773 = 0.4773$

Ejemplo 13.2. Supóngase que los registros históricos de la lluvia en la estación meteorológica de la Ciudad Universitaria hacen ver que la cantidad total de lluvia anual puede estimarse como normal con media de 120 cm y desviación estándar de 30 cm.

- a) Determinemos la probabilidad de que el próximo año la lluvia total este comprendida entre 80 y 140 cm.

Como las probabilidades las encontramos en las tablas de la distribución normal estándar, lo primero que tenemos que hacer es estandarizar los valores del intervalo. Puesto que conocemos la media y la desviación estándar, aplicando la ecuación (13.2) se tiene

$$z_1 = \frac{80-120}{30} = -1.333 \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{140-120}{30} = 0.667 \quad \text{con las cuales}$$

Y con la ecuación (13.7)

$$p(80 \leq X \leq 120) = F(140) - F(80) = F(z_2) - F(z_1) = F(0.667) - F(-1.333)$$

Aplicando la ecuación (13.9)

$$p(80 \leq X \leq 120) = F(0.667) - [1 - F(1.333)]$$

Entrando a las tablas de la FDA de la normal estándar con los valores de z se tiene

$$p(80 \leq X \leq 120) = 0.7486 - (1 - 0.9082) = 0.6568$$

- b) Siguiendo el procedimiento básico anterior, calculemos la probabilidad de que el próximo año la lluvia anual será al menos 60 cm.

$$\begin{aligned} p(X \geq 60) &= 1 - p(X < 60) = 1 - F\left(\frac{60 - 120}{30}\right) = 1 - F(-2) \\ &= 1 - [1 - F(2)] = F(2) \end{aligned}$$

Entrando a la tabla con $z = 2$, se obtiene $p(X \geq 60) = p(z \leq 2) = F(2) = 0.9772$

- c) Calculemos el percentil 15 de la lluvia anual en el recipiente de la estación meteorológica, es decir, el valor de x para el cual la probabilidad acumulada es 0.15 o 15%.

El percentil solicitado es el valor de x -en este caso lo denotamos como $x_{0.15}$ - para el cual $p(X \leq x_{0.15}) = 0.15$

$$\text{Estandarizando } p(X \leq x_{0.15}) = p\left(z \leq \frac{x_{0.15} - 120}{30}\right) = 0.15$$

Ahora debemos entrar a la tabla de manera inversa, pues se trata de encontrar el valor de z para el cual se tiene una probabilidad de 0.15, pero, observando la tabla cuidadosamente, vemos que solamente nos proporciona probabilidades para valores positivos de z a partir de cero que le corresponde una probabilidad de 0.50; por lo tanto el valor de z que buscamos es negativo y aplicando la ecuación (13.10)

$$F\left(\frac{x_{0.15} - 120}{30}\right) = 0.15$$

$$z = \frac{x_{0.15} - 120}{30} = F^{-1}(0.15) = -F^{-1}(1 - 0.15) = -F^{-1}(0.85) = -1.04$$

Despejando a $x_{0.15}$ se tiene

$$x_{0.15} = (-1.04)(30) + 120 = 88.80$$

Que es el percentil 15 de la cantidad de lluvia anual.

Ejemplo 13.3 Un puente peatonal del circuito interior de la Ciudad de México está soportado por dos columnas. Aún cuando las cargas transmitidas a las columnas pueden estimarse, las condiciones del suelo no pueden predecirse. Se considera que los asentamientos ε_1 y ε_2 son independientes y se distribuyen normalmente con medias 2 y 3 cm y coeficientes de variación 20% y 30% respectivamente.

- a) Determinemos la probabilidad de que el máximo asentamiento exceda 5 cm.

Conocidos los coeficientes de variación, podemos determinar las desviaciones estándar

$$\sigma_1 = 0.20 \times 2 = 0.40 \quad \text{y} \quad \sigma_2 = 0.30 \times 3 = 0.90$$

Con las medias y las desviaciones, la probabilidad solicitada es

$$p(\text{Máx } \varepsilon > 5) = 1 - p(\text{Máx } \varepsilon \leq 5) = 1 - p(\varepsilon_1 \leq 5 \cap \varepsilon_2 \leq 5) = 1 - p(\varepsilon_1 \leq 5)p(\varepsilon_2 \leq 5)$$

$$\begin{aligned} p(\text{Máx } \varepsilon > 5) &= 1 - F\left(\frac{5-2}{0.4}\right)F\left(\frac{5-3}{0.90}\right) = 1 - F(7.5)F(2.22) \\ &= 1 - 1 \times 0.9861 = 0.0139 \end{aligned}$$

- b) Si el asentamiento de la columna 1 es de 2 cm y el de la columna 2 es de 1 cm, el asentamiento diferencial es de 1 cm, y la probabilidad de que el asentamiento diferencial sea igual a 0.9 es cero porque para toda variable aleatoria continua las probabilidades puntuales velen cero; y la probabilidad de que el asentamiento diferencial sea menor que 0.9 también vale cero porque el asentamiento diferencial registrado es cuando menos 1.

Ejemplo 13.4 Un ingeniero mecánico responsable de la fabricación de ensamblajes automotrices, ha observado que en ciertas barras de acero el diámetro externo sigue una distribución normal con media 5.5 cm y desviación estándar 0.1 cm, esto es $N(5.5, 0.1)$. Los límites de tolerancia que permite son 5.51 ± 0.2 y si una barra sobrepasa el límite superior puede volverse a trabajar pero si está debajo de del límite inferior la barra se desperdicia; en ambos casos, afuera de estos límites, se le causa daño a la fábrica.

- a) Calculemos el porcentaje de desperdicio que se está produciendo en la fábrica.

$$p(X < 5.31) = p\left(Z < \frac{5.31 - 5.5}{0.1} = -1.9\right) = 1 - 0.9712 = 0.0288$$

Lo que indica que se está produciendo 2.88% de desperdicio.

- b) Ahora calculemos el porcentaje de barras que se deben volver a trabajar.

$$p(X > 5.71) = 1 - p(X \leq 5.71) = 1 - p\left(Z \leq \frac{5.71 - 5.5}{0.1} = 2.1\right) = 1 - 0.9821 = 0.0179$$

Lo que representa el 1.79% de las barras que necesitan re-trabajarse.

- c) El ingeniero considera que puede ajustar el proceso de manera tal la media actual coincida con el punto medio de los límites de especificación, y analizar si disminuye el porcentaje de desperdicio y re-trabajo.

Actualmente se tiene que el porcentaje que está fuera de especificaciones es 2.88% +1.79%, que es el 4.67%. Si la media cambia de 5.5 a 5.51, la probabilidad de que las barras estén dentro de las especificaciones con la media ajustada es

$$p(5.31 \leq X \leq 5.71) = p\left(\frac{5.31 - 5.51}{0.1} \leq Z \leq \frac{5.71 - 5.51}{0.1}\right) = p(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9773 - (1 - 0.9773) = 0.9546$$

Y fuera de ellas es $1 - 0.9546 = 0.0454$

Lo que significa que si se reducen las barras que no cumplen las especificaciones de 4.67% a 4.54%.

13.5 Aproximación de la Binomial a la Normal

Cuando $n \rightarrow \infty$ para una probabilidad de éxito p fija, la normal y la binomial son idénticas para cualquier intervalo. A medida que n aumenta, el ajuste entre la binomial y la normal mejora considerablemente, y, en el límite, cuando n tiende a infinito las probabilidades binomial y normal son exactamente las mismas para cualquier intervalo, lo cual sucede independientemente del valor de p .

La distribución normal es la forma límite de la binomial cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, la distribución binomial cambia su forma porque el número de éxitos aumenta al aumentar n , además el valor esperado $E[R] = np$ aumenta y $\sigma_R = \sqrt{npq}$ también aumenta para p fija.

Si se estandariza el número de éxitos

$$Z = \frac{R - np}{\sqrt{npq}}$$

Independientemente de tamaño de n , $\mu_Z = 0$ y $\sigma_Z = 1$; la probabilidad de cualquier valor de Z es igual a la probabilidad de cualquier valor de R y cualquier intervalo de valores de Z puede dar una probabilidad en la distribución binomial particular y el mismo intervalo puede dar una probabilidad en la distribución normal. Podemos entonces comparar estas dos probabilidades para cualquier intervalo; si ambas son muy similares en todos los intervalos, la distribución normal dará una buena aproximación a las probabilidades binomiales. Para hacer esta comparación, debe encontrarse que cuando n aumenta mejor será la aproximación y, en general, cuando $n \rightarrow \infty$, las probabilidades normal y binomial son idénticas para cualquier intervalo.

Si, por ejemplo, un contratista somete a concurso 5 proyectos, con probabilidades de que gane el concurso de cada proyecto o de éxito de $p = 0.5$ con independencia de todos los proyectos; la distribución del número de éxitos se comporta como una distribución binomial con $\mu_R = E[R] = 5 \times 0.5 = 2.5$ y $\sigma_R = \sqrt{5 \times 0.5 \times 0.5} = 1.12$.

Suponiendo que ésta es una distribución continua y que las probabilidades binomiales son las probabilidades asociadas con los intervalos de ancho 1 centrados en r

$$p\left(r - \frac{1}{2} \leq R \leq r + \frac{1}{2}\right)$$

Estandarizando con los valores de la media y la desviación estándar:

$$p\left(\frac{r-2.5-\frac{1}{2}}{1.12} \leq Z \leq \frac{r-2.5+\frac{1}{2}}{1.12}\right) \tag{13.11}$$

Usando esta ecuación considerando que Z es la normal estándar se pueden determinar de sus tablas las probabilidades de los intervalos y compararlas con las binomiales correspondientes -que también se encuentran en su tabla- las cuales aparecen en la tabla 1, la cual está integrada como sigue:

Tabla 1. Comparación de las probabilidades Binomiales y Normales

| r | b(n=5,p=0.5) | z ₁ | z ₂ | p(z ₁ <Z<z ₂) | b(n=5,p=0.2) | z ₁ | z ₂ | p(z ₁ <Z<z ₂) |
|---|--------------|----------------|----------------|--------------------------------------|--------------|----------------|----------------|--------------------------------------|
| 0 | 0.031 | - | - | 0.037 | 0.237 | - | - | 0.221 |
| | | 2.683 | 1.789 | | | 1.807 | 0.775 | |
| 1 | 0.156 | - | - | 0.150 | 0.396 | - | 0.258 | 0.382 |
| | | 1.789 | 0.894 | | | 0.775 | | |
| 2 | 0.313 | - | 0.000 | 0.313 | 0.264 | 0.258 | 1.291 | 0.299 |
| | | 0.894 | | | | | | |

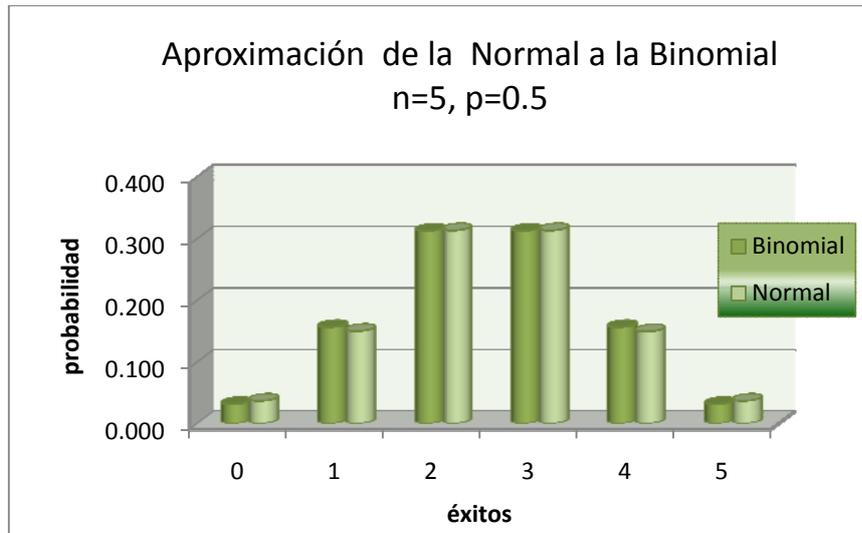
| | | | | | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | 0.313 | 0.000 | 0.894 | 0.313 | 0.088 | 1.291 | 2.324 | 0.088 |
| 4 | 0.156 | 0.894 | 1.789 | 0.149 | 0.015 | 2.324 | 3.357 | 0.010 |
| 5 | 0.031 | 1.789 | 2.683 | 0.037 | 0.001 | 3.357 | 4.389 | 0.000 |
| SUMA | 1.000 | | | 0.999 | 1.000 | | | 1.000 |
| = | | | | | | | | |

1. En la columna 1 aparece el número de éxitos.
2. En la columna 2 se muestran la probabilidades binomiales obtenidas de la tabla correspondiente.
3. La columna tres muestra los límites inferiores estandarizados para los éxitos correspondientes utilizando el lado izquierdo de la ecuación (13.11).
4. La columna cuatro muestra los límites superiores estandarizados para los éxitos correspondientes utilizando el lado derecho de la ecuación (13.11).
5. La columna 5 muestra las probabilidades asociadas a los límites anteriores con las siguientes salvedades, puesto que la distribución normal es continua y abarca de $(-\infty, +\infty)$:
 - a. Al límite inferior corresponde a $p(Z \leq -1.789)$ y no a $p(-2.683 \leq Z \leq -1.789)$
 - b. Al límite superior corresponde a $p(Z \geq 1.789)$ y no a $p(1.789 \leq Z \leq 2.683)$

La gráfica comparativa de sendas distribuciones se ilustra en la figura 13.6 (a), y debe tenerse mucho cuidado en interpretar la probabilidades normales ya que no son probabilidades de puntos -que como ya vimos valen cero- sino probabilidades de intervalos unitarios con puntos medios y guales a los éxitos de la Binomial; puesto que la normal es un distribución de una variable aleatoria continua.

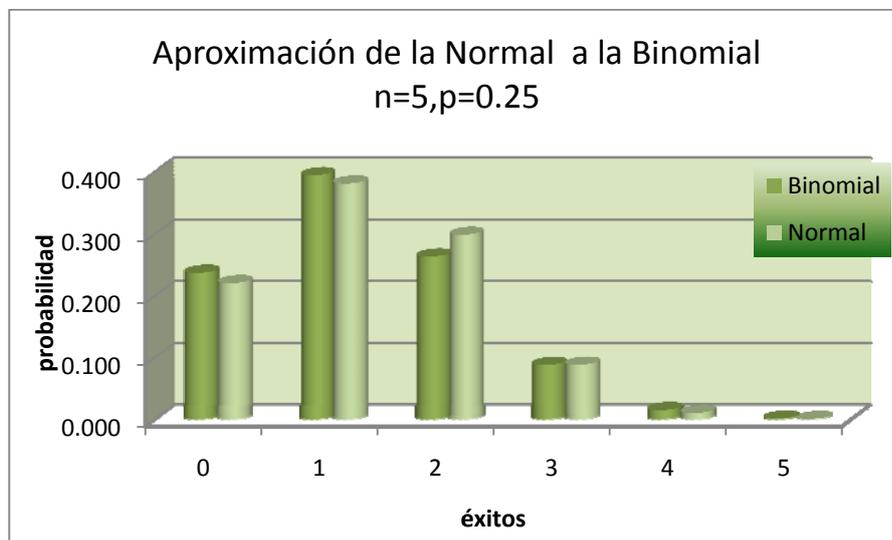
Siguiendo el procedimiento explicado arriba se han determinado las distribuciones binomial y normal para $n = 5$ y $p = 0.25$ que parecen en las columnas 6 y 9 de la tabla 1, respectivamente; y en la figura 13.6 (b).

Comparando las dos gráficas se observa que aún cuando en ambos casos la muestra es $n = 5$, la distribución normal tiene una mejor aproximación cuando $p = 0.50$ que cuando $p = 0.25$; ajuste que se mejorará significativamente cuando n aumente.



(a)

Más aún, cuando n es finito a mayor alejamiento de $p=0.5$ menor será la aproximación de la normal a la binomial y esta última estará sesgada como se ilustra en la figura 13.6 (b) para cualquier tamaño de n ; situación que no sucede con $p=0.5$ porque la distribución binomial es simétrica y mejor será la aproximación -ver figura 13.6 (a)-.



(b)

Figura 13.6. Comparaciones de las probabilidades Normales y Binomiales

Finalmente, si la distribución de las muestras es Binomial, la aproximación de la normal a la Binomial puede usarse con mayor confianza si el número esperado de éxitos - np - o de fallas - $n(1-p)$ - es igual o mayor de 10.

13.6 La teoría de la distribución normal del error

En un capítulo sobre la experimentación, los instrumentos y las escalas de medición -capítulo 4- establecimos que la medición de cualquier fenómeno se podía conceptualizar con la expresión

$$m = r + e$$

Donde m representaba el valor medido, r el valor real y e el error estadístico.

Ahora estamos en condiciones de introducir la aleatoriedad para hacer ver que el error se comporta como una distribución normal.

Consideremos que el fenómeno se mide muchas veces en las *mismas* condiciones y que el valor medido en cualquier ocasión es, de hecho la suma de las dos partes independientes:

$$M = R + E \quad (13.12)$$

Lo que indica que la medición M se compone de la parte verdadera R más una componente de error independiente y aleatorio E ; pero, visto de cerca, el error aleatorio, conocido como el error estadístico, se forma por un vasto número de influencias o factores que operan en el momento de cualquier medición, de manera independiente y cualquiera de ellos influye en la medición exclusivamente al azar; por lo tanto, si consideramos n que la componente del error está formada por n factores:

$$E = c(E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n)$$

Donde c es una constante que representa el peso del error total sobre la medición. Si la componente del error U_i es dicotómica y solo puede tomar los valores 1 si está operando en la medición o -1 si no opera, y el número de factores que operan en el momento de la medición M se visualiza como el número de éxitos S en n ensayos independientes de un proceso de Bernoulli; entonces

$$E = cS - c(n - S) = c(2S - n) \quad (13.13)$$

El valor de E queda determinado por el número de éxitos o *influencias de factores externos* en el momento de la medición M , y la probabilidad de cualquier valor de E debe ser la misma que para el correspondiente valor de S . Se recomienda en esta ocasión no confundir la notación E que le dimos al error con la del valor esperado, pues lo utilizaremos más adelante. Ahora bien, por lo visto en la sección anterior, en el caso límite. Cuando $n \rightarrow \infty$, lo que significa que existe una infinidad de factores que influyen en la medición de un fenómeno, la distribución de S -que originalmente es binomial- se aproxima a la distribución normal.

Parece razonable suponer que los componentes U_i del error aleatorio tiene la misma probabilidad de influenciar o no influenciar a la medición en el momento en que se efectúa y, bajo esta suposición, dicha probabilidad es $p = \frac{1}{2}$. Aplicando el valor operador valor esperado a (13.13) y teniendo en cuenta sus propiedades, tenemos

$$E[E] = E[c(2S - n)] = c(2E[S] - n)$$

Como $E[S] = \mu_S = np$, se tiene $E[S] = \mu_S = \frac{1}{2} n$; con lo cual

$$E[E] = c \left(2 \frac{1}{2} n - n \right) = 0$$

Lo que indica que en el largo plazo, al efectuar la misma medición recurrentemente, todos los errores se cancelan y aplicando nuevamente el operador valor esperado a la ecuación (13.12) se tiene que

$$E[M] = E[R + E] = E[R] + E[E] = E[R] = R$$

El valor esperado de la medición del fenómeno bajo observación, en el largo plazo, es igual al verdadero valor de R .

Esta breve introducción al análisis probabilístico de los errores, que muestra como pueden operar, no implica que ellos siempre se comporten de manera aditiva como aquí lo vimos; será de mucha utilidad cuando estudiemos la estadística inferencial y, particularmente, el diseño estadístico de experimentos.

13.7 La distribución logarítmica normal o Log-normal

Cuando la distribución de una variable aleatoria estrictamente positiva, como sucede por ejemplo con la intensidad de la lluvia, los pesos de ciertos artículos, el ingreso obtenido, el tiempo de duración de un proyecto, la cantidad de sólidos en suspensión, etc.; la distribución Log-Normal, es útil para analizar para estos casos por su facilidad para calcular sus probabilidad.

Una variable aleatoria X tiene una distribución logarítmica normal o Log-Normal si el logaritmo natural de X $-\ln X-$ es normal, por lo cual, debido a las propiedades de los logaritmos, esta distribución está definida solamente para valores positivos de X como se ilustra en la figura 13.7 para varios miembros de esta familia en la que se observa que, en lo general NO es una distribución simétrica sino sesgada positivamente.

Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi x}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\lambda}{\xi}\right)^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty \quad (13.14)$$

Donde, para el $\ln X$

$$\text{La media de la distribución es } \lambda = E[\ln X] \quad (13.15)$$

La desviación estándar es $\xi = \sqrt{Var[\ln X]}$ (13.16)

Son los parámetros generales y particulares de la distribución Log-Normal.

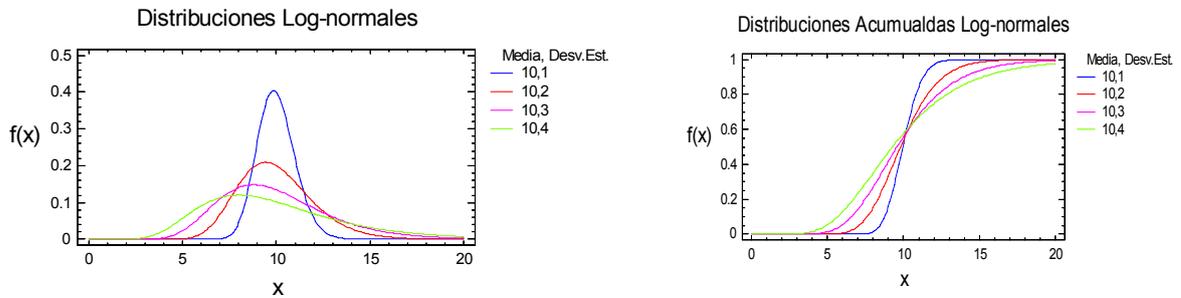


Figura 13.7 FDP's y FDA's Log-Normales

Como la relación de la Log-Normal con la distribución Normal involucra la transformación logarítmica $Y = \ln X$, sus probabilidades pueden determinarse usando la tabla de la distribución Normal Estándar.

Como la probabilidad de que X tome valores en el intervalo $(a,b]$ es

$$p(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi x} e^{(-\frac{1}{2})(\frac{x-\lambda}{\xi})^2} dx \quad (13.17)$$

Si la VA estandarizada es

$Z = \frac{X-\lambda}{\xi}$, se tiene que $dx = \xi dz$ y al sustituirlos en la expresión anterior se tiene

$$p(a < X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln a - \lambda}{\xi}}^{\frac{\ln b - \lambda}{\xi}} e^{(-\frac{1}{2})(z)^2} \xi dz = F\left(\frac{\ln b - \lambda}{\xi}\right) - F\left(\frac{\ln a - \lambda}{\xi}\right) \quad (13.18)$$

Los parámetros λ y ξ de la Log-Normal LN (λ, ξ) se relacionan con los de la distribución Normal $N(\mu, \sigma)$, mediante las ecuaciones

$$\lambda = \ln \mu - \frac{1}{2}\xi^2 \quad (13.19)$$

Y

$$\xi^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) = \ln(1 + \delta^2) \quad (13.20)$$

Donde δ es el coeficiente de variación de X como ya se vio en la sección 8.8.4, si δ es del orden de 0.30 o menor, entonces la desviación estándar puede aproximarse a

$$\xi \approx \delta = \frac{\sigma}{\mu} \quad (13.20.a)$$

Frecuentemente la mediana μ_m o x_m frecuentemente se usa en esta distribución para designar al valor central y su expresión es

$$p(X \leq x_m) = F\left(\frac{\ln x_m - \lambda}{\xi}\right) = 0.5 \text{ de donde}$$

$$\frac{\ln x_m - \lambda}{\xi} = F^{-1}(0.5) = 0$$

Despejando a x_m se obtiene

$$x_m = e^\lambda \Rightarrow \lambda = \ln x_m$$

La moda de esta distribución es $\mu_{mo} = e^{\lambda - \xi^2}$

Los valores empíricos de la FDA se dibujan sobre papel de probabilidad log-normal donde X tiene escala normal y $\ln X$ escala logarítmica; entonces, si X tiene distribución Log-Normal se debe obtener una línea recta aproximada en la cual ξ -la desviación estándar- puede estimarse por el recíproco de la pendiente y λ -la media- puede aproximarse con el valor de la abscisa correspondiente al valor de la FDA igual a 0.5, que corresponde a la mediana.

La relación entre la media y la mediana de la Log-Normal es

$$x_m = \frac{\mu}{\sqrt{1+\delta^2}} \tag{13.21}$$

$$\lambda = \ln \frac{\mu}{\sqrt{1+\delta^2}} \tag{13.22}$$

Lo que indica que para esta distribución la mediana es menor que la media, lo que se atestigua porque es sesgada a la derecha como se señaló **en la sección 8.8.?**.

Como se observa en la figura 13.7, la distribución Log-Normal es muy similar a la Normal para pequeños valores de la desviación estándar ξ y puede usarse como sustituto de la otra siempre y cuando X tenga valores estrictamente positivos.

Usando el hecho de que

$$X^s = e^{s \ln X}$$

Se puede demostrar que el momento de orden s es

$$\mu'_s = e^{(s\lambda + \frac{\xi^2 s^2}{2})}$$

Con la cual se pueden encontrar los parámetros

$$\mu_X = E[X] = e^{(\lambda + \frac{\xi^2}{2})} \quad (13.23)$$

$$Var[X] = \sigma_X^2 = e^{2\lambda + \xi^2} (e^{\xi^2} - 1) \quad (13.24)$$

$$\alpha_3(X) = (e^{\xi^2} - 1)^{\frac{1}{2}} (e^{\xi^2} + 2) \quad (13.25)$$

$$\alpha_4(X) = e^{4\xi^2} + 2e^{3\xi^2} + 3e^{2\xi^2} - 3 \quad (13.26)$$

Cabe observar que los parámetros de sesgo y curtosis dependen solamente de la varianza de la distribución Log-Normal ξ^2 y no de la media λ .

Ejemplo 13.5 Con relación a los registros históricos de la lluvia en la estación meteorológica de la Ciudad Universitaria del ejemplo 13.2, si se supone que la cantidad total de lluvia anual se distribuye conforme una distribución Log-Normal con la misma media de 120 cm y desviación estándar de 30 cm; para resolver los incisos del ejemplo, lo primero que se hace es calcular los parámetros.

Conforme a (13.20.a), la desviación estándar es

$$\xi = \delta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{30}{120} = 0.25$$

De la ecuación (13.19) la media es

$$\lambda = \ln 120 - \frac{1}{2}(0.25)^2 = 4.756$$

- a) Aplicando (13.18), la probabilidad de que el próximo año la lluvia total este comprendida entre 80 y 140 cm.

$$\begin{aligned} p(80 < X \leq 140) &= F\left(\frac{\ln 140 - 4.756}{0.25}\right) - F\left(\frac{\ln 80 - 4.756}{0.25}\right) = F(0.74) - F(-1.50) \\ &= 0.7704 - 0.0668 = 0.7036 \end{aligned}$$

- b) Calculemos la probabilidad de que el próximo año la lluvia anual será el menos 60 cm.

$$\begin{aligned} p(X \geq 60) &= 1 - p(X < 60) = 1 - F\left(\frac{\ln 60 - 4.756}{0.25}\right) = 1 - F(-2.65) \\ &= 1 - [1 - F(2.65)] = F(2.65) = 0.9960 \end{aligned}$$

- c) Calculemos el percentil 15 de la lluvia anual en el recipiente de la estación meteorológica, es decir, el valor de x para el cual la probabilidad acumulada es 0.15 o 15%.

El percentil solicitado es el valor de x -en este caso lo denotamos como $x_{0.15}$ - para el cual $p(X \leq x_{0.15}) = 0.15$

$$\text{Estandarizando } p(X \leq x_{0.15}) = p\left(z \leq \frac{\ln x_{0.15} - 4.756}{0.25}\right) = 0.15$$

Entrando a la tabla de la normal estandarizada de manera inversa, y aplicando la **ecuación (13.10)**

$$F\left(\frac{\ln x_{0.15} - 4.756}{0.25}\right) = 0.15$$

$$z = \frac{\ln x_{0.15} - 4.756}{0.25} = F^{-1}(0.15) = -F^{-1}(1 - 0.15) = -F^{-1}(0.85) = -1.04$$

Despejando a $\ln x_{0.15}$ se tiene

$$\ln x_{0.15} = (-1.04)(0.25) + 4.756 = 4.496; \text{ de donde } x_{0.15} = e^{4.496} = 89.66$$

Que es el percentil 15 de la cantidad de lluvia anual. **Lo que significa que**

- d) Aplicando la **ecuación (13.21)** obtenemos la mediana

$$x_m = \frac{120}{\sqrt{1+0.25^2}} = 116.42$$

Como ya se había dicho, la mediana es menor que a media.

- e) La moda es

$$\mu_{mo} = e^{4.756-0.25^2} = 109.235$$

- f) La varianza de la distribución log-Normal vale

$$\xi^2 = 0.25^2 = 0.0625$$

- g) El coeficiente de variación ya lo calculamos y es igual a

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{30}{120} = 0.25$$

- h) Aplicando la **ecuación (13.25)** el coeficiente de sesgo es

$$\alpha_3(X) = (e^{0.0625} - 1)^{\frac{1}{2}}(e^{0.0625} + 2) = 0.254 \times 2.0625 = 0.524$$

Como era de esperarse, en lo general, esta distribución tiene sesgo positivo –el signo es positivo-, y para los parámetro de esta distribución, el sesgo es ligero.

i) El parámetro de curtosis o aplanamiento de la distribución, conforme a la ecuación (13.26) es

$$\alpha_4(X) = e^{4(0.0625)} + 2e^{3(0.0625)} + 3e^{2(0.0625)} - 3 = 4.1$$

Lo que indica que este parámetro de curtosis es que la distribución Log-Normal, para estos parámetros, es más alta que la distribución de referencia que es la normal estándar, como se muestra en la figura 13.8.

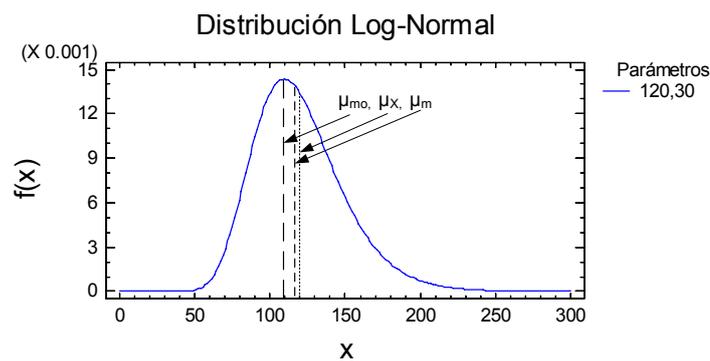


Figura 13.8 Distribución Log-Normal que muestra los parámetros de tendencia central

13.8 La distribución Uniforme o Rectangular

Esta distribución se vio en el ejemplo 1 del capítulo 10 y ahora la estudiaremos de manera más formal. Ella se utiliza en la estadística aplicada cuando cualquier valor de la variable es igualmente probable o bien si en pequeños rangos de valores de la variable aleatoria se aproxima a una distribución continua; por ejemplo, si la VA X se distribuye conforme a $N(\mu, \sigma)$ pero si el interés primario está centrado en el rango $\mu - \sigma/3 \leq X \leq \mu + \sigma/3$, entonces la distribución rectangular es muy buena aproximación para ciertos propósitos.

Esta distribución se define por

$$f(x) = (\beta - \alpha)^{-1} = \tau \quad \text{para } \alpha \leq X \leq \beta \tag{13.27}$$

Donde α y β son los parámetros particulares de la familia, τ es una constante y la probabilidad de que X esté dentro de cualquier rango de valores $[\alpha, \beta]$ es igual a la probabilidad de que caiga en cualquier otro rango del mismo ancho. Esto es, si $b + a = d - c$ y a, b, c, d están comprendidos en el rango $[\alpha, \beta]$. entonces

$$p(a \leq X \leq b) = p(c \leq X \leq d)$$

Como $f(x) \geq 0$ también $\theta \geq 0$ y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ se tiene que } \tau \int_{-\infty}^{\infty} dx = \tau \int_{\alpha}^{\beta} dx = \tau (\beta - \alpha) = 1 \text{ de donde}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Y, la FDP de la distribución uniforme sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ donde $\alpha < \beta$ es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{para } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \tag{13.28}$$

La FDA de esta distribución es

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases} \tag{13.29}$$

Las gráficas de sendas distribuciones para el ejemplo 1 del capítulo 10 se muestran en la figura 13.9.

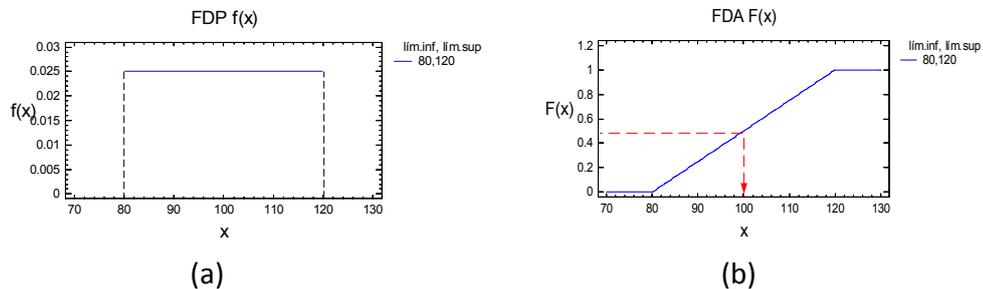


Figura 13.9 Funciones de densidad y de distribución acumulada rectangulares

La media de esta distribución es

$$\mu_X = E[X] = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_a^\beta dx = \frac{\beta + \alpha}{2} \quad (13.30)$$

Puede demostrarse que la varianza es

$$\sigma_X^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad (13.31)$$

El parámetro de sesgo es $\alpha_3 = 0$ como era de esperarse ya que la distribución es simétrica.

El parámetro de curtosis es $\alpha_4 = \frac{9}{5}$, lo que indica es más chaparra que la normal estándar, para la cual $\alpha_4 = 3$.

Otra forma más común de (13.27) es

$$f(x) = (\theta)^{-1} \quad \text{para } -\frac{\theta}{2} \leq X \leq \frac{\theta}{2} \quad \text{y } \theta > 0 \quad (13.32)$$

Obsérvese que $\theta = \beta - \alpha$ con $y = (x - \alpha)/\theta$.

Los momentos centrales de esta distribución son

$$\mu_r = \mu'_r = \theta^{-1} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} x^r dx \text{ con lo cual}$$

$$\mu_r = 0 \text{ si } r \text{ es impar y } \mu_r = \frac{\theta^r}{(r+1)2^r} \text{ si } r \text{ es par}$$

Ejemplo 13.6. La figura 13.10 muestra las funciones de densidad de probabilidad y la de distribución acumulativa del tiempo de vida -t en hr- de las lámparas fluorescentes. Puesto que el área de la FDP es igual a 1, la función de densidad es

$$a) \text{ Área} = \text{base} \times f(t) = (120 - 80) \times f(t) = 1$$

$$f(t) = \begin{cases} 0.025 & \text{para } 80 \leq t \leq 120 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

b) La probabilidad de que una lámpara sea menor que 100 hr es

$$p(T < 100) = \int_{80}^{100} (0.025) dt = 0.025(100 - 80) = 0.50$$

Que, como era de esperarse, es la mitad del área.

c) Para determinar el coeficiente de variación necesitamos calcular la media y la desviación estándar.

- i. Aplicando (13.30), la media es $\mu_T = E[T] = \frac{120+80}{2} = 100$. Si se observa, la media es el punto medio del intervalo de T y la probabilidad calculada arriba es 0.50.
- ii. Aplicando (13.31), la varianza es $\sigma_T^2 = \frac{(120-80)^2}{12} = 133.33$ y la desviación estándar es $\sigma = 11.55$; por lo que el coeficiente de variación vale $\delta = \frac{11.55}{100} = 0.1155$

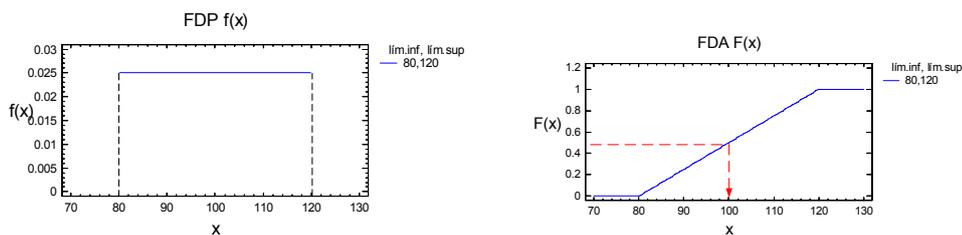


Figura 13.10 FDP y FDA del ejemplo 13.6

d) Calculemos la probabilidad de que el tiempo de vida de una lámpara esté comprendido dentro de una desviación estándar, en valor absoluto, a partir de la media.

$$p(100 - 11.55 \leq t \leq 100 + 11.55) = p(88.45 \leq t \leq 111.55) = 0.5775$$

e) Ahora, la probabilidad de que el tiempo de vida de una lámpara esté comprendido dentro de dos desviaciones estándar, en valor absoluto, a partir de la media.

$$p(100 - 2 \times 11.55 \leq t \leq 100 + 2 \times 11.55) = p(76.91 \leq t \leq 123.09) = 1.00$$

f) Como se vio arriba, el parámetro de sesgo es $\alpha_3 = 0$ puesto que la distribución es simétrica respecto a su media; y el parámetro de curtosis es $\alpha_4 = \frac{9}{5}$, lo que indica es más aplanada que la normal estándar.

Del ejemplo anterior se desprenden algunas consideraciones.

- Se insiste en que para las variables aleatorias continuas, se habla de probabilidades de intervalos y no de valores puntuales, puesto que el área bajo la curva en un punto vale cero, las probabilidades de variables continuas en un punto vales cero; esto es $p(X = x) = 0$.
- Por esta consideración, $p(X < x) = p(X \leq x)$.

- Una regla práctica que se desprende del cálculo de la probabilidad de que la variable aleatoria esté comprendida dentro de una desviación estándar de la media, en valor absoluto, es que cerca del 68% de los casos que se analizan en la estadística caen en dicho intervalo, como se verá posteriormente.
- En el caso particular del ejemplo, para cuando la variable aleatoria está comprendida dentro de 2 desviaciones estándar fue 1, porque el intervalo [76.91,123.09] incluye todos los posibles valores de T , situación que, en lo general, es ligeramente menor que 1 y significa que en la estadística poco más del 99% de los casos caen dentro de dicho intervalo.

13.9 La distribución Exponencial

Esta distribución es aplicable a problemas de pruebas de vida de los artículos, al tiempo entre arribos de los éxitos de la distribución de Poisson y otros problemas estadísticos y de confiabilidad; aunque no es la única manera, derivaremos su FDP a partir de la distribución de Poisson.

Recordemos que el parámetro de la familia de las distribuciones de Poisson es λ -la intensidad del proceso. En lugar del número de ocurrencias en un periodo de tiempo dado, ahora nos interesa la cantidad de tiempo transcurrido hasta la primera ocurrencia, por ejemplo el tiempo transcurrido hasta que falla un componente electrónico determinado de un circuito o hasta que llega un cliente a la ventanilla del banco; como el proceso de Poisson es independiente y estacionario, es equivalente a decir que estamos interesados en la cantidad de tiempo transcurrido entre ocurrencias de fallas o entre llegadas de los clientes.

En este caso, la variable aleatoria es T que representa el tiempo transcurrido hasta la primera ocurrencia del evento A donde las ocurrencias de este evento siguen el proceso de Poisson con intensidad λ por unidad de tiempo. Sobra decir que tanto λ como T deben tener las mismas unidades; y si la intensidad por unidad de tiempo es λ , la intensidad en T unidades de tiempo es λT .

Recordando que la FDP de Poisson es

$$p(R|\lambda t) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!} \quad \text{para } r = 0,1,2,3 \dots \quad (13.33)$$

Si T es el tiempo transcurrido hasta la primera ocurrencia y consideramos el evento $T > t$ no debe haber un éxito en las t unidades de tiempo, y la probabilidad de este evento es -de (13.33)-

$$p(T > t) = p(R = 0|\lambda t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t} \quad (13.34)$$

Así,

$$p(T > t) = p(R = 0|\lambda t) = e^{-\lambda t} \text{ y}$$

$$p(T \leq t) = 1 - p(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Que es la FDA de la variable T . Más formalmente,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (13.35)$$

Y la FDP de la distribución exponencial es

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad (13.36)$$

Esta es la FDP exponencial que modela la cantidad de tiempo transcurrido hasta la primera ocurrencia generada por un proceso de Poisson, o bien es la distribución del tiempo transcurrido entre ocurrencias de un evento. La representación gráfica de estas funciones aparece en la figura 13.10.

La relación que existe entre las distribución exponencial y de Poisson es similar a la que se tiene con la geométrica y la binomial; las de Poisson y binomial modelan el número de ocurrencias de un evento, mientras la exponencial y la geométrica modelan el tiempo transcurrido y el número de ensayos hasta la primera ocurrencia, respectivamente.

Se usará la función generadora de momentos para determinar los parámetros generales de esta distribución.

$$m_T(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = 1 + \frac{s}{\lambda} + \frac{s^2}{\lambda^2} + \frac{s^3}{\lambda^3} + \dots$$

Calculando las primeras r derivadas y evaluándolas en $s = 0$ se obtiene

$$\mu'_r = \frac{r!}{\lambda^r}$$

Con la cual:

$$\mu_T = \frac{1}{\lambda} \quad (13.37)$$

$$Var[T] = \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (13.38)$$

El parámetro de sesgo es $\alpha_3 = 2$ como era de esperarse ya que la distribución es sesgada positivamente.

El parámetro de curtosis es $\alpha_4 = 9$, lo que indica es mucho más picuda que la normal estándar, para la cual $\alpha_4 = 3$.

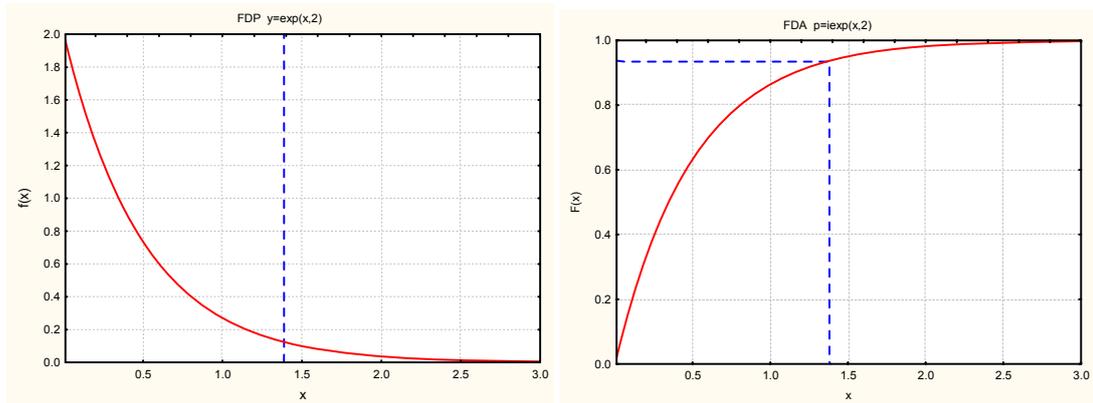


Figura 13.10. La FDP y la FDA de la distribución exponencial

Ejemplo 13.7 Supongamos que los registros históricos de los sismos fuertes, mayores que 6 grados Richter, que ocurren en la Ciudad de México, señalan que durante el periodo de 1850 a 2000 hubo 30 de ellos. Si se considera que el arribo de los sismos se comporta como un proceso de Poisson.

- a) Calculemos la probabilidad de que un sismo de esta magnitud ocurra durante el siguiente quinquenio.

La intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = \frac{30}{150} = 0.20$

Con la cual, aplicando (13.35) se tiene

$$p(T \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-0.20 \times 5} = 0.6321$$

- b) La probabilidad de que no haya sismos de esta magnitud fuerte durante la siguiente década es, aplicando (13.34)

$p(T > t) = p(R = 0 | \lambda t) = 0.20 \times e^{-0.20 \times 10} = 0.1353$, que es una baja probabilidad.

- c) El periodo de retorno de un sismo de la magnitud señalada es el tiempo medio de ocurrencia -ecuación (13.37)- $\mu_T = \frac{1}{0.20} = 5$. Lo que significa que asumiendo que se generan mediante un proceso de Poisson, un sismo fuerte de magnitud mayor que 6 grados Richter puede esperarse en la Ciudad de México, en promedio, cada 5 años.

- d) La probabilidad de que ocurra un sismo de la magnitud señalada dentro del periodo de retorno es, para este caso particular $p(T \leq 5) = 0.6321$, que corresponde al que se calculó en el inciso a), y para un proceso de Poisson esta probabilidad siempre es la misma puesto que

$$p(T \leq \mu_T) = F(\mu_T) = 1 - e^{-\lambda \times \frac{1}{\lambda}} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

Comparando el periodo de retorno del proceso de Poisson con el de Bernoulli $\frac{1}{p}$ para eventos con baja intensidad del proceso λ se tiene que $\frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{p}$.

13.10 La distribución Exponencial Desplazada

En ocasiones, la FDP de la distribución exponencial no inicia en el origen como en el caso anterior, sino en cualquier otro valor a , en cuyo caso, aplicando la transformación $T = X - a$ se obtiene una nueva distribución exponencial conocida como la exponencial desplazada, cuya FDA es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-a)} & \text{para } x \geq a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (13.39)$$

Y su FDP de es

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & \text{para } x \geq a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases} \quad (13.40)$$

Para la cual

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} + a \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (13.41)$$

13.11 La distribución Gamma o de Erlang

Si las ocurrencias se generan conforme un proceso de Poisson, entonces el tiempo T_r , que es el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia r se puede modelar con la FDP Gamma.

En términos de las ocurrencias o éxitos, el evento $T_r \leq t$ implica que r o más éxitos ocurren en el periodo de tiempo t y según el proceso de Poisson

$$F_{T_r}(t) = \sum_{x=r}^{\infty} p(X_t = x) = 1 - \sum_{x=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (13.42)$$

Obsérvese que en $T_r > t$ hay a lo más $r - 1$ éxitos que ocurren durante el periodo de tiempo t .

La FDP es entonces

$$f_{T_r}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (13.43)$$

La media y la varianza son

$$\mu_{T_r} = \frac{r}{\lambda} \quad (13.44)$$

$$Var[T_r] = \sigma_{T_r}^2 = \frac{r}{\lambda^2} \quad (13.45)$$

Esta función con r entero se conoce como la Distribución de Erlang.

Observe que esta distribución es el caso general de la distribución exponencial, pues si $r = 1$ se obtiene la FDP, la media y la varianza de esta distribución, como se observa en la figura 13.11.

La FDP Gamma generalizada es

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-x/\beta} \quad \text{para } x > 0 \quad (13.46)$$

Para la cual la función generadora de momentos es

$$m_X(s) = (1 - \beta s)^{-(\alpha+1)} \quad \text{para } 0 \leq s < \frac{1}{\beta} \quad (13.47)$$

Y los momentos respecto al origen son

$$\mu'_r = \frac{\beta^r \Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (13.48)$$

Con la cual

$$\mu_X = \beta(\alpha + 1) \quad (13.49)$$

$$\sigma_X^2 = \beta^2(\alpha + 1) \quad (13.50)$$

Como $\mu_3 = 2\beta^3(\alpha + 1)$ y $\mu_4 = 3\beta^4(\alpha + 1)(\alpha + 3)$; los parámetros de sesgo y curtosis son

$$\alpha_3 = 2(\alpha + 1)^{-1/2} \quad (13.51)$$

$$\alpha_4 = \frac{3(\alpha+3)}{\alpha+1} \quad (13.52)$$

La distribución Gamma y la Exponencial, que se relacionan con un proceso de Poisson, son las análogas continuas de las distribuciones discretas Binomial negativa y la geométrica, que se vinculan con un proceso de Bernoulli; respectivamente.

FDP Gamma para varias ocurrencias e igual intensidad

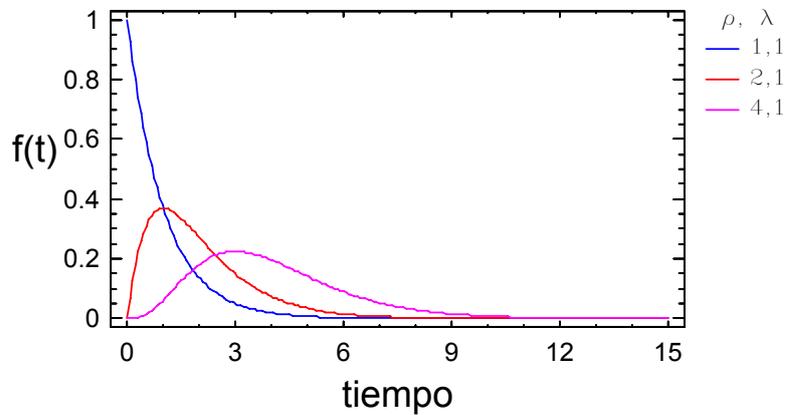


Figura 13.11. La función de densidad de probabilidad Gamma

Ejemplo 13.8 Con relación al ejemplo 7, cuya intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = 0.20$ aplicando la ecuación (13.43) se tienen las siguientes funciones de densidad descritas por la distribución Gamma:

El tiempo de arribo para el primer sismo es $f_{T_1}(t) = 0.20e^{-0.20t}$ que corresponde al valor particular de la FDP exponencial –ecuación (13.36)-.

El tiempo de arribo para el segundo sismo es

$$f_{T_2}(t) = 0.20(0.20t)e^{-0.20t} = 0.04te^{-0.20t}$$

Con la cual se pueden calcular probabilidades del tiempo hasta la segunda ocurrencia, tales como

$$P(5 \leq T_2 \leq 10) = \int_5^{10} 0.04te^{-0.20t} dt = 0.33$$

El tiempo de arribo para el cuarto sismo es

$$f_{T_4}(t) = \frac{0.20(0.20t)^{4-1}e^{-0.20t}}{(4-1)!} = 0.0003t^3e^{-0.20t}$$

Para esta FDP su media es $\mu_{T_4} = \frac{4}{0.20} = 20$,

La varianza es $\sigma_{T_4}^2 = \frac{4}{0.20^2} = 100$

El coeficiente de variación es $\delta_{T_4} = \frac{10}{20} = 0.50$

13.12 La distribución de Weibull

Esta distribución es particularmente útil en pruebas de vida de artículos y en confiabilidad, tiene tres parámetros particulares para distinguir a los miembros de la familia. El modelo de la FDP de esta distribución de Weibull es

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \quad \text{para } x \geq a, b > 0, c > 0 \quad (13.53)$$

La FDA de esta distribución es

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

Esta distribución es otra forma general de la distribución exponencial cuando $c = 1$, y como $(X - a)^c$ tiene FDP exponencial, la media es

$$\mu_T = b^c \quad (13.54)$$

$$Var[T] = \sigma_T^2 = b^{2c} \quad (13.55)$$

13.13 La Distribución χ_v^2 , Ji-Cuadrada o Chi-Cuadrada

Como se anticipó, la distribución normal es una distribución madre porque a partir de ella nacen otras distribuciones como es el caso de la distribución Ji-Cuadrada. Ésta distribución, la Normal, la t y la distribución F son de amplia utilización en los métodos estadísticos porque modelan fielmente el comportamiento de varios estadísticos como se verá en el capítulo de las distribuciones muestrales y se utilizan ampliamente en las pruebas de significancia, la determinación de intervalos de confianza, tablas de contingencia y pruebas de bondad de ajuste de las distribuciones de frecuencia a las distribuciones teóricas. Muchos libros incluyen estas distribuciones en la parte de la estadística; sin embargo, consideramos que al ser distribuciones de probabilidad, deben estudiarse como tales en esta parte de la teoría de la probabilidad. En esta sección de la teoría de la probabilidad analizaremos formalmente las distribuciones Ji-Cuadrada, t de Student y F de Fisher, y posteriormente, en la parte de la estadística, con base en ellas, veremos sus bastas aplicaciones.

Sea X_1 una VA que se distribuye $X_1 \approx N(\mu, \sigma)$, si se estandariza se tiene $Z_1 \approx N(0,1)$ y si se eleva al cuadrado se obtiene una nueva variable Z_1^2 que no se distribuye normalmente puesto que si X_1 está contenida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, Z_1^2 varía en el rango de $0 \leq Z_1^2 < \infty$ y se llama $\chi_{v=1}^2$; continuemos esta operación hasta sumar n variables.

$$X_1 \simeq N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z_1 \simeq N(0,1) \Rightarrow Z_1^2 = \chi_{v=1}^2$$

$$X_1 \simeq N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z_1 \simeq N(0,1) \Rightarrow Z_1^2 = \chi_{v=1}^2$$

$$X_2 \simeq N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z_2 \simeq N(0,1) \Rightarrow Z_2^2 + Z_1^2 = \chi_{v=2}^2$$

$$X_3 \simeq N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z_3 \simeq N(0,1) \Rightarrow Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2 = \chi_{v=3}^2$$

.....

$$X_n \simeq N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z_n \simeq N(0,1) \Rightarrow Z_n^2 + \dots + Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2 = \chi_{v=n}^2$$

$$\chi_{v=n}^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \tag{13.56}$$

O sea que la variable aleatoria $\chi_{v=n}^2$ se define como la suma de n variables aleatorias estandarizadas al cuadrado con $v = n$ grados de libertad. En este punto el concepto de grados de libertad es solamente el número de variables aleatorias estandarizadas al cuadrado Z_i^2 $i = 1,2,3, \dots, n$, y la interpretación práctica se verá en la estadística. La función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria, cuya representación gráfica se muestra en la figura 13.12 para varios g de l, es

$$f(\chi_v^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} (\chi_v^2)^{\frac{1}{2}v-1} e^{-\frac{\chi_v^2}{2}} \quad \text{para } \chi_v^2 \geq 0 \tag{13.57}$$

Esta distribución es un caso particular de la distribución Gamma generalizada -ecuación (13.46)-para $\alpha = \frac{1}{2}v - 1$ y $\beta = 2$, por lo cual posemos derivar los parámetros generales sustituyendo estos valores en las ecuaciones (13.47) a (13.52) se obtiene la función generadora de momentos

$$m_{\chi_v^2}(s) = (1 - 2s)^{-\frac{1}{2}v} \tag{13.58}$$

Con la cual

$$\mu_x = 2 \left(\frac{1}{2}v - 1 + 1 \right) = v \tag{13.59}$$

$$\sigma_x^2 = 2^2 \left(\frac{1}{2}v - 1 + 1 \right) = 2v \tag{13.60}$$

Como $\mu_3 = 2(2)^3 \left(\frac{1}{2}v - 1 + 1 \right) = 8v$ y $\mu_4 = (24v) \left(\frac{1}{2}v + 2 \right)$; los parámetros de sesgo y curtosis son

$$\alpha_3 = 2 \left(\frac{1}{2}v \right)^{-1/2} \tag{13.61}$$

$$\alpha_4 = \frac{3(\frac{1}{2}v+2)}{\frac{1}{2}v} = 3 + \frac{12}{v} \tag{13.62}$$

Como se observa, esta familia depende del único parámetro v al que se llama grados de libertad (g. de l.), más adelante veremos que se relaciona con el número de cantidades independientes que permanecen después de estimar un parámetro; y se ha considerado que es un número positivo y entero como puede verse en la figura 13.12 para varios g. de l.; no obstante, la FDP (13.53) puede utilizarse para valores de v positivos y no necesariamente enteros.

Más aún, de las ecuaciones (13.58) y (13.59) se desprende es esta distribución es sesgada positivamente y su curtosis es mayor que la de la Normal estándar; no obstante, cuando $v \rightarrow \infty$ el sesgo $\alpha_3 \rightarrow 0$ y la curtosis $\alpha_4 \rightarrow 3$ lo que significa que la FDP $f(\chi_v^2) \rightarrow N(0,3)$ que es la distribución Normal estándar de referencia. En la práctica se puede considerar que si $\chi_v^2 \geq 30$ su puede aproximar a la normal estándar con

$$Z = \frac{\chi_v^2 - v}{\sqrt{2v}} \tag{13.63}$$

Las tablas de esta distribución nos dan los valores de los fractiles para v y $F(\chi_v^2)$ dadas.

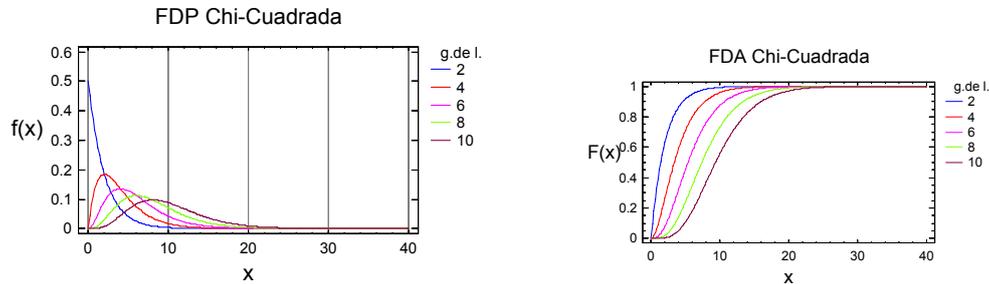


Figura 13.12. La función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria χ_v^2 con varios g de l.

Ejemplo 13.9 Denotando a χ_v^2 como $\chi_{v,\alpha}^2$ donde el primer subíndice corresponde a los grados de libertad $-v-$ y el segundo $-\alpha-$ a la probabilidad acumulada $F(\chi_v^2)$ que, como se verá en la parte de estadística se conoce como el nivel de significación estadística; los siguientes fractiles pueden obtenerse directamente de la tabla de la distribución Chi-Cuadrada correspondiente.

$$\chi_{v=10,\alpha=.05}^2 = 3.940; \chi_{v=10,\alpha=.95}^2 = 18.31; \chi_{v=5,\alpha=.05}^2 = 1.145; \chi_{v=5,\alpha=.95}^2 = 11.07$$

13.13.1 Propiedad de adición de la variable aleatoria χ_v^2

Sea $\chi_{v_1}^2$ una variable aleatoria con v_1 grados de libertad, es decir, según su definición $\chi_{v_1}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} Z_i^2$ y $\chi_{v_2}^2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} Z_i^2$ son variables mutuamente independientes y

$\chi_{v_1}^2 + \chi_{v_2}^2 = \chi_{v_1+v_2}^2$ es una nueva variable aleatoria $\chi_{v_1+v_2}^2$; es decir que la suma de dos variables mutuamente independientes $\chi_{v_1}^2$ y $\chi_{v_2}^2$ se distribuye conforme una variable $\chi_{v_1+v_2}^2$ cuya suma de grados de libertad es igual a la suma de los g de l de las variables independientes.

Ejemplo 13.10 Si $\chi_{v_1=5}^2$ y $\chi_{v_2=15}^2$, por la propiedad aditiva se tiene $\chi_{v_1=5}^2 + \chi_{v_2=15}^2 = \chi_{v_3=20}^2$.

13.14 Distribución T o t de Student

Esta distribución se utiliza ampliamente en las pruebas estadísticas conocidas como pruebas t y fue desarrollada por William Sealy Gosset -11 de junio de 1876 – 16 de octubre de 1937- quien fue un estadístico, mejor conocido por su sobrenombre literario *Student*. Nacido en Canterbury, asistió al Winchester College, antes de estudiar química y matemática en el New College de Oxford y, tras graduarse en 1899, se incorporó a la destilería de Arthur Guinness e Hijo en Dublín; famosa mundialmente en la actualidad por la calidad de la cerveza que fabrica.

La destilería Guinness era un negocio agroquímico progresista y Gosset aplicó sus conocimientos estadísticos adquiridos en el laboratorio bioquímico de Karl Pearson; mediante estudio, prueba y error; tanto en la destilería y la granja para seleccionar las mejores variedades de cebada. Gosset y Pearson tenían una buena relación y este último ayudó a Gosset con la matemática de sus artículos que daban relevancia a las pequeñas muestras, aún cuando Pearson disponía normalmente de cientos de observaciones y no veía la urgencia en el desarrollo de métodos basados en unas pocas muestras.

Cuando otro investigador de Guinness publicó un artículo que contenía secretos industriales de la destilería, Guinness prohibió a sus empleados la publicación de artículos para evitar futuras exposiciones de información confidencial; por lo Gosset no podía publicar su trabajo usando su propio nombre y utilizó el pseudónimo *Student* en sus publicaciones, para evitar que su empleador lo detectara. Por tanto, su logro más famoso se conoce ahora como la distribución t de Student. Con este pseudónimo, Pearson -no Gosset- publicó *El error probable de una media* y casi todos los artículos de Gosset en la publicación *Biometrika*; Sin embargo, fue R.A. Fisher quien apreció la importancia de los trabajos de Gosset sobre muestras pequeñas. Irónicamente la estadística t que le dio fama a Gosset fue realmente creación de Fisher quien introdujo la forma t porque se ajustaba a su teoría de los grados de libertad, y también fue pionero de la aplicación de la distribución t a la regresión.

El interés de Gosset en el cultivo de la cebada le llevó a especular que el diseño de experimentos debería dirigirse no sólo a mejorar la producción media, sino también a desarrollar variedades robustas cuya producción no se viese afectada por las variaciones en el suelo y el clima. Este principio sólo aparece más adelante en las ideas de Fisher y

luego en el trabajo de Genichi Taguchi en los años 1950. Gosset fue amigo tanto de Pearson como de Fisher, y fue un hombre modesto.

Después de esta apasionante historia, regresemos a la teoría de la probabilidad para definir la FDP t . Supongamos dos variables aleatorias U y W tales que $U \sim N(0,1)$ y $W \sim \chi_v^2(v)$. Recuérdese que la notación significa que W se distribuye conforme una distribución χ_v^2 con v grados de libertad y U conforme una Normal Estándar con media 0 y varianza 1. Notación que seguiremos en adelante. El siguiente cociente de las variables aleatorias es una nueva variable aleatoria que llamaremos T_v :

$$T_v = \frac{U}{\sqrt{W/v}} \quad (13.64)$$

Esta variable tiene como función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad \text{para } (-\infty < t < \infty) \quad (13.65)$$

Como se puede ver en la ecuación, y en la figura 13.13, el único parámetro particular de esta distribución es v -los g de l- se le llama distribución t con v g de l y se denota por T_v .

Analizando la variable aleatoria T_v , primero el numerador, como U es normal, sus valores varían de $(-\infty, \infty)$ y, segundo el denominador, como W es χ_v^2 y v es constante, varía en el intervalo $[0, \infty)$; por lo tanto, la variable aleatoria T_v en el intervalo $(-\infty, \infty)$ semejante a la Normal Estándar

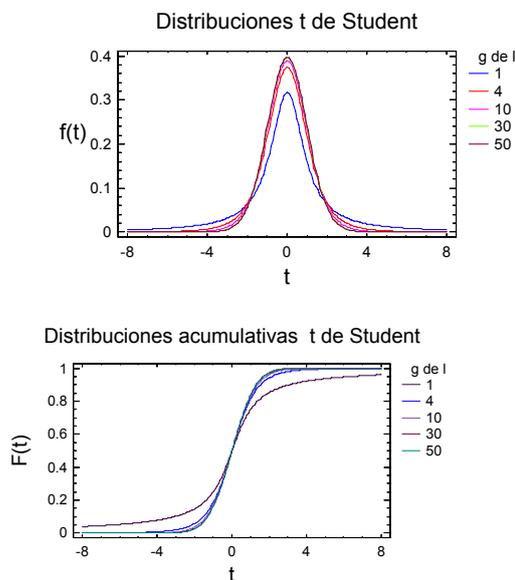


Figura 13.13 Varios miembros de la distribución t de Student definidos por v

Más aún, como puede demostrarse que la media y la varianza son

$$\mu_{T_v} = 0 \tag{13.66}$$

$$\sigma_{T_v}^2 = \frac{v}{v-2} \text{ para } v > 2$$

Entonces, la media está centrada en el origen y, cuando $v \rightarrow \infty$, la varianza tiende a 1 y la distribución $f(t_v) \rightarrow N(0,1)$ o sea que tiende a la distribución Normal estándar como se aprecia en la figura.

Al igual que con la distribución χ_v^2 , esta distribución puede aproximarse a la Normal cuando $v \geq 30$ con la expresión $N(0, \sqrt{\frac{v}{v-2}})$; y sus tablas nos dan los fractiles, o sea los valores de t_v correspondientes para un miembro de la familia seleccionado con v y la probabilidad acumulada $F(t_{v,\alpha})$ que se desee, utilizando la propiedad de la simetría de la función cuando sea necesario, donde α representa la probabilidad acumulada.

Ejemplo 13.11. Consultando la tabla t_v se determinan siguientes fractiles para los miembros de la familia seleccionados por v .

Para $F(t_{v=10,\alpha=0.750}) = 0.750$ consultando directamente la tabla se tiene $t_{v=10,\alpha=0.750} = 0.700$

$\int_0^{t_{20,0.450}} f(t_{20})dt = 0.450$ es igual a $\int_0^{t_{20,0.950}} f(t_{20})dt = 0.950$ que aparece directamente en las tablas y el valor del fractil es $t_{20,0.950} = 1.725$.

$\int_{-t_{8,0.05}}^{t_{8,0.95}} f(t_8)dt = 0.90$ por la simetría de la función es igual a $\int_{-\infty}^{t_{8,0.95}} f(t_8)dt = 0.95$ que también aparece directamente en las tabla y el valor del fractil es $t_{8,0.950} = 1.860$.

13.15 Distribución F de Fisher

Esta distribución, al igual que las dos anteriores, parte de la suposición de que las muestras se sacan de poblaciones que se distribuyen conforme a la Normal, y se utiliza para el estudio de la relación de varianzas que constituye la base del análisis de conocido como ANOVA; fue desarrollada por Ronald Aylmer Fisher -febrero de 1890 – julio de 1962- científico, matemático, estadístico, biólogo evolutivo y genetista inglés; dentro de sus avances en la estadística destaca la inferencia estadística creada por él en 1920.

Fisher nació en Londres y su escasez de sus recursos económicos y su extraordinaria capacidad académica le valieron una beca en 1909 para cubrir su estancia en el College de la Universidad de Cambridge, donde obtuvo su graduación en matemáticas en 1913 y fue uno de los fundadores más activos de la Sociedad de Eugenesia de la Universidad de Cambridge, junto con John Maynard Keynes, R. C. Punnett y Horace Darwin, hijo de Charles Darwin.

Durante la guerra, Fisher atravesó momentos de extrema carestía económica. A pesar de las dificultades, comenzó a escribir reseñas de libros para la *Eugenic Review* e incrementó gradualmente su interés en el trabajo genético y estadístico. Publicó varios artículos sobre biometría, fundó la genética biométrica e introdujo la metodología del análisis de varianza, considerablemente superior a la de la correlación. A partir de 1919 se

dedicó al estudio pionero de los principios del diseño de experimentos, elaboró sus trabajos sobre el análisis de varianza y comenzó a prestar una atención especial a las ventajas metodológicas de la computación de datos.

En 1929 fue admitido en la Royal Society, cuyo reconocimiento aumentó su fama y se convirtió en un investigador docente de prestigio internacional. En 1943, después de una larga crisis económica y personal, ocupó la Cátedra de Genética en Cambridge.

Si $U \sim \chi_{v_1}^2(v_1)$ y $W \sim \chi_{v_2}^2(v_2)$, podría pensarse que el cociente de estas variables se distribuye conforme a una distribución χ_v^2 porque tanto el numerador como el denominador son variables χ_v^2 ; sin embargo, no es así. El cociente da origen a una nueva variable aleatoria F_{v_1, v_2} que se llama la variable aleatoria F con v_1 g de l en el numerador y v_2 g de l en el denominador.

$$F_{v_1, v_2} = \frac{U/v_1}{W/v_2} \tag{13.67}$$

Cuya función de densidad es

$$g(f_{v_1, v_2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \frac{f^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{v_1 f}{v_2}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \quad \text{para } f > 0 \tag{65}$$

Cabe observar que en este caso, por excepción, la función de densidad se denotó g y no f para no confundirla con los valores de la variable f , y que esta familia de distribuciones tiene dos parámetros particulares que caracterizan a sus miembros, ellos son v_1 y v_2 . Más aún, puesto que F_{v_1, v_2} es el cociente de dos variables aleatorias χ_v^2 , sus valores son positivos y su rango es $[0, \infty)$ como se observa en la figura 13.14; y su media y varianza son

$$E[F_{v_1, v_2}] = \frac{v_2}{v_2-1} \tag{13.68}$$

$$\text{Var}[F_{v_1, v_2}] = \frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$$

Con los siguientes casos límite:

- La media depende de v_2 solamente y si $v_2 \rightarrow \infty$ entonces $E[F_{v_1, v_2}] \rightarrow 1$ y $\text{Var}[F_{v_1, v_2}] \rightarrow 2/v_1$ y $F_{v_1, v_2} \rightarrow \frac{\chi_{v_1}^2}{v_1}$.
- Si $v_1 = 1$ la distribución F_{v_1, v_2} es igual a la distribución t^2 con v_2 g de l.

Esta distribución consta de varias tablas, cada una corresponde a la determinada distribución Acumulada $F(F_{v_1, v_2})$ y se entra a ellas con los valores de v_1 que, conforme a (13.64), son los g de l del numerador, v_2 que son los g de l del denominador, para obtener los valores de los fractiles. Dichas tablas son dadas principalmente para $F(F_{v_1, v_2}) = 1 - \alpha =$

0.90,0.95,0.975,o sea para valores de la cola superior; no obstante, los fractiles inferiores se obtienen de las mismas tablas aplicando la siguiente propiedad derivada de la Variable F_{v_1,v_2} dada en la ecuación (13.64):

La desigualdad

$\frac{U/v_1}{W/v_2} = \frac{\chi_{v_1}^2/v_1}{\chi_{v_2}^2/v_2} < F_1$ es idéntica a la desigualdad $\frac{\chi_{v_2}^2/v_2}{\chi_{v_1}^2/v_1} > \frac{1}{F_1}$ de donde se sigue que

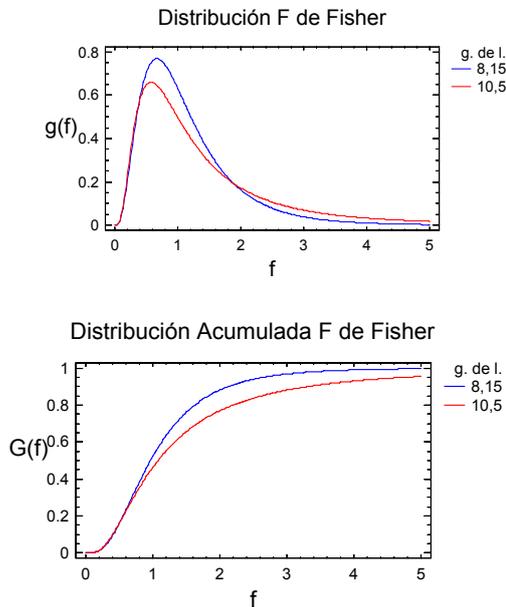
$$F_{v_1,v_2,\alpha} = \frac{1}{F_{v_2,v_1,1-\alpha}} \tag{13.69}$$

Lo que demuestra que $p(F_{v_1,v_2,\alpha} < F_1) = p\left(\frac{1}{F_{v_2,v_1,1-\alpha}} > \frac{1}{F_1}\right)$

En resumen, los fractiles menores correspondientes a $F_{v_1,v_2,\alpha}$ se obtienen tomando el recíproco de la probabilidad complementaria $1 - \alpha$ invirtiendo los g de l.

Ejemplo 13.12

- Con apoyo en la tabla de $F(F_{v_1,v_2,\alpha=0.95})$, el fractil inferior que acumula $\alpha = 0.05$ es $F_{v_1=10,v_2=5,\alpha=0.05} = \frac{1}{F_{v_1=5,v_2=10,0.95}} = \frac{1}{3.33} = 0.3003$.
- Con apoyo en la tabla de $F(F_{v_1,v_2,\alpha=0.975})$, $F_{v_1=8,v_2=15,\alpha=0.975} = 3.20$; que es un fractil que se encuentra directamente en la tabla.



la figura 13.14; FDP y de FDA de $F(F_{v_1,v_2})$

13.16 Bibliografía y referencias

Anderson D. Sweeney D. Williams T. (2008) *Estadística para Administración y Economía*. 10a edición, Cengage Learning Editores, S.A. México.

http://es.wikipedia.org/wiki/William_Sealy_Gosset, consultado en octubre de 2009.

http://es.wikipedia.org/wiki/Ronald_Fisher, consultada en octubre de 2009.

Johnson N. Leone F. (1977) *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*, Vol. I, second edition. JOHN WILEY & SONS, USA.

Larson R. Hostetler R. Edwards B. (2006) *Cálculo*, octava edición, McGraw-Hill Interamericana, México.

Lindgren B. (1969) *Statistical theory*, Second Edition, THE MACMILLAN COMPANY, USA.

Olkin I. Gleser L. Derman C. (1980) *Probability Models an Applications*, Macmillan Publishing Co., Inc. USA.

Walpole R. Myers R. (1985) *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*; THIRD EDITION, MACMILLAN PUBLISHING COMPANY, USA.

Ang H. Tang W. (1975) *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Volume 1-Basic principles, John Willey & Sons, Inc. USA.

Winkler R. Hays W. (1975) *Statistics, PROBABILITY, INFERENCE, AND DECISION*; Second Edition, HOLT, RINEHART AND WINSTON, USA.

091221

Nombre de archivo: cap13 Modelos de Distribuciones Continuas.docx
Directorio: C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\g-1)
Capítulos de mi libro de Probabilidad y estadística 2007-2009
Plantilla: C:\Documents and Settings\bfc\Datos de
programa\Microsoft\Plantillas\Normal.dotm
Título:
Asunto:
Autor: Bernardo Frontana
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 19/11/2009 17:15:00
Cambio número: 22
Guardado el: 18/06/2010 22:03:00
Guardado por: FACULTAD DE INGENIERÍA
Tiempo de edición: 409 minutos
Impreso el: 30/08/2010 13:07:00
Última impresión completa
Número de páginas: 39
Número de palabras: 11,137 (aprox.)
Número de caracteres: 61,258 (aprox.)