CAPÍTULO 12
DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

12.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos estudiado los conceptos generales de las variables aleatorias, sus distribuciones y sus parámetros, el propósito de este capítulo es el estudio de algunas distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias discretas que han probado su utilidad en el modelado de problemas de varias ramas de la ingeniería y otras profesiones.

Para cada modelo, estableceremos su expresión matemática, su representación gráfica, sus parámetros particulares y generales, apoyados en los capítulos previos; y veremos algunos ejemplos de aplicación.

12.2 El proceso de Bernoulli

La distribución de probabilidad más sencilla es la que tiene solamente dos posibles eventos por ejemplo si se inspecciona al azar un artículo de una línea de producción los posibles eventos pueden ser sin defectos o defectuoso, al tirar una corcholata al aire se pueden tener solamente dos eventos con determinadas probabilidades. En general, a estos dos eventos se le conoce como éxito -E- o falla -F- y a las probabilidades correspondientes se les llama probabilidad de éxito –que se denota con p- y probabilidad de falla - que se denota con q- . Cabe observar que el éxito no forzosamente debe ser la situación favorable o sea que en el caso del artículo que sale de la línea de producción, si sale defectuoso puede llamarse éxito o bien si un contratista sometió a concurso un proyecto y el evento *gana el concurso* puede ser falla y el evento complementario *pierde el concurso* puede ser éxito; además, puesto que el espacio muestral tiene solo los eventos éxito y falla se tiene que $p + q = 1$.

Un experimento o un ensayo con uno de dos posibles resultados se le conoce como un ensayo de Bernoulli en honor a Jakob Bernoulli -diciembre 1654 - agosto de 1705-, también conocido como Jacob, Jacques o James Bernoulli, quien fue miembro de una destaca familia suiza de matemáticos y científicos. Su obra maestra, *el Arte de la conjetura,* la publicó su sobrino Nicholas en 1713, ocho años después de su muerte, y es un trabajo pionero en la teoría de la probabilidad en el que introduce los términos ensayo de Bernoulli y números de Bernoulli. En general, un experimento que consta de una serie de ensayos de Bernoulli *idénticos, independientes, estacionarios* en el sentido que la probabilidad de éxito p permanece sin variación a lo largo del experimento y dicotómico, en el sentido que solamente se tienen los posibles resultados éxito o falla, en cada uno de los ensayos; se llama un **experimento de Bernoulli**.

Ejemplo 12.1 Si en un proceso de Bernoulli hacemos n observaciones independientes y $n = 6$, por las reglas del análisis combinatorio vistas en el capítulo 5, las posibles secuencias de los 5 resultados son $2^6 = 64$ pero las probabilidades de cada secuencia no es necesariamente la misma, sino que dependen de las probabilidades p y q. Como los eventos son independientes podemos calcular la probabilidad de cualquier secuencia tal como

$$p(E, F. E, F, E, F) = pqpqpq = p^3q^3$$
$$p(E, E. E, F, F, F) = pppqqq = p^3q^3$$
$$p(E, E. E, E, E, F) = pppppq = p^5q$$

Debemos tener precaución con las p ya que la que está fuera del paréntesis indica la probabilidad de deseamos encontrar, mientras que la que aparece en el producto es la probabilidad de éxito y es una constante previamente asignada.

Ejemplo 12.2 Si la probabilidad de éxito es $p = 0.2$ es la que corresponde al producto y con este valor podemos calcular $q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$. Con ambos valores de p y q podemos calcular la probabilidad p de cualquier secuencia, así
$$p(E, F. E, F, E, F) = p(E, E. E, F, F, F) = p^3q^3 = (0.2)^3(0.8)^3 = 0.0041$$
$$p(E, E. E, E, E, F) = (0.2)^5(0.8) = 0.000256$$

12.3 Distribución Binomial: El número de éxitos -r- como variable aleatoria

Esta es una de las distribuciones discretas de más utilidad en la práctica estadística y puede visualizarse de dos formas:

a) En un proceso de Bernoulli en el que la probabilidad de éxito es p se hacen n ensayos y se desea calcular la probabilidad de que ocurran r éxitos, o bien
b) Si de una población se saca una muestra de tamaño n, esta distribución binomial nos da la probabilidad de que aparezcan r éxitos.

Obsérvese que, como lo anticipamos en el capítulo anterior, para calcular la probabilidad se deben de dar los dos valores de **los parámetros particulares n y p de esta familia de distribuciones**, pues al darle valores particulares a n y p, obtenemos un miembro particular de dicha familia.

En la sección anterior, ya vimos la probabilidad de las secuencias particulares con r éxitos y n - r fallas en cierto orden. Si queremos conocer la probabilidad de una secuencia particular de resultados de ensayos independientes de Bernoulli, dicha secuencia tendrá la misma probabilidad que cualquier otra secuencia con exactamente el mismo número de éxitos dados n y p. Afortunadamente, no interesa un orden particular de aparición de los éxitos o sea una secuencia particular, sino solamente el número de éxitos; es decir, nos interesa conocer la probabilidad de número de éxitos, independientemente del orden en que ocurran.

Ejemplo 12.3 Si se tienen 3 grúas en operación, el espacio muestral del número de grúas que permanecen en operación después de un año, si $o = operación$ y $f = falla$, es $\mathbb{S} = \{(ooo), (oof), (ofo), (off), (foo), (\ fof), (ff0), fff)\}$.

Y, para los eventos
$A = \{tres\ trascabos\ permanecen\ en\ operación\} = \{(ooo)\}$;
$B = \{dos\ trascabos\ permanecen\ en\ operación\} = \{(oof), (ofo), (foo)\}$;
$C = \{un\ trascabo\ permanece\ en\ operación\} = \{(off), (fof), (ffo)\}$; y
$D = \{ningún\ trascabo\ permanece\ en\ operación\} = \{(FFF)\}$

La probabilidad de falla es $q = 1 - p$, y

La probabilidad de la única secuencia de A es p^3
La probabilidad de cualquier secuencia de B es p^2q
La probabilidad de cualquier secuencia de C es pq^2
Y la probabilidad de la única secuencia de D es q^3

Las probabilidades de los eventos A a D son entonces

$p(A) = p^3$
$p(B) = p\{(oof) \cup (ofo) \cup (foo)\} = p\{(oof) + (ofo) + (foo)\} = 3\,p^2q$
$p(C) = p\{(off) \cup (fof) \cup (ffo)\}; p\{(off) + (fof) + (ffo) = 3\,pq^2$
$p(D) = q^3$

Desarrollando el binomio $(p+q)^3$

$$(p+q)^3 = p^3 + 3\,p^2q + 3\,pq^2 + q^3 = p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = 1$$

Como estamos analizando una muestra de tamaño n, con probabilidad de éxito p, el número de éxitos R es una variable aleatoria discreta cuyos valores posibles son $0 \le R \le n,$ se trata de la familia de distribuciones de probabilidad conocida como la **Distribución Binomial** y generalizando los resultados para R, n y p para un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito igual a p, la probabilidad de observar exactamente r éxitos en n ensayos independientes se llama **Distribución Binomial** cuya expresión matemática general es

$$p(R = r|n,p) = \binom{n}{r}p^r q^{n-r} \quad para \quad 0 \le r \le n \tag{12.1}$$

Donde R es la variable aleatoria que representa el número de éxitos r en n ensayos de un proceso de Bernoulli o en una muestra de ese tamaño.

Esta distribución satisface las condiciones de toda distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, puesto que todos los términos son positivos y la suma de sus probabilidades es igual a uno.

En efecto, si generalizamos la expansión del binomio $(p+q)^n$ tenemos

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^0q^{n-0} + \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}p^nq^{n-n}$$

$$(p+q)^n = q^n + \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \cdots + \boldsymbol{\binom{n}{r}p^r q^{n-r}} + \cdots + p^n = 1$$

Donde la expresión en negritas corresponde a la expresión generalizada de la distribución binomial.

Ejemplo 12.4 Con referencia al ejercicio anterior, si la probabilidad de que las grúas permanezcan en operación es $p = 0.8$ entonces $q = 0.2$, al inicio del trabajo se tienen $n = 3$ trascabos en operación; entonces la distribución de probabilidad binomial, es

$$p(R = r|n,p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad para \quad 0 \le r \le 3$$

$$p(R = 0|n = 3, p = 0.8) = \binom{3}{0}(0.8)^0(0.20)^3 = (0.20)^3 = 0.008$$
$$p(R = 1|n = 3, p = 0.8) = \binom{3}{1}(0.8)^1(0.20)^2 = 0.096$$
$$p(R = 2|n = 3, p = 0.8) = \binom{3}{2}(0.8)^2(0.20)^1 = 0.384$$
$$p(R = 3|n = 3, p = 0.8) = \binom{3}{3}(0.8)^3(0.20)^0 = 0.512$$

Todos los valores de las probabilidades son positivos y, además, la suma de las probabilidades es

$$Suma = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 1.00$$

Por la tanto se trata de un miembro de la familia de las distribuciones Binomiales.

Ejemplo 12.5 Si se cambian los parámetros, o alguno de ellos, se obtiene un nuevo miembro de la familia; por ejemplo si $p = 0.9$ manteniendo $n = 3$ se tiene

$$p(R = 0|n = 3, p = 0.9) = \binom{3}{0}(0.9)^0(0.10)^3 = (0.10)^3 = 0.001$$
$$p(R = 1|n = 3, p = 0.9) = \binom{3}{1}(0.9)^1(0.10)^2 = 0.027$$
$$p(R = 2|n = 3, p = 0.9) = \binom{3}{2}(0.9)^2(0.10)^1 = 0.243$$
$$p(R = 3|n = 3, p = 0.9) = \binom{3}{3}(0.9)^3(0.10)^0 = 0.729$$

Nuevamente, los valores de las probabilidades son positivos y, además, su suma es

$$Suma = 0.001 + 0.027 + 0.243 + 0.729 = 1.00$$

Observe que se trata de una nueva distribución de probabilidad Binomial, pero con parámetros particulares diferentes. Las gráficas de los dos miembros de esta familia se muestran en la figura 12.1

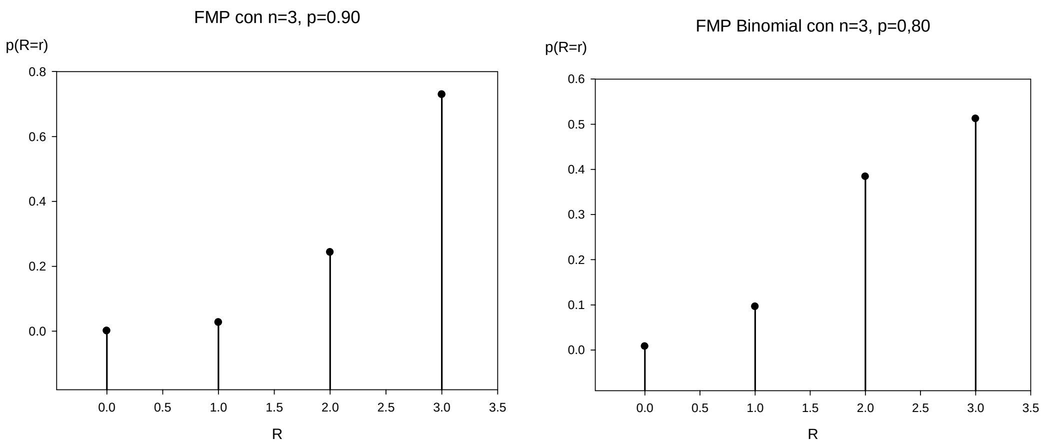


Figura 12.1 Dos miembros de la familia Binomial

12.3.1 Parámetros de la distribución Binomial

Para un solo ensayo de Bernoulli, se tiene

$$P(R=1)=p,\ \ p(R=0)=1-p$$

La media de esta distribución de Bernoulli es

$$\mu_R=E[R]=(1)p+(0)(1-p)=p$$

Para calcular la varianza necesitamos calcular $E[R^2]$

$$E[R^2]=(1)^2p+(0)^2(1-p)=p$$

Con el cual la varianza es

$$\sigma_R^2=Var(R)=E[R^2]-E[R]^2=p-p^2=\ p(1-p)=pq$$

Como la distribución Binomial es la distribución del número de éxitos en n ensayos independientes, por las propiedades de los valores esperados la media de la distribución Binomial es la suma de las medias de los n ensayos independientes. O sea

$$\mu_R=np \tag{12.2}$$

De manera similar, por el álgebra de las varianzas ya vista, la Varianza de la distribución Binomial de n ensayos independientes es igual a la suma de las varianzas de cada uno de los ensayos, o sea

$$\sigma_R^2=Var(R)=npq \tag{12.3}$$

Ejemplo 12. 6 Para los dos últimos ejemplos sus parámetros generales media y varianza son

Para el ejemplo 2, $\mu_R=np=3\times 0.8=2.4\ \ y\ \ \sigma_R^2=npq=3\times 0.8\times 0.2=0.48$

Para el ejemplo 3, $\mu_R=np=3\times 0.9=2.7\ \ y\ \ \sigma_R^2=npq=3\times 0.9\times 0.1=0.27$

Verifiquemos los parámetros generales de la binomial, utilizando la función generatriz de momentos de esta distribución vista en el capítulo 10.

$$M_R(s)=\sum_{r=0}^{n}e^{sr}\,p(r)$$

$$M_R(s)=\sum_{r=0}^{n}e^{sr}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

$M_R(s) = \sum_{r=0}^{n} (pe^s)^r \binom{n}{r} (1-p)^{n-r}$

$M_R(s) = (pe^s + 1 - p)^n$

Calculando las dos primeras derivadas respecto a s

$\frac{dM_R(s)}{ds} = n(pe^s + 1 - p)^{n-1} pe^s$

$\frac{d^2M_R(s)}{ds^2} = n(n-1)(pe^s + 1 - p)^{n-2}(pe^s)^2 + n(pe^s + 1 - p)^{n-1} pe^s$

Evaluándolas en $s = 0$ tenemos

$\mu_1' = np$

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$

Con lo cual la media

$$\mu_R = np \qquad (12.2)$$

Debe notarse que la media puede ser un valor que R no puede tomar, ya que el número de éxitos debe ser entero puede ser mayor o menor que np que puede ser un número real.

De igual forma, la varianza es

$$\sigma_R^2 = \mu_2 = \mu_2' - {\mu_1'}^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

$$\sigma_R^2 = \mu_2 = npq \qquad (12.3)$$

Calculando

$\frac{d^3M_R(s)}{ds^3}|_{s=0}$ y $\frac{d^4M_R(s)}{ds^4}|_{s=0}$ obtenemos μ_3' y μ_4' con los cuales los momentos centrales μ_3 y μ_4 son

$$\mu_3 = npq(q-p)$$

$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

Y el factor de sesgo es

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{npq(q-p)}{(npq)^{3/2}} = \frac{q-p}{(npq)^{1/2}} \qquad (12.4)$$

Mientras que el factor de aplanamiento es

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)}{(npq)^2} = 3 + \frac{1-6pq}{npq} \qquad (12.5)$$

Estos resultados también pueden obtenerse utilizando los momentos factoriales.

Obsérvese en las relaciones (12.4) y (12.5) que cuando $n \to \infty$ α_3 tiende a 0 y α_4 tiende a 3, que corresponden a los valores de los factores de sesgo y aplanamiento de la distribución normal estándar, **que son los valores de referencia respecto a los cuales se comparan el sesgo y la curtosis de todas las distribuciones**.

Ejemplo 12.7 En un estudio conducido por la Secretaría de Apoyo a la Docencia con los reportes de los asesores psicopedagógicos a los alumnos de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, se reporta que el 70% de los alumnos considera que los tranquilizantes no sirven para nada, que ellos afrontan directamente los problemas de depresión que se les presentan. Conforme a este estudio.

La probabilidad de que los siguientes 5 alumnos que acudirán a la asesoría la próxima semana, al menos 3 tengan la misma opinión acerca de los tranquilizantes es

$$p(R \geq 3) = \binom{5}{3}0.7^3(0.3)^2 + \binom{5}{4}0.7^4(0.3)^1 + \binom{5}{5}0.7^5(0.3)^0$$

$$p(R \geq 3) = 0.3087 + 0.3602 + 0.1681 = 0.8369$$

Las distribuciones de probabilidad para los casos en que el 30%, 50%, 70% y 40% de de los alumnos consideran que los tranquilizantes no sirven para nada aparecen en la tabla 12.1 con la finalidad calcular algunos de sus parámetros generales y hacer algunas reflexiones. Dichas distribuciones son 4 miembros de la familia Binomial que tiene dos parámetros particulares -n, p- que se obtuvieron manteniendo $n = 5$ y variando la probabilidad de éxito $p = 0.3, 0.4, 0.5$ y 0.7.

Tabla 12.1 Distribuciones Binomiales para $n = 8$ y varias p

	p					
R	0.3	0.5	0.7	0.4	FDA , $p = 0.7$	FDA, $p = 0.4$
0	0.168	0.031	0.002	0.078	**0.002**	**0.078**
1	0.360	0.156	0.028	0.259	**0.031**	**0.337**
2	0.309	0.313	0.133	0.346	**0.163**	**0.683**
3	0.132	0.313	0.309	0.230	**0.472**	**0.913**
4	0.028	0.156	0.360	0.077	**0.832**	**0.990**
5	0.002	0.031	0.168	0.010	**1.000**	**1.000**
SUMA =	**1.000**	**1.000**	**1.000**	**1.000**		
μ_R **=np**	**1.500**	**2.500**	**3.500**	**2.000**		
q = 1-p	**0.700**	**0.500**	**0.300**	**0.600**		
σ_R^2**=npq**	**1.050**	**1.250**	**1.050**	**1.200**		
σ_R	**1.025**	**1.118**	**1.025**	**1.095**		
δ_R	**0.683**	**0.447**	**0.293**	**0.548**		
α_3	**0.390**	**0.000**	**-0.390**	**0.183**		
α_4	**2.752**	**2.600**	**2.752**	**2.633**		

En esta tabla aparecen las distribuciones binomiales de los 5 alumnos que se presentarán a la asesoría psicopedagógica la siguiente semana, que consideran que los tranquilizantes no sirven para nada, con probabilidades de éxito p 0.3, 0.5, 0.7 y 0.4; las cuáles pueden calcularse mediante la expresión (12.1); por ejemplo

$$p(R = 4|n = 5, p = 0.5) = \binom{5}{4}(0.5)^4(0.5)^1$$

Recuérdese que una distribución o FMP es el conjunto de parejas de valores $[r, p(R = r)]$ por lo que la distribución de $p(R = r|n = 5, p = 0.4)$ es el conjunto de parejas de valores de R -0 a 5- y las probabilidades que se muestran en la columna p = 0.4. La comprobación de que sí son distribuciones de probabilidad aparece en el renglón SUMA= que es 1 para cada una de la 4 distribuciones. Las gráficas de las cuatro distribuciones se muestran en la figura 12.2.

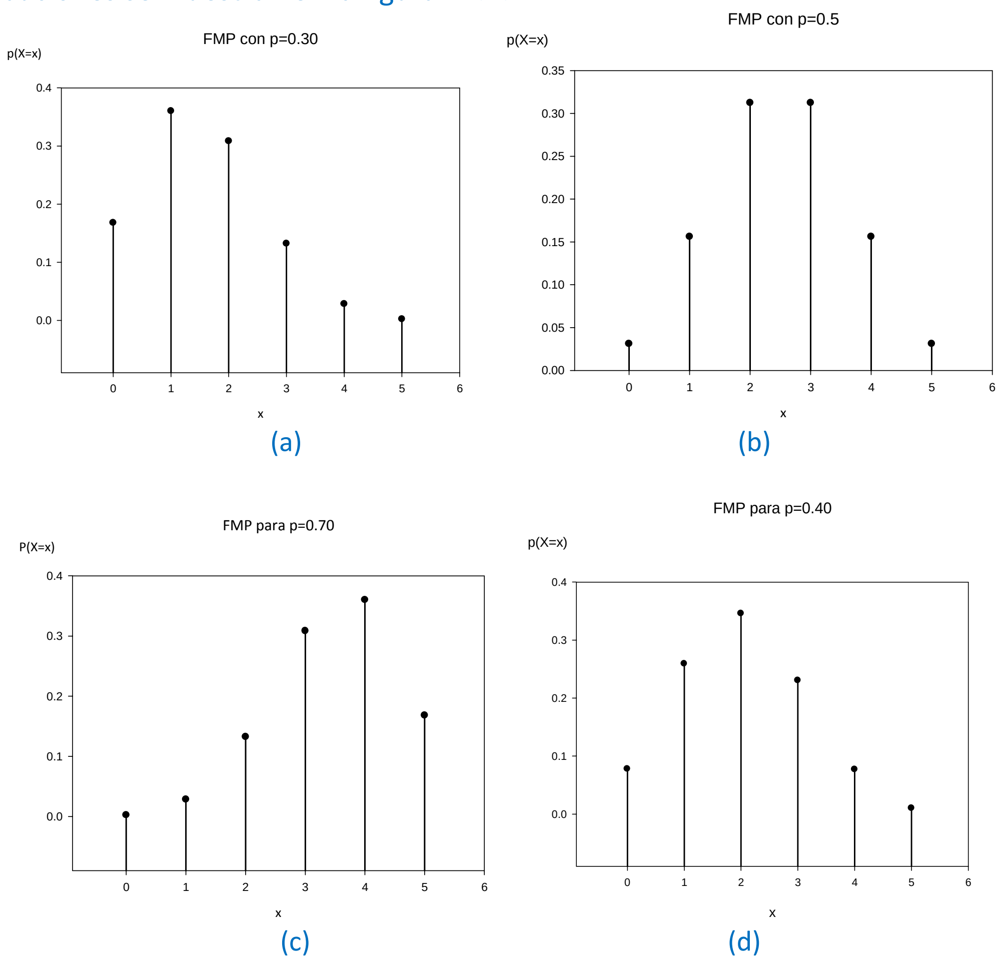


Figura 12.2 Distribuciones de probabilidad Binomiales con diferentes parámetros particulares de p

Con respecto al parámetro general, la media $\boldsymbol{\mu_R}$ **-que se calcula con la expresión (1)-** se observa que, con excepción de la distribución con p = 0.4 que tiene un valor de $\boldsymbol{\mu_X = np = 5(.4) = 2}$ y corresponde al valor de $R = 2$, las demás medias tienen valores que no corresponden a ningún valor de R; es decir, la media de la distribución binomial será un valor de R solamente cuando el producto $\boldsymbol{np}$ **sea un entero.**

Las modas de las distribuciones -μ_{mo}- son los valores de R donde las FMP tienen sus máximos, así para p = 0.3 es 1, para p = 0.4 es 2 y para p = 0.7 es 4 y, mientras que para p = 0.5 se tiene un número infinito de modas que son el conjunto de puntos [2,3], aunque desde el punto de vista práctico se considera que esta en el punto medio de este intervalo o sea 2.5 -ver figura 12.2.

Por lo que toca a las **medianas de las distribuciones -μ_m-** vimos en la sección 10.6 que su valor exacto se obtiene mediante la interpolación de los valores del rango donde se encuentra la mediana y su valor aproximado se obtiene calculando el promedio de dichos valores; así, de la tabla 12.1 se tiene para $p = 0.7$, $\boldsymbol{\mu_m = 3.5}$ y para $p = 0.4$ $\boldsymbol{\mu_m = 1.5}$.

R	FDA , $p = 0.7$	FDA, $p = 0.4$
0	**0.002**	**0.078**
1	**0.031**	**0.337**
2	**0.163**	**0.683**
3	**0.472**	**0.913**
4	**0.832**	**0.990**
5	**1.000**	**1.000**

La figura 12.3 representa la función de distribución Acumulada para $p = 0.7$ en la que se podría pensar que la mediana es 4 como lo apunta la flecha; sin embargo, no es así porque en $R = 4$ se tiene acumulada una probabilidad de 0.832; lo que se señala es debe hacerse es una interpolación entre los valores de 3 y 4.

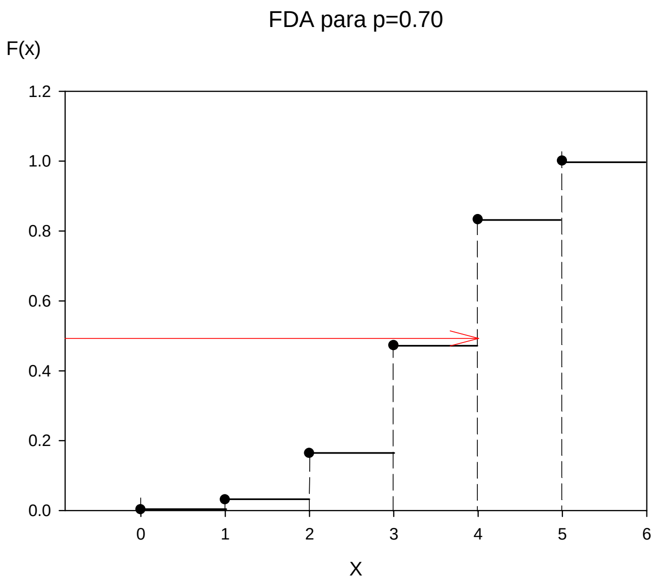


Figura 12.3 Distribución de Probabilidad Acumulada de $p = 0.7$.

Por lo que toca a la **desviación estándar-σ_R-** , viendo la figura 12.2 podría pensarse que las distribuciones (a), (c) y (d) presentan mayores dispersiones; sin embargo, tampoco es así porque la desviación estándar mide las desviaciones con respecto a la media, para ellas sus desviaciones estándar son 1.025, 1.025 y 1.095 respectivamente; mientras que la distribución que tiene mayor dispersión es (b) que vale 1.118.

En lo tocante al **parámetro se sesgo, primer factor de forma o tercer momento estándar -$\boldsymbol{\alpha_3}$-** para las 4 distribuciones nos indican que la distribución con $p = 0.5$ es la única simétrica **-$\boldsymbol{\alpha_3 = 0}$-**, las de $p = 0.3$ y $p = 0.7$ tiene la misma cantidad de sesgo pero en sentido contrario, lo que significa que la de $p = 0.3$ tiene su cola hacia la derecha y la de $p = 0.7$ hacia la izquierda como puede verse en las figuras 12.2 (a) y (c).

Por lo que corresponde al **parámetro de aplanamiento o curtosis, segundo factor de forma o cuarto momento estándar -$\boldsymbol{\alpha_4}$-,** la distribución de $p = 0.5$ es la más chaparra, seguida de la de $p = 0.4$, en tanto que las distribuciones con $p = 0.3$ y $p = 0.7$ son las más altas, pero sin llegar a la distribución de referencia que es la normal estándar para la cual $\alpha_4 = 3$.

Con el propósito de ahorrar los cálculos, de esta y otras distribuciones, es conveniente señalar que ya existen tablas de varias distribuciones discretas y continuas que pueden encontrarse al final de los libros, en las páginas WEB de profesores de la Facultad de Ingeniería o en la Internet. En lo particular, en este texto se utilizarán las tablas de la profesora Irene Patricia Valdez y Alfaro, destacada académica de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, las cuáles pueden consultarse en su página http://dcb.fi-c.unam.mx/profesores/irene/. En particular, las tablas de la distribución binomial pueden consultarse en la página
http://dcb.fi-c.unam.mx/profesores/irene/Notas/tablas/BinomialAc.pdf

12.4 La Distribución de Pascal: el número de ensayos como variable aleatoria

En la distribución binomial, consideramos el plan de muestreo en el que el tamaño de la muestra seleccionada estaba fijo y era igual a n, y la variable aleatoria de interés era R, el número de éxitos en la muestra seleccionada. Ahora cambiemos el plan de muestro y continuemos muestreando hasta que se obtengan un número de éxitos r fijado previamente; en otros términos en la distribución binomial n y p son parámetros y R es la variable aleatoria; ahora, en esta nueva distribución conocida como la distribución de Pascal en honor en honor al matemático francés Pascal, r y p son los parámetros y N es la variable aleatoria. Entonces, la probabilidad de que se tenga que continuar muestreando hasta n para obtener r éxitos, recordando que la probabilidad de éxito es p y que los ensayos son independientes, es

$$p(N = n|r,p) = p[(k-1) ensayos\ se\ tengan\ (r-1) éxitos\ y\ \ el\ ensayo\ r\ sea\ éxito]$$

$$p(N = n|r,p) = p[(k-1) ensayos\ se\ tengan\ (r-1) éxitos] p[\ el\ ensayo\ r\ sea\ éxito]$$

$$p(N = n|r,p) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{n-r} p$$

$$p(N = n|r,p) = \binom{n-1}{r-1} p^{r} q^{n-r} \qquad para\ 0 < r \le n\ \ o\ n = r, r+1, r+2, \ldots \qquad (12.6)$$

Nótese que esta distribución tiene la misma estructura que la distribución binomial, también se identifica con la distribución binomial negativa y sus parámetros los derivaremos a partir de esa distribución que se verá en la siguiente sección.

Ejemplo 12. 8 Los cables que se utilizan en la grúa que eleva los paneles solares y las antenas a las torres de telecomunicaciones del Sistema de Alerta sísmica, constan de varios alambres que se consideran estadísticamente independientes y la falla de 2 o más alambres durante carga excesiva es poco probable. En ocasiones, estos cables se ven sometidos a sobrepesos y la probabilidad que un alambre se rompa es de 0.05. Calculemos la probabilidad de que el cable pueda soportar cuando menos 5 maniobras con sobrepesos antes de que se remplace lo que debe hacerse por seguridad cuando 3 de los alambres fallan.
La tercera falla ocurre cuando se hacen 6 o más maniobras con sobrepeso, o sea

$$p(N \geq 6|r = 3, p = 0.05) = 1 - p(N < 6|r = 3, p = 0.05)$$

$$= 1 - \sum_{n=3}^{6} \binom{n-1}{3-1}(0.05)^3(0.95)^{n-3} = 1 - [\ \binom{3-1}{3-1}(0.05)^3(0.95)^{3-3} + \binom{4-1}{3-1}(0.05)^3(0.95)^{4-3} + \binom{5-1}{3-1}(0.05)^3(0.95)^{5-3}]$$

$$= 1 - [\ \binom{2}{2}(0.05)^3 + \binom{3}{2}(0.05)^3(0.95)^1 + \binom{4}{2}(0.05)^3(0.95)^2] = 1 - 0.0011 = 0.999$$

12.5 La Distribución Binomial negativa: el número de ensayos como variable aleatoria

Primeramente cabe hacer notar que los términos sucesivos de (12.6) corresponden a la expansión de un binomio negativo. En efecto

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} = p^r(1-q)^{-r} = (Q-P)^{-r}$$

Donde

$$Q = p^{-1}, \quad P = qp^{-1}, \quad y \quad Q - P = 1 \tag{12.7}$$

Ahora estamos interesados en el número de fracasos S que se tienen en una muestra aleatoria N conocidos los parámetros particulares: el número éxitos r y la probabilidad de éxito p. Aplicando la transformación lineal

$$S = N - r \tag{12.8}$$

Donde $N = S + r$ y sustituyéndola en la expresión (12.6), la distribución definida por

$$p(S = s|r, p) = \binom{s+r-1}{r-1} p^r q^s \tag{12.9}$$

O bien, sustituyendo las expresiones dadas en (12.7) se tiene

$$p(S = s|r, p) = \binom{s+r-1}{r-1} Q^{-r} (\frac{P}{Q})^s, \quad \text{para} \quad S = 0, 1, 2, 3, \dots \qquad (12.9')$$

Se conoce como la Distribución binomial negativa.

La función generadora de momentos se esta distribución es

$$M_S(\theta) = (Q - Pe^{\theta})^{-r}$$

Con la cual podemos determinar sus parámetros generales que son

$$\mu_S = rP \qquad \sigma_S^2 = rPQ$$

$$\alpha_3(S) = \frac{P+Q}{(rPQ)^{3/2}} \qquad \alpha_4(S) = 3 + \frac{1+6PQ}{rPQ} \qquad (12.10)$$

Cabe observar que $\alpha_3(S)$ siempre es positivo lo que indica que los miembros de esta distribución siempre tienen sesgo hacia la derecha.

Ahora, con los parámetros de esta distribución, podemos determinar los de la Distribución de Pascal a partir de la relación lineal (12.8)

$$S = N - r \to N = S + r \to E[N] = E[S + r] = E[S] + r = rP + r = r\left(\frac{q}{p} + 1\right)$$

$$\mu_N = \frac{r}{p} \qquad (12.11)$$

Igualmente para la varianza

$$Var[N] = Var[S + r] = Var[S] + 0$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_S^2 = rPQ = r\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{rq}{p^2} \qquad (12.12)$$

12.6 La distribución Geométrica

Un caso particular de la distribución de Pascal se presenta cuando se muestrea hasta encontrar el primer éxito, y la única secuencia posible es que se tengan fracasos y el último ensayo de Bernoulli o el último elemento muestreado sea éxito, con lo cual

$$p(N = n|r = 1, p) = \binom{n-1}{1-1} p^1 q^{n-1}$$

$$p(N = n|r = 1, p) = q^{n-1} p \qquad (12.13)$$

Cuyas probabilidades sucesivas están en progresión geométrica que decrecen cuando s se incrementa, de ahí su nombre.

Sustituyendo $r = 1$ en (12.11) y (12.12) se obtienen la media y la varianza de la distribución geométrica son

$$\mu_N = \frac{1}{p}$$
$$\sigma_N^2 = \frac{q}{p^2} \tag{12.14}$$

O en términos de la binomial negativa

$$p(S = s|r = 1, p) = \binom{s+1-1}{1-1} Q^{-1} \left(\frac{P}{Q}\right)^s$$

$$p(S = s|r = 1, p) = pq^s \quad para\ s = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{12.15}$$

$$\mu_S = P \qquad \sigma_S^2 = PQ$$
$$\alpha_3(S) = \frac{P+Q}{(PQ)^{3/2}} \qquad \alpha_4(S) = 3 + \frac{1+6PQ}{PQ} \tag{12.16}$$

En efecto

$$\mu_N = E[N] = E[S + r] = E[S] + 1 = P + 1 = \left(\frac{q}{p} + 1\right) = \frac{q+p}{p} = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_S^2 = PQ = \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{p^2}$$

Que corresponden a las expresiones (12.14).

En problemas de tiempo o espacio que pueden modelarse como un proceso de Bernoulli, el número de intervalos de tiempo o espacio hasta la primera ocurrencia de un evento se conoce como *tiempo de primera ocurrencia o tiempo de primer arribo*. Si los intervalos en el proceso son estadísticamente independientes, el tiempo de primera ocurrencia debe ser el tiempo entre dos ocurrencias consecutivas del mismo evento o sea que el *tiempo de recurrencia* es igual al tiempo de primera ocurrencia que, en un proceso de Bernoulli, tiene una distribución geométrica cuya media de este tiempo de recurrencia se conoce en ingeniería como el *periodo de retorno promedio* o simplemente como *periodo de retorno* que es igual a

$$\mu_T = E[T] = \sum_{t=1}^{\infty} tpq^{t-1} = p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$\mu_T = \frac{1}{p}$, como se vio en la expresión (12.14).

Esta ecuación significa que el tiempo promedio entre dos ocurrencias consecutivas de un evento es igual al recíproco de la probabilidad de evento dentro de una unidad de tiempo, y no debe confundirse con el tiempo entre ocurrencias que es la variable aleatoria T.

Ejemplo 12.9 En el diseño de las obras de infraestructura como son los puentes, cortinas de presas, torres de transmisión y edificios, se toma en consideración el periodo de retorno de fenómenos naturales que pueden resultar desastrosos como son los sismos, los huracanes y las grandes tormentas. Si una línea de transmisión se diseña para vientos de 50 años, o sea velocidades de vientos que tengan un periodo de retorno de 50 años; la probabilidad de que la velocidad de viento del diseño de la torre se exceda por vez primera 5 años después de la construcción de la torre se encuentra calculando primero la probabilidad de éxito o sea de encontrar vientos de 50 años en un año cualquiera, es decir $p = \frac{1}{50} = 0.02$ y aplicando la probabilidad geométrica (12.13) encontramos la probabilidad que se busca

$$p(T = 5|r = 1, p) = (0.98)^{5-1}(0.02) = (0.98)^4(0.02) = 0.0184$$

La probabilidad de que tal velocidad de diseño ocurra por primera vez a lo más 5 años después de la construcción es

$$p(T \leq 5) = \sum_{t=1}^{5}(0.98)^{t-1}(0.02) = 0.096$$

La probabilidad de experimentar un viento de 50 años en 5 años se obtiene con la distribución binomial (12.1) y es

$$p(T = 1|n = 5, p = 0.02) = \binom{5}{1}(0.02)^1(0.98)^4 = 0.092$$

Ejemplo 12.10 Con referencia al ejemplo anterior, la probabilidad de que el segundo viento de diseño ocurra exactamente durante el quinto año después de la construcción de la torre de telecomunicaciones la encontramos aplicando al distribución de Pascal (12.6)

$$p(T_2 = 5|r = 2, p = 0.02) = \binom{5-1}{2-1}(0.02)^2(0.98)^{5-2} = 4(0.02)^2(0.98)^3 = 0.0015$$

12.7 La Distribución Multinomial

Esta distribución es una generalización de la distribución binomial donde se consideraron solamente los eventos éxito o falla. En esta caso si existen k eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos con probabilidades $p_1, p_2, \dots p_k$ y si se hacen n observaciones independientes y al azar; la probabilidad de que se obtengan exactamente n_1 éxitos del evento 1, n_2 éxitos del evento 2 y así hasta n_k éxitos del evento k, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$; es

$$p(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} p_1^{\,n_1} p_2^{\,n_2} \dots p_k^{\,n_k} \qquad (12.17)$$

Que se llama la distribución Multinomial.

Observe que la distribución binomial es un caso particular de la Multinomial que se da para $k = 2$, $n_1 = r$ y $n_2 = n - r$; y el primer factor corresponde a la regla x que se vio en la sección y. Más aún, aunque su expresión es fácil de deducir, su tabulación y su gráfica es complicada porque el resultado de la muestra no es un solo número como sucede con la distribución binomial; sino un conjunto de k-1 números y el número de posibles secuencias de la muestra es muy grande a menos que $n\, y\, k$ sean muy pequeños; por lo anterior, no es factible considerar distribuciones multinomiales completas sino probabilidades individuales.

Ejemplo 12.11. Las probabilidades de que un diputado arribe en automóvil, en el Metro, en su bicicleta y en taxi a una sesión de la Cámara son 0.3, 0.2, 0.4 y 0.1; respectivamente. La probabilidad de que entre 9 diputados elegidos al azar 2 arriben en automóvil, 1 arribe en el Metro, 3 lleguen en su bicicleta y 1 lo haga en taxi es

$$p(N_1 = 2, N_2 = 1, N_3 = 3, N_4 = 1) = \frac{7!}{2!\,1!3!1!}(0.3)^2(0.2)^1(0.4)^3(0.1)^1 = 0.0484$$

12.8 La Distribución Hipergeométrica

Esta distribución es similar a la anterior, pero con alguna modificación en el plan demuestro. Para los casos binomial y multinomial se supone que la muestra se saca de una población infinita o con remplazo de manera tal que las probabilidades se mantiene constantes durante el proceso de Bernoulli. Si ahora se muestrea de una población finita sin remplazo las probabilidades cambian de observación en observación se tiene una nueva distribución para encontrar los resultados de la muestra que se conoce como la distribución hipergeométrica.

Para una población que contiene un número finito de elementos y ellos son clasificados en k clases mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas, con w_1 en la clase 1, w_2 en la clase 2, w_2 en la clase 2 y así hasta w_k en la clase k; y una muestra de tamaño r se saca al azar de la población y sin remplazo, la probabilidad de que tal muestra contenga n_1 elementos de la clase 1, n_2 elementos de la clase 2, y así hasta n_k elementos de la clase k es

$$p(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k) = \frac{\binom{w_1}{n_1}\binom{w_2}{n_2}\cdots\binom{w_k}{n_k}}{\binom{w}{n}} \qquad (12.18)$$

Donde $w_1 + w_2 + \cdots + w_k = w$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

La diferencia entre las distribuciones hipergeométrica y multinomial es de consideración práctica cuando la población de donde se muestrea es muy pequeña. Si la población es grande, la selección y el no remplazo de una unidad de observación tiene efectos despreciables sobre las probabilidades de eventos de muestreos sucesivos y esta es la razón por la cual las probabilidades hipergeométricas pueden aproximarse razonablemente con la binomial o multinomial cuando el número de miembros de la población -w- es muy grande. En suma, las diferencias entre estas distribuciones se basa en el tamaño de la población.

Para comparar la distribución binomial con la hipergeométrica, consideremos solamente dos clases. Para esta situación, con $k = 2$, la clase 1 representa éxito y la 2 falla, se tiene que la media y la varianza del número de éxitos en n ensayos son

$$\mu_R = E[R] = n(\tfrac{w_1}{w}) \quad \text{y} \quad Var(R) = \sigma_R^2 = \tfrac{w-n}{w-1}\left[n\left(\tfrac{w_1}{w}\right)\left(1-\tfrac{w_1}{w}\right)\right] \tag{12.19}$$

Como $\frac{w_1}{w}$ es la proporción de éxitos en la población equivale a la probabilidad de éxito p de la distribución binomial con lo cual la media y la varianza serán

$$\mu_R = np \quad \text{y} \quad \sigma_R^2 = \tfrac{w-n}{w-1}[np(1-p)]$$

La varianza de la hipergeométrica difiere de la de la binomial por el término $\frac{w-n}{w-1} = 1 - \frac{n-1}{w-1}$ donde w es el tamaño de la población y n es el tamaño de la muestra y como las dos varianzas difieren por el factor anterior, tenderán a ser iguales cuando $\frac{n-1}{w-1}$ se aproxime a 0, lo que el tamaño de la población w sea muy grande o bien si que n sea muy pequeño.

En resumen, para consideraciones prácticas, la distinción entre las distribuciones hipergeométrica y binomial es importante solamente cuando el tamaño de la población es suficientemente pequeño o el tamaño de la muestra es suficientemente grande de manera que sea una proporción considerable de la población.

Cuando el muestreo se efectúa de un proceso de Bernoulli, se considera que la población es infinita, porque p se mantiene invariable de ensayo a ensayo, entonces el factor

$$f_c = \frac{w-n}{w-1} \tag{12.20}$$

que aparece en la varianza de la hipergeométrica se conoce como el *factor de corrección por poblaciones finitas,* que aparecerá en el capítulo de muestreo.

Ejemplo 12.12 En el laboratorio de análisis estructural del Instituto de Ingeniería se tiene un recipiente con 30 celdas de esfuerzo de las cuáles se sabe que hay 6 defectuosas. Un proyecto de investigación contratado con la SCT, requiere medir el comportamiento de un puente bajo las condiciones de la carga vehicular, se requieren utilizar 10 de dichas celdas que se sacaron del recipiente aleatoriamente.

Si las celdas del recipiente son La probabilidad de que no se utilice ninguna celda defectuosa es $w = w_1 + w_2 = 6 + 24 = 30$ y $n = 0 + 10$ aplicando (12.18) se tiene

$$p(N_1 = 0, N_2 = 10) = \frac{\binom{6}{0}\binom{24}{10}}{\binom{30}{10}} = \frac{1{,}961{,}256}{30{,}045{,}015} = 0.065$$

La probabilidad de que se lleven 3 celdas defectuosas a las pruebas de campo es

$$p(N_1 = 3, N_2 = 7) = \frac{\binom{6}{3}\binom{24}{7}}{\binom{30}{10}} = \frac{6{,}922{,}080}{30{,}045{,}015} = 0.2304$$

Ejemplo 12.13 Un ingeniero constructor está interesado en la marca de cemento que utilizará un una obra, y sus registros reportan que en sus trabajos anteriores se han utilizado 8 veces la marca Monterrey, 7 veces la marca CEMEX y 10 veces la marca

Cruz Azul. Si elige al azar a 10 maestros de obra para preguntarles sobre la marca de cemento preferida, la probabilidad de que 3 elijan el cemento Monterrey, 4 elijan la marca CEMEX y a 3, les guste la marca Cruz Azul es

En este caso $w = w_1 + w_2 + w_3 = 8 + 7 + 10 = 25$ y $n = 3 + 4 + 3 = 10$; aplicando (12.18)

$$p(N_1 = 3, N_2 = 4, N_3 = 3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{7}{4}\binom{10}{3}}{\binom{25}{10}} = \frac{235{,}200}{3{,}268760} = 0.072$$

12.9 La distribución de proporciones

En algunas ocasiones se puede estar interesado en la proporción de éxitos en vez del número de ellos en n ensayos, en cuyo la variable aleatoria Y es la transformación lineal $R = nY$, que al sustituirla en (12.1) nos da la función de probabilidad de la proporción Y

$$p(Y = y|n, p) = \binom{n}{ny} p^{ny}(1-p)^{n-ny} \quad para\ y = o,\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, 1$$

La media y la varianza de Y es $\frac{1}{n}$ veces la media y $\frac{1}{n^2}$ veces la varianza de R, respectivamente; o sea

$$\mu_Y = \frac{1}{n}\mu_R = \frac{1}{n}np = p$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_R^2 = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}$$

Ejemplo 12.14 En el laboratorio de Mecánica se están preparando placas esmaltadas bajo un estricto control que se someterán a una prueba de torsión. Por su experiencia, el líder de proyecto sabe que el 5% de estas placas no pasan la prueba.

Las probabilidades de que en una muestra de tamaño 10 se tengan 0, 1 y menos de 3 defectuosas son, aplicando la distribución binomial con los parámetros,

$$p(R = r|n = 10, p = 0.05) = \binom{10}{r}(0.05)^r(0.95)^{10-r}$$

Para

$p(R = 0|n = 10, p = 0.05) = \binom{10}{0}(0.05)^0(0.95)^{10-0} = (0.95)^{10} = 0.5987$

Para

$p(R = 1|n = 10, p = 0.05) = \binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^{10-1} = (0.05)(0.95)^9 = 0.3151$

Para

$p\big(0 \le R < 3 = \sum_{r=0}^{2}\binom{10}{r}(0.05)^r(0.95)^{10-r}\big) = 0.5987 + 0.3151 + 0.0746 = 0.9884$

Determinemos el tamaño de la muestra para que tengamos el 95% de seguridad de que al menos 5 placas pasen la prueba es

$p(R \leq n - 5) \geq 0.95$ o sea que el número de defectuosos es a lo más 5 menos que el tamaño de la muestra. Inspeccionando en la tabla de la FDA de la binomial se tiene que

Para $n = 5 \rightarrow p(R = 0) = 0.85$ y
Para $n = 6 \rightarrow p(R \leq 1) = 0.97$

Por lo que el tamaño de la muestra es $n = 6$.

12.10 La Distribución uniforme

Hay otros problemas en los cuáles la variable aleatoria R toma un conjunto finito de valores con igual probabilidad de ocurrencia, por ejemplo en el reclutamiento de personal de 10 ingenieros, 5 tuvieron los mismos méritos para ser seleccionados después de pasar las pruebas necesarias, la selección debe hacerse aleatoriamente y asignarle a cada número del 1 al cinco la probabilidad de 0.2. La distribución uniforme se define como

$$p(X = x) = \frac{1}{k} \qquad para\ X = a. a + \Delta, a + 2\Delta, a + 3\Delta + \cdots + (k-2)\Delta, b \qquad (12.21)$$

Donde $(k-1)\Delta = b - a$

La VA X toma valores equidistantes discretos de a a b y la probabilidad constante $\frac{1}{k}$ es el recíproco del número de valores que X puede tomar, de manera que

$$\sum_{x=a}^{b} k^{-1} = 1$$

La media y la varianza de esta distribución son

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \sigma_X^2 = \frac{\Delta^2(k^2-1)}{12} \qquad (12.22)$$

Si $\Delta \rightarrow 0 \ \ y \ \ k \rightarrow \infty$, entonces $(k-1)\Delta = b - a$ y la varianza será

$$\sigma_X^2 = \frac{b-a}{12} \qquad (12.23)$$

Que corresponde a la varianza de la distribución rectangular para la VA continua X.
Esta distribución también se conoce como distribución rectangular, pero este nombre se reservará para las distribuciones continuas.

Ejemplo 12.15 En la selección de dígitos aleatorios 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cada uno tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. En una muestra de tamaño 3, las 3 selecciones fueron mayores que 6. ¿Podemos considerar que este evento es inusual?.
Redefinamos la pregunta como ¿Cuál es la probabilidad de que de 3 elecciones independientes todas sean mayores que 6?

Usando la distribución uniforme tomando en cuenta que $p(X = x) = \frac{1}{10}$ para los 10 dígitos.

$$p(X > 6) = \sum_{x=7}^{9} \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Esta es la probabilidad de éxito p de la distribución binomial, con la cual

$$p\left(R = 3 \middle| n = 3, p = \frac{3}{10}\right) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^0 = 0.027$$

Si establecemos como criterio de "usual" al 95% entonces la base para juzgar lo inusual es 5% o sea 0.05 en probabilidad y, para nuestro caso las 3 elecciones mayores que 6 si es un evento inusual y se debe al azar.

12.11 El proceso de Poisson y su distribución

El capítulo se inició con el estudio de la distribución binomial porque es una de las distribuciones discretas más importante y de uso más frecuente en la estadística, y decidimos dejar para el estudio de la distribución de Poisson hasta el final por la misma relevancia que tiene la distribución binomial en la práctica de la probabilidad y la estadística industrial.

La distribución de Poisson modela la ocurrencia de eventos discretos en intervalos continuos y es de suma utilidad en los problemas de ingeniería, por ejemplo, las grietas por fatiga pueden ocurrir en cualquier punto a lo largo de una placa continua, los sismos pueden ocurrir en cualquier momento y en cualquier lugar de una región sísmica, los accidentes de tránsito pueden ocurrir en cualquier momento de una supercarretera, igualmente es de utilidad en diseños de líneas de espera o la teoría de colas; por ejemplo, el número de llamadas telefónicas que llegan al conmutador de la UNAM en un lapso de 10 min, el número de tormentas por año, el número de imperfecciones en la tela en un tramo de 5 m, etc.

La distribución binomial modela el número de éxitos u ocurrencias de un evento de interés -R- que ocurren en proceso de Bernoulli estacionario e independiente de n ensayos o en una muestra de ese tamaño; sin embargo, en muchas ocasiones no puede observarse una secuencia de los n ensayos tal como sucede en un hospital con el número de fallecimientos ocasionados por determinada enfermedad en un periodo de tiempo establecido; como las observaciones se efectúan en un lapso de tiempo, en un continuo, es difícil pensar estas situaciones en términos de ensayos finitos a pesar de estar interesados en el número de ocurrencias de un evento particular como en el proceso de Bernoulli.

Si el evento puede ocurrir en cualquier instante o en cualquier punto en el espacio, este puede ocurrir más de una vez en un intervalo de tiempo o espacio; en cuyo caso las ocurrencias pueden modelarse más apropiadamente con una *secuencia de Poisson o un proceso de Poisson*. De manera formal un proceso de Poisson debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Un evento puede ocurrir al azar y en cualquier instante o punto del espacio.

2. La ocurrencia de eventos en un intervalo de tiempo o espacio es independiente de cualquier otro intervalo que no se traslapa con el anterior.
3. La probabilidad de ocurrencia de un evento en un intervalo de tiempo o espacio -Δt o Δx- es proporcional a -Δt o Δx- y puede ser dada por $\lambda \Delta t$, donde λ es la tasas media de ocurrencia del evento que se mantiene constante; y la probabilidad de dos o más ocurrencias del eventos en Δt o Δx es despreciable.

Si estamos interesados en el número de ocurrencias de un evento en un periodo de tiempo t o de longitud x, la suposición de que la ocurrencia o no ocurrencia del evento en un intervalo de tiempo o espacio es independiente de la ocurrencia o no ocurrencia en cualquier otro intervalo de tiempo o espacio se conoce como la *suposición de independencia del proceso de Poisson;* y la suposición de estacionalidad consiste en que la probabilidad de ocurrencia del evento en un periodo de tiempo o de longitudes dadas es la misma sin importar donde comience y termine; por lo tanto se dice que la ocurrencia del evento es generada por un proceso de Poisson independiente y estacionario y que la distribución del número de ocurrencias o éxitos R en un periodo de tiempo t o distancia x se da por la distribución de Poisson que se desarrollará a continuación, donde λ se conoce como la intensidad de proceso por unidad de tiempo o de longitud.

Una forma matemática de e ingeniosa de ver esta situación consiste en suponer que estamos interesados en el número de ocurrencias de un evento particular E en un lapso de tiempo de duración t y dividir t en n intervalos iguales de duración t/n y considerarlos como n ensayos independientes y estacionarios de un proceso de Bernoulli. Si conocemos la probabilidad de éxito p que es la probabilidad de ocurrencia de E de algún ensayo específico, podemos calcular las probabilidades de R, donde el número esperado de éxitos es np según se vio en la distribución binomial.

Como las probabilidades ocurren en varios instantes de t debemos prevenirnos que no ocurran más de dos éxitos en un ensayo de longitud t/n puesto que el proceso de Bernoulli solo considera la ocurrencia o no ocurrencia de un éxito en cada ensayo; para tomar en cuenta esta previsión n se hace más grande con lo cual las longitudes t/n se harán más pequeñas y para que np se mantenga constante, p debe ser más pequeño. Esto nos hace ver, la necesidad de utilizar límites cuando $n \to \infty$ y $p \to =$ en la distribución binomial para encontrar la distribución de Poisson.

En efecto, primero definamos $\theta = np$ de donde $p = \frac{\theta}{n}$ y $q = 1 - \frac{\theta}{n}$, que al sustituirla en la ecuación de la binomial se tiene

$$P(R = r|\theta) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{\theta}{n}\right)^r (1 - \frac{\theta}{n})^{n-r}$$

Trabajando con el lado derecho de la ecuación

$$= (1 - \frac{\theta}{n})^n \left(\frac{\theta^r}{r!}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\theta}{n}\right)^{-r}$$

Y, cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$(1 - \frac{\theta}{n})^n \to e^{-\theta}$$

Cada uno de los términos $\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots,\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\ y\ \left(1-\frac{\theta}{n}\right)^{-r} \to 1$

Entonces el límite $\lim_{n\to\infty} P(R=r|\theta)=\frac{\theta^r e^{-\theta}}{r!}$ es decir,

$$P(R=r|\theta)=\frac{\theta^r e^{-\theta}}{r!} \qquad \text{Para } R=0,1,2,3\ldots \qquad (12.24)$$

Para introducir el periodo de tiempo para las observaciones de interés, es común sustituir $\theta=np$ por $\theta=\lambda t$ con lo cual se tiene

$$P(R=r|\lambda t)=\frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!} \qquad \text{Para } R=0,1,2,3\ldots \qquad (12.24')$$

Donde λ es la intensidad de proceso y es la tasa esperada de ocurrencia de los éxitos por unidad de tiempo y t es el periodo observación. Más aún, la distribución de Poisson puede generalizarse para cualquier VA continua diferente del tiempo con

$$P(R=r|\lambda x)=\frac{(\lambda x)^r e^{-\lambda x}}{r!} \qquad \text{Para } R=0,\ 1\ 2,\ 3\ldots \qquad (12.24'')$$

Las ecuaciones (12.24) a (12.24'') son las diferentes expresiones de la Distribución de Poisson cuyos parámetros particulares de la familia son λ y x, y, al igual que la distribución binomial, los valores pueden encontrar en las tablas mencionadas anteriormente. En particular esta distribución puede consultarse en la página

http://dcb.fi-c.unam.mx/profesores/irene/Notas/tablas/PoissonAc.pdf

Calculemos los parámetros generales a partir de la ecuación (12.24) considerando $r=x$.

Ya demostramos en la sección x del capítulo y que la función generadora de momentos de esta distribución es

$$M_x(s)=e^{\theta(e^s-1)}$$

Las dos primeras derivadas respecto a s y evaluándolas en $s=0$ se tiene

$$\mu_1'=\frac{dM_x(s)}{ds}|_{s=0}=e^{\theta(e^s-1)}\theta e^s|_{s=0}=\theta$$

$$\mu_2'=\frac{d^2M_x(s)}{ds^2}|_{s=0}=\left\{e^{\theta(e^s-1)}[\theta e^s+(\theta e^s)^2]\right\}|_{s=0}=\theta^2+\theta$$

Con los cuáles

$$\mu_R=\theta=\lambda t \quad \text{y} \quad \sigma_R^2=\theta^2+\theta-\theta^2=\theta=\lambda t \qquad (12.25)$$

Por el mismo procedimiento, calculando la tercera y curta derivadas de la función generadora de momentos $M_x(s)$ y evaluándolas en $s=0$ se obtienen μ_3' y μ_4' que sustituyéndolas en la ecuación x que está en la sección z de los momentos se obtienen

$\mu_3 = \theta$ y $\mu_4 = \theta(1 - 3\theta)$ con los que las razones de momentos o los parámetros de sesgo y de curtosis son

$$\alpha_3 = \theta^{-1/2} = (\lambda t)^{-1/2} \qquad (12.26)$$

$$\alpha_4 = 3 + \theta^{-1} = 3 + (\lambda t)^{-1} \qquad (12.27)$$

Ejemplo 12.16 Supóngase que los registros históricos de la costa del Golfo de México reportan que en promedio ha habido 5 huracanes al año en los últimos 25 años. Determinemos la probabilidad de que el próximo año no haya huracanes.

Este fenómeno puede modelarse conforme un proceso de Poisson con una intensidad de $\lambda = 5\ huracanes/año$, y nos piden la probabilidad de que en $t = 1$ -el próximo año- no haya huracanes; entonces $\lambda t = 5$ y aplicando la ecuación (12.24') se tiene

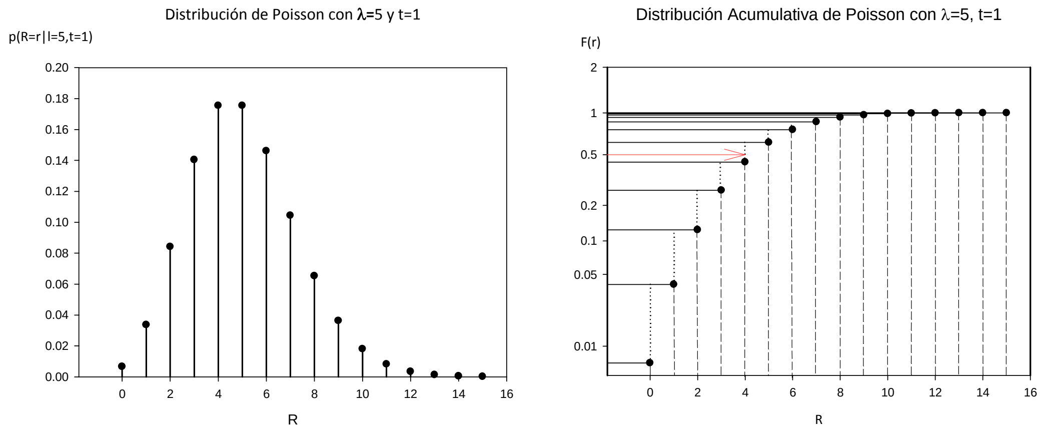
$$P(R = 0|\lambda t = 5) = \frac{(5)^0 e^{-5}}{0!} = 0.0067$$

La probabilidad de que el próximo año ocurran exactamente 5 huracanes es

$$P(R = 5|\lambda t = 5) = \frac{(5)^5 e^{-5}}{5!} = 0.1755$$

La distribución de probabilidad completa junto con la función de distribución acumulada aparece en la tabla 12.2, y en la figura 12.4 se muestran las funciones de distribución y la de distribución acumulada.

R	P(R=r)	F(r)
0	0.0067	0.0067
1	0.0337	0.0404
2	0.0842	0.1246
3	0.1404	0.2650
4	0.1755	0.4405
5	0.1755	0.6160
6	0.1462	0.7622
7	0.1044	0.8666
8	0.0653	0.9319
9	0.0363	0.9682
10	0.0181	0.9863
11	0.0082	0.9945
12	0.0034	0.9979
13	0.0013	0.9992
14	0.0005	0.9997
15	0.0002	0.9999



(a) (b)

Figura 12.4 la FMP (a) y la FDA (b) de Poisson con $\lambda = 5$ y $t = 1$

Calculemos algunos de los parámetros de esta distribución.

La media: $\mu_R = \lambda t = 5(1) = 5$

La mediana: Si se observa la tabla o la gráfica 12.4 (b) e, rango donde se encuentra la mediana es [4, 5] por lo que una aproximación de ella es situarla en el punto medio. $\mu_m = \frac{4+5}{2} = 4.5$

Lo mismo sucede con la moda al observar la figura 12.4 (a), tiene un número infinito de modas en el mismo intervalo, por lo que una aproximación es el valor medio del intervalo. $\mu_{mo} = \frac{4+5}{2} = 4.5$

Para calcular la varianza aplicamos la ecuación (12.25): $\sigma_R^2 = 5$

La desviación estándar: $\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2} = \sqrt{5} = 2.2361$

El coeficiente de variación: $\delta_R = \frac{\sigma_R}{\mu_R} = \frac{2.2361}{5} = 0.4472$

El parámetro de sesgo, con la ecuación 12.26, $\alpha_3 = (\lambda t)^{-1/2} = (5)^{-1/2} = 0.4472$ lo que nos indica que la distribución tiene un sesgo positivo o sea que tiene la cola hacia la derecha como ciertamente se observa en la figura 12.4 a). Cabe observar que este parámetro es igual al coeficiente de variación.

El parámetro de curtosis o aplanamiento, con la ecuación 12.27,

$\alpha_4 = 3 + (5)^{-1} = 3.2$

Lo que nos señala que este miembro de la familia de Poisson es mas picuda que la distribución normal estándar que es la distribución de referencia.

12.12 Bibliografía y referencias

Ang A. Tang W. (1975) *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, John Wiley & Sons, USA.

DeVore J. (2005), *PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA para ingeniería y ciencias*, International Thomson Editores, México.

Hines W. Montgomery D. (1980), *PROBABILITY AND STATISTICS IN ENGINEERING AND MANAGEMENT SCIENCE*, 2nd. ED., John Wiley &Sons, Canada.

Johnson N. Leone F. (1977), ***Statistics and Experimental design****, in Engineering and Physical Sciences*, Vol. I, Second Edition, John Wiley &. USA.

Olkin I. Gleser L. Derman C. (1980), *PROBABILITY MODELS AND APPLICATIONS*, Macmillan Publishing, USA.

Wackerly D. Mendenhall W. Scheaffer R. (2002), *ESTADÍSTICA MATEMÁTICA con aplicaciones*, sexta edición, International Thomson Editores, México.

Winkler R. Hays W. (1971), ***Statistics****, probability, inference, and decision*, second edition, HOLT, RINEHART AND WINSTON, USA.

Nombre de archivo: cap12 DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS1.docx
Directorio: C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\g-1) Capítulos de mi libro de Probabilidad y estadística 2007-2009
Plantilla: C:\Documents and Settings\bfc\Datos de programa\Microsoft\Plantillas\Normal.dotm
Título:
Asunto:
Autor: fACULTAD DE INGENIERÍA
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 19/11/2009 17:07:00
Cambio número: 17
Guardado el: 18/06/2010 17:57:00
Guardado por: FACULTAD DE INGENIERÍA
Tiempo de edición: 240 minutos
Impreso el: 30/08/2010 13:07:00
Última impresión completa
Número de páginas: 24
Número de palabras: 7,719 (aprox.)
Número de caracteres: 42,456 (aprox.)