CAPÍTULO 11
PARÁMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

11.1 Introducción

Tanto para las variables aleatorias discretas como continuas, en la teoría de la probabilidad se estudian dos clases de distribuciones:

Las funciones de distribución de las variables aleatorias que se llamarán distribuciones de las poblaciones, y las distribuciones muestrales que, a mi juicio constituyen es eslabón entre la teoría de la probabilidad y el análisis estadístico; mientras que por el lado de la estadística generalmente se estudian las distribuciones de las muestras, conocidas como distribuciones de frecuencia.

Es muy frecuente que se confundan, incluso en la notación, los valores que caracterizan a estas distribuciones; por lo cual el presente capítulo tiene como objetivo estudiar los parámetros de las distribuciones de la población, en el capítulo final de la parte concerniente a la teoría de la probabilidad se estudiarán las distribuciones muestrales – también conocidas como las distribuciones de las muestras; y, en los capítulos iniciales del análisis estadístico, se estudiará la estadística descriptiva donde se introducen las distribuciones de frecuencia. La Figura 11.1 representa a las tres distribuciones mencionadas.

En este y los capítulos dedicados a los modelos de probabilidad, nos enfocaremos a las distribuciones de las poblaciones de las variables aleatorias discretas y continuas y, en particular, el presente capítulo está dedicado a los parámetros de las distribuciones, aplicando el valor esperado y sus propiedades, así como los momentos que estudiamos en el capítulo anterior. Dichos modelos solamente los ensuciaremos y los utilizaremos como ejemplos, pero en los capítulos siguientes los estudiaremos a profundidad.

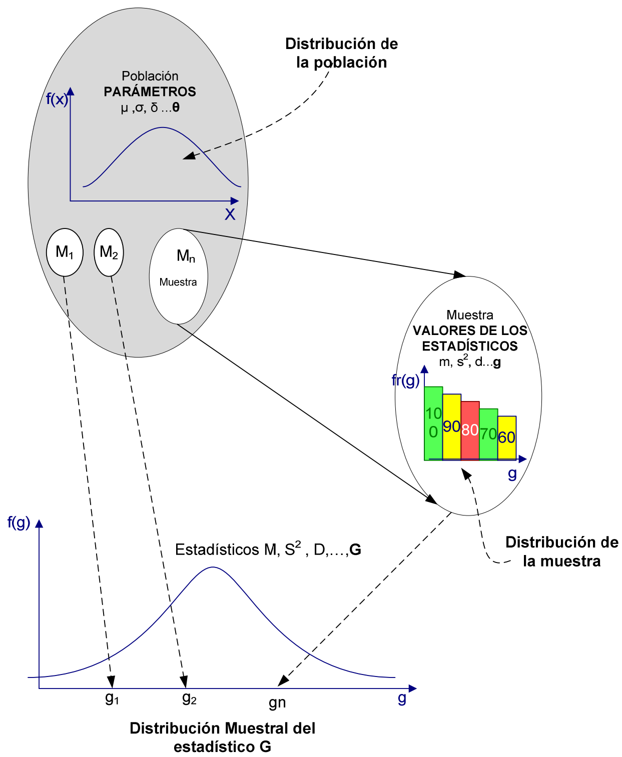


Figura 11.1 Las tres distribuciones de la probabilidad y la estadística

11.2. Parámetros

Hasta ahora hemos definido las características probabilísticas de la variable aleatoria, a través de de las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias; ya sea mediante la Función Masa de Probabilidad –FMP o fmp- para el caso de las VA's discretas; o a través de las Función de Densidad de Probabilidad -FDP o fdp- para las VA's continuas; sin embargo, es sumamente útil representar tal comportamiento utilizando un conjunto de descriptores a los cuáles se les llamará *parámetros generales de la distribución;* y, mediante ellos, es posible determinar dichas características probabilísticas de la variable aleatoria en términos de descriptores generales que describen su localización o tendencia central, la dispersión de los valores de la variable, su sesgo y su aplanamiento.

Por otro lado, puesto que trabajaremos con *familias de distribuciones,* tales parámetros generales son funciones de otros parámetros propios de la distribución bajo estudio a los cuales se les asignan valores numéricos que sirven para identificar al miembro de la familia de las distribuciones que nos interesa estudiar. En suma, existen dos tipos de parámetros, los generales que permiten encontrar las medidas de localización, dispersión, sesgo y aplanamiento; y los parámetros particulares que permiten seleccionar a un miembro de la familia. Como se verá adelante, los parámetros generales son funciones de los parámetros particulares de la distribución bajo estudio.

Como se observa en la Figura 11.1, *los parámetros generales se representan por medio de letras griegas minúsculas* y caracterizan a la distribución de la población; los parámetros particulares se simbolizan con letras del alfabeto español; más aún, las distribuciones muestrales o distribuciones de las muestras, también tienen parámetros que se designan con letras griegas minúsculas puesto que emergen de las muestras aleatorias contenidas en la población como se verá más adelante; en tanto que las medidas de localización, dispersión, sesgo y aplanamiento de las distribuciones de frecuencia NO tienen parámetros, sino valores de los estadísticos que se denotan con letras del abecedario o alfabeto español o castellano.

Ejemplo 11.1 Si el tiempo de vida de un sistema eléctrico de potencia se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[a, b]$ cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k \;\; si \;\; a \leq x \leq b \\ 0 \;\; para\ otros\ casos \end{cases}$$

Determinemos el valor de k:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b kdx = k(b-a) \;\; \therefore \;\; k = \frac{1}{b-a}$, y la función de densidad será entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \;\; si \;\; a \leq x \leq b \\ 0 \;\; para\ otros\ casos \end{cases} \tag{11.1}$$

Donde a y b son los parámetros particulares de esta función de densidad uniforme.

Ahora, uno de los parámetros generales de esta función es la media o el valor esperado de X, cuya expresión general es:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx \;\therefore\; \mu_X = \frac{b+a}{2} \qquad (11.2)$$

Debemos observar lo siguiente:

- μ_X es un *parámetro general* de localización de la variable aleatoria;
- $\mu_X = f(a,b) = \frac{b+a}{2}$ es una función de los *parámetros particulares (a, b)* de la distribución.

Obsérvese que μ_X representa una familia de distribuciones uniformes que tiene dos parámetros $-a$ y b- y al darle valores identificará a los miembros de la familia que nos interesan; así,

Si $a = 80$ y $b = 120$ se tiene $\mu_1 = f(80{,}120) = \frac{120+80}{2} = 100$

Si $a = 130$ y $b = 170$ se tiene $\mu_2 = f(130{,}170) = \frac{130+170}{2} = 150$

Que corresponden a las medias de dos miembros de la familia de distribuciones con medias o medidas de localización diferentes como se observa en la figura 11.2

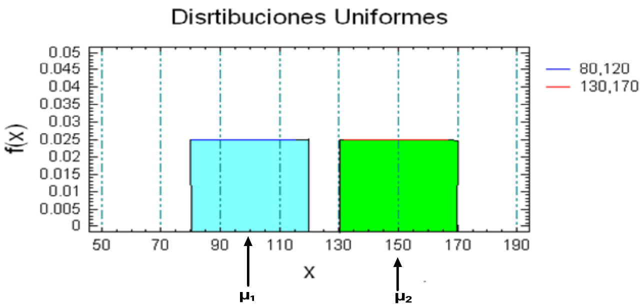


Figura 1. Dos miembros de la familia de la distribución Uniforme

Figura 11.2 Dos miembros de la familia de la distribución Uniforme

En resumen, las medias μ_1 y μ_2 son parámetros de localización, en tanto que a y b son parámetros particulares de la distribución Uniforme; sin embargo nos referiremos a ellos como parámetros solamente.

11.3 Parámetros de tendencia central o medidas de localización

Como su nombre lo indica, estos parámetros nos dan el valor de la variable aleatoria en el cual se localiza o se considera que está concentrada su distribución. Los principales parámetros de localización son:

$$\text{Parámetros de localización} \begin{cases} media \begin{cases} probabilística \\ aritmética \\ geométrica \\ armónica \\ cortada \end{cases} \\ mediana \\ moda \end{cases}$$

11.3.1 La media Probabilística o Media -μ_X o μ-

La media probabilística de una distribución de probabilidades de una variable aleatoria se define como el valor esperado de la variable aleatoria X, es igual a la suma ponderada de los valores de la variable aleatoria X pesados por sus probabilidades correspondientes, es el primer momento respecto al origen que estudiamos en el capítulo anterior y, como es de uso común en la teoría de la probabilidad, suele eliminarse el apóstrofo -'- por lo que se simboliza mediante μ_X o μ, en vez de μ'_X. Por lo visto en el capitulo anterior:

$$\mu_X = \mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \tag{11.3}$$

para las variables aleatorias discretas; y,

$$\mu_X = \mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{11.4}$$

para las variables aleatorias continuas.

La interpretación física de $E[X]$ es el centro de gravedad de la distribución de las masas lo que justifica su uso como una medida del centro de la distribución o medida de localización; más aún, como los valores $x_i m(x_i)$ son los primeros momentos de inercia respecto al origen, se justifica que $\mu_X = \mu$ sea el primer momento respecto al origen.

Ejemplo 11.2 Con referencia al ejercicio anterior, si se observa la figura 11.2, $\mu_1 = 100\ y\ \mu_2 = 150$ son los valores de las variables aleatorias donde están centradas las distribuciones.

Ejemplo 11.3 Una empresa constructora adquiere 3 grúas que necesita para la construcción de una obra de infraestructura por realizarse, y el vendedor afirma que, conforme sus registros históricos, por lo menos el 80% de sus grúas permanecen sin falla durante cuatro años; la FMP se muestra en la tabla 11.1 y su representación gráfica en la figura 11.3. Se desea conocer el número esperado de grúas que no fallan durante los cuatro años que durará la obra; o sea la media μ_X –parámetro general- de número de grúas –x- que efectivamente a los cuatro años continuarán en buen estado.

Cabe observar que el cálculo de las probabilidades de la FMP se efectúa modelando el problema mediante una distribución Binomial, como se verá en los siguientes capítulos.

En este caso, los parámetros particulares que caracterizan a la distribución son $p = 0.8$ y $n = 4$; que corresponden a la probabilidad de que las grúas operen satisfactoriamente por lo menos cuatro años, dictada por el vendedor, y el número posible de grúas que efectivamente aperarán durante dicho periodo, respectivamente.

Aplicando (11.1) tenemos:

$$\mu_X = \mu = E[X] = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.386) + 3(0.512) = 2.4$$

Cabe observar que:

1. La media es $\mu_X = 2.4$, es el valor de localización o el centro de la FMP, se representa en la figura 11.3 con una flecha y los cálculos con Excel en la tabla 11.1;

2. la media es un valor de la variable aleatoria, que NO está contenido en los valores de X, como suele suceder con las variables aleatorias discretas;

3. mueve a reflexión la interpretación física de la media, para este y otros problemas de variables discretas; pues en realidad ¿puede haber 2.4 grúas operando después de los cuatro años? Esta situación nos lleva a la necesidad de definir otras medidas de tendencia central apropiadas para estas situaciones.

Tabla 11.1 Cálculo de la media y la varianza de la FMP para $p = 0.8$ y $n = 4$.

x	x^2	p	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2\, p(x)$
0	0	0.8	0.008	0	0
1	1	0.8	0.096	0.096	0.096
2	4	0.8	0.384	0.768	1.536
3	9	0.8	0.512	1.536	4.608
			1	2.4	6.24
	Media = $\mu_X =$	2.4			
	Varianza $\sigma_X^2 =$	0.48			

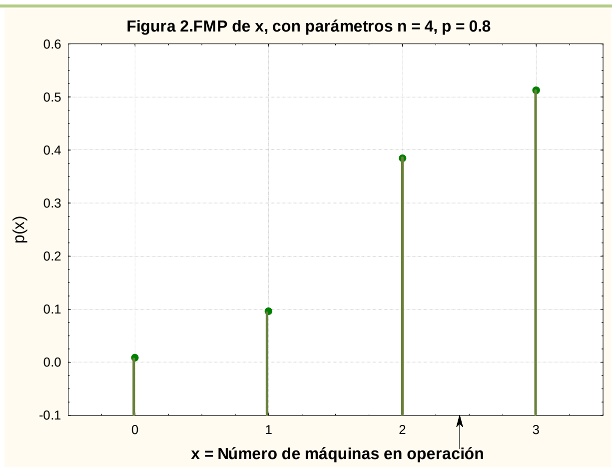


Figura 11.3 FMP de la Distribución Binomial con $p = 0.8$ y $n = 4$

Ejemplo 11.4 Seleccionemos otro miembro de la familia de estas distribuciones cambiando el parámetro particular de $p = 0.8$ a $p = 0.90$, lo que indica que el proveedor de las grúas garantiza que el 90% de éstas se mantienen operando al menos cuatro años.

El parámetro general media o el valor de localización resulta:

$$\mu_X = \mu = E[X] = 0(0.001) + 1(0.027) + 2(0.243) + 3(0.729) = 2.7$$

Cuyo valor está representado en la figura 11.4 con una flecha en la parte baja y los cálculos en Excel, en la tabla 11.2.

Tabla 11.2. Cálculo de la media y la varianza de la FMP para $p = 0.9$ y $n = 4$.

x	x^2	p	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2\,p(x)$
0	0	0.9	0.001	0	0
1	1	0.9	0.027	0.027	0.027
2	4	0.9	0.243	0.486	0.972
3	9	0.9	0.729	2.187	6.561
			1	2.7	7.56
	Media=	2.7			
	Varianza=	0.27			

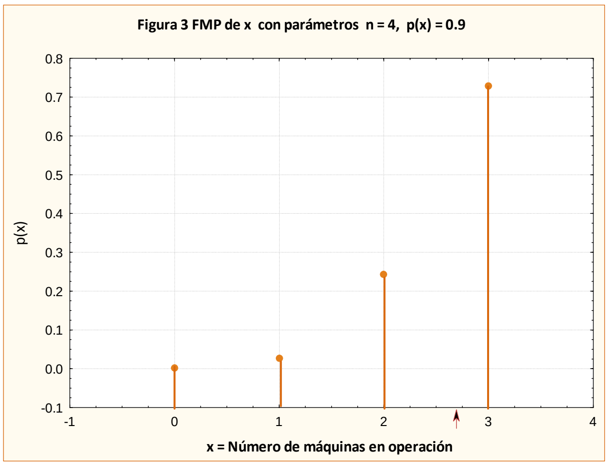


Figura 11.4 FMP de la Distribución Binomial con $p = 0.9$ y $n = 4$

.

Ejemplo 11.5 Si la duración de la obra –en años- que se realizará con las grúas del ejercicio 3 puede modelarse con la variable aleatoria T cuya función de Distribución Acumulativa –FDA-es -ver figura 11.5 (a)-:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 1 \\ t^2 - 2t + 1 & para\ 1 \le t \le 2 \\ 1 & para\ t > 2 \end{cases}$$

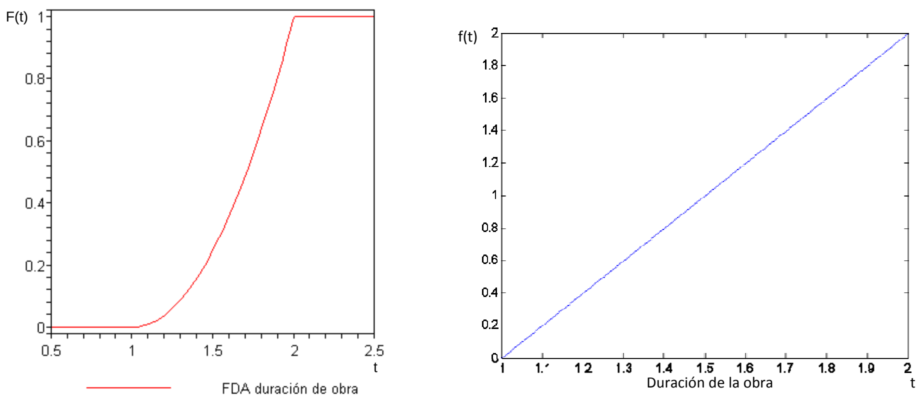
Para calcular la media de la distribución de T, determinemos primero la función de densidad:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dx} = \frac{d(t^2-2t+1)}{dt} = \begin{cases} 0 & para\ t < 1 \\ 2t-2 & para\ 1 \le t \le 2 \\ 1 & para\ t > 2 \end{cases}$$ -ver figura 11.5 (b)-

En efecto: $\int_1^2 (2t-2)dt = 1.$

Aplicando (11.2): $\mu_T = E[T] = \int_1^2 t(2t-2)dt = [\frac{2t^3}{3} - t^2]|_1^2 = 1.66$

Cabe observar que, a diferencia de los ejemplos 3 y 4, el valor de la media SI pertenece a la distribución de la variable aleatoria; lo que es común en el caso de las variables aleatorias continuas.



(a) (b)

Figura 11.5 Las funciones de distribución acumulada y de densidad de la duración de la obra

11.3.2 La media aritmética o promedio -μ_a-

También se conoce como *el promedio*, se aplica a los valores de las variables aleatorias discretas de poblaciones finitas y se define como la suma de todos sus valores dividida entre el número valores:

$$\mu_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (11.5)$$

Obsérvese que esta expresión es una variante de la definición de media general dada en la expresión (11.1) lo que significa que la distribución es uniforme con $p = \frac{1}{n}$; esta media aritmética resume la información de la distribución suponiendo que cada observación tendría la misma cantidad de la variable, y, al igual que la media, se afecta considerablemente por los valores extremos de la distribución en sentido directo; es decir, los valores muy altos tienden a aumentarla mientras que valores muy bajos tienden a disminuirla, lo que implica que puede dejar de ser representativa de la población.

Ejemplo 11.6 Con relación a los ejemplos 3 y 4, de la empresa constructora que adquiere 3 grúas, los valores de la variables aleatoria del número de grúas que permanecen sin falla después de custro años son: 0, 1, 2, y 3; las medias aritméticas son iguales:

$$\mu_a = \frac{0+1+2+3}{4} = 1.5$$

Cabe observar que esta media aritmética calculada considera $p = \frac{1}{4}$ y está afectada por el valor de $x = 0$.

Ejemplo 11.7 Un viajero desea ir de la ciudad A a la B. La FMP de T -el tiempo de viaje en hrs.- se presenta en la tabla 11.3, se desea calcular la media y la media aritmética.

Tabla 11.3 Función masa de probabilidad del tiempo de viaje

t	1	2	3	4
p(t)	0.2	0.4	0.3	0.1

La media de T es: $\mu_T = 1(0.2) + 2(0.4) + 3(0.3) + 4(0.1) = 2.3$

La media de T es: $\mu_a = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$

11.3.3 La media geométrica -μ_g-

Esta media también se aplica a variables aleatorias discretas siempre y cuando no contengan el valor 0, contesta a la pregunta: si todas las cantidades fueran iguales, ¿cuál sería esa cantidad de forma que el producto fuera el mismo?, y se define la raíz n-ésima del producto de los valores de dicha variable.

$$\mu_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \tag{11.6}$$

El logaritmo de la media geométrica es igual a la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable.

La media geométrica tiene las ventajas de que considera todos los valores de la distribución y es menos sensible que la media y media aritmética a los valores extremos; en cambio, sus principales desventajas son que su significado estadístico menos intuitivo de la media aritmética, el cálculo es más difícil, no está determinada para $x_i = 0$, y sólo es relevante si todos los números son positivos. Su principal utilidad consiste en a su trasformación en el manejo estadístico de variables con distribución no normal y cuando varias cantidades son multiplicadas para producir un total.

Ejemplo 11.8 La media geométrica de los valores de T del ejemplo anterior es

$$\mu_g = \sqrt[4]{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2.21.$$

Obsérvese que para el ejemplo 3 del número de grúas, su media geométrica es cero.

Con base en los dos ejemplos anteriores se desprende -y en lo general puede demostrarse- que la media aritmética siempre es igual o superior a media geométrica:

$$\mu_a \geq \mu_g$$

11.3.4 La media armónica -μ_h-

Al igual que la anterior, se utiliza para variables aleatorias discretas finitas que no contengan el 0 y es igual al recíproco, o inverso, de la media aritmética de los recíprocos de los valores de la VA:

$$\mu_h = \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \qquad (11.7)$$

Las principales ventajas que tiene esta media son que resulta poco influida por la existencia de valores mucho más grandes que el conjunto de los restantes, considera todos los valores de la distribución y -en ciertos casos- es más representativa que la media aritmética; en cambio, las principales desventajas consisten en la influencia de los valores pequeños, no está determinada en las distribuciones con valores iguales a cero; por eso no es aconsejable su empleo en distribuciones en existan valores muy pequeños. Suele utilizarse para promediar velocidades y tiempos.

Ejemplo 11.9 Para el ejemplo 7. del viajero que desea ir de la ciudad A a la B, la media armónica es :

$$\mu_h = \frac{4}{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{48}{25} = 1.92$$

Obsérvese que para el ejemplo 3 del número de grúas, su media armónica no está determinada.

11.3.5 Media Cuadrática, valor cuadrático medio o RMS -μ_c-

Es una medida de localización de la magnitud de una cantidad variable que puede calcularse para variables aleatorias discretas -que incluyen el cero o valores negativos-, o continuas; y se define como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores:

$$\mu_c = RMS_X = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{N}} \quad \text{para variables aleatorias discretas} \qquad (11.8)$$

$$\mu_c = RMS_T = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)^2\,dt \quad \text{para variables aleatorias continuas} \qquad (11.9)$$

Cuando la variable toma valores positivos y negativos -como ocurre en los errores de las mediciones- la media cuadrática no recoge los efectos del signo porque los signos negativos desaparecen; esta media proporciona la unidad de medida original.

Ejemplo 11.10 Con referencia al ejercicio 7, la media cuadrática es:

$$\mu_c = RMS_X = \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4}}; = \sqrt{\frac{30}{4}} = 2.74$$

Y, con referencia al ejercicio 3, del número de grúas que permanecen en operación después de cuatro años:

$$\mu_c = RMS_X = \sqrt{\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{4}}; = \sqrt{\frac{14}{4}} = 1.87$$

Ejemplo 11.11 Para la duración de la obra –Ejemplo 5- la función de densidad la variable aleatoria T es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 1 \\ 2t-2 & para\ 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & para\ t > 2 \end{cases}$$

Cuya media cuadrática será:

$$\mu_c = RMS_T = \frac{1}{2-1}\int_1^2 (2t-2)^2\, dt = \int_1^2 (4t^2-4t+4)\, dt = (4t^2-4t+4)\big|_1^2 = 1.33.$$

11.3.6 La Media Generalizada

La expresión general que sintetiza las expresiones particulares de las medias aritmética, armónica y cuadrática, en términos del parámetro m es:

$$\mu(m) = \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^m} & si\ m \neq 0 \\ \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} & si\ m = 0 \end{cases}$$

En donde el parámetro m define a:

- La media aritmética si $m = 1$
- La media geométrica si $m = 0$
- La media armónica si $m = -1$
- La media cuadrática si $m = 2$

Obsérvese que para valores de $m \leq 0$ la expresiones generales sólo tiene sentido si los $x_i \geq 0$.

11.3.7 Media Truncada -μ_t-

En virtud de que la media μ_X -ponderada por las probabilidades- es muy sensible a los valores extremos de la variable aleatoria, entonces se tiene otra medida de localización conocida como la media truncada. Para estudiarla definamos previamente a los cuantiles o fractiles de una distribución de probabilidades.

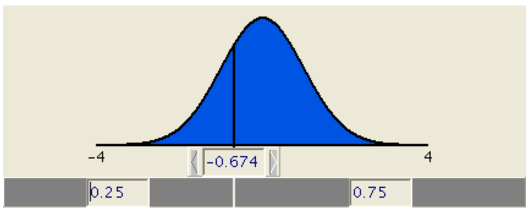
11.3.7.1 Cuantiles o fractiles

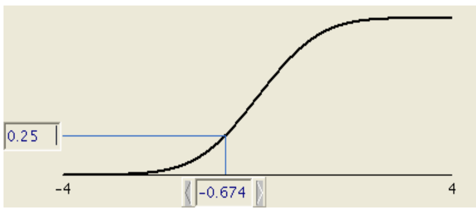
$$\text{Si } F(\alpha) = p(X \leq f) \geq \alpha \quad y \quad p(X \geq f) \geq 1-\alpha \tag{11.10}$$

Entonces f **es un fractil o cuantil de la distribución de X que, hasta ese valor acumula la cantidad de probabilidad α** Cabe observar que el fractil f es un valor de la variable aleatoria X y α es una probabilidad. La notación que seguiremos para los fractiles será f_α y significa el valor de la variable aleatoria la probabilidad α. Así, $f_{0.25}$ **es el valor de la variable aleatoria que hasta ese punto acumula la probabilidad 0.25;** $f_{0.95}$ **es el valor de la variable aleatoria que hasta ese punto acumula la probabilidad 0.95.**

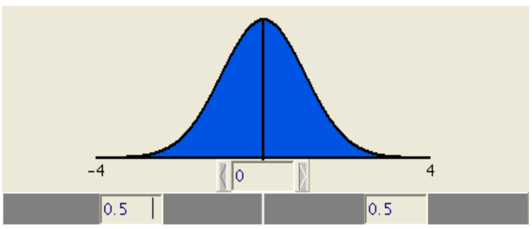
En otros términos, los fractiles son valores de la variable aleatoria que *fraccionan probabilísticamente* a la distribución de manera tal que, a la izquierda del fractil se tiene la probabilidad acumulada dictada por α; así, se tiene solamente un fractil que fracciona en dos a la distribución, que se llama la *mediana* y se estudiará más abajo; los tres fractiles que dividen en cuatro a la distribución se llaman *cuartiles*, los que la dividen en 10 son nueve y se llaman *deciles;* y los que la fraccionan en 100 se denominan percentiles y son 99.

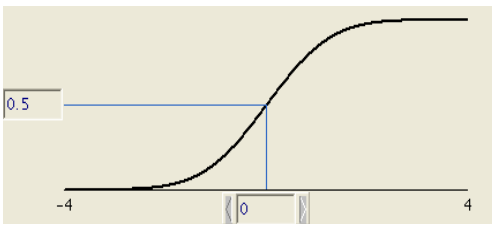
La figura 11.6 ilustra los tres cuartiles de la distribución normal estándar, en donde las funciones de densidad indican el valor del cuartil y las probabilidades a su izquierda y a su derecha; así, en la gráfica 11.6 (a) $f_{0.25} = -0.674$ -que es un valor de la variable aleatoria-, a la izquierda de este punto se tiene la probabilidad acumulada 0.25 y a su derecha la probabilidad $1 - 0.25 = 0.75$. Por otro lado en la gráfica 11.6 (b) aparece la FDA en la que para $F(0.25)$ correspondiente $f_{0.25} = -0.674$.



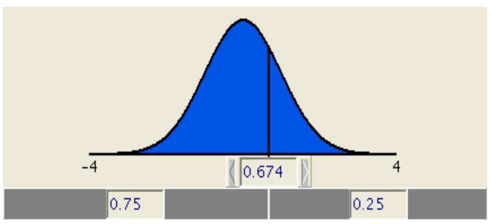


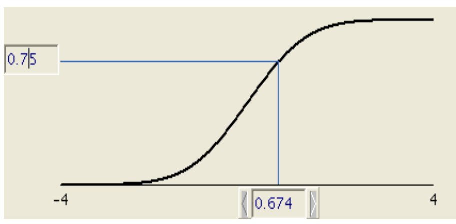
(a) (b)





(c) (d)





(e) (f)

Figura 11.6. Los tres cuartiles de la distribución normal estándar

Ejemplo 11.12 Para el Ejemplo 5 de la duración de la obra, la Distribución Acumulativa –FDA es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 1 \\ t^2 - 2t + 1 & para\ 1 \le t \le 2 \\ 1 & para\ t > 2 \end{cases}$$

Entonces, el fractil 0.25 es el valor de T para el cual se satisface:

$$F(t) = p(T \le t) \ge 0.25 \quad y \quad p(X \ge t) \ge 1 - 0.25 = 0.75$$

$t^2 - 2t + 1 = 0.25$ O $t^2 - 2t + 0.75 = 0$

Al resolver esta ecuación cuadrática se obtienen los valores de t 0.5 y 1.5; sin embargo, el primero no es aplicable porque no satisface la definición, situación que no sucede con el valor de 1.5, como puede constatarse en la figura 11.7, trazando una recta horizontal en $F(t) = 0.25$ y una vertical donde intercepta a la función $F(t)$. De igual forma, para el fractil 0.75 se tiene $t^2 - 2t + 1 = 0.55$ o $t^2 - 2t + 0.25 = 0$, que al resolverla se obtienen los valores de t 0.13 y 1.87; por lo que los fractiles son $f_{0.25} = 1.5$ y $f_{0.75} = 1.87$.

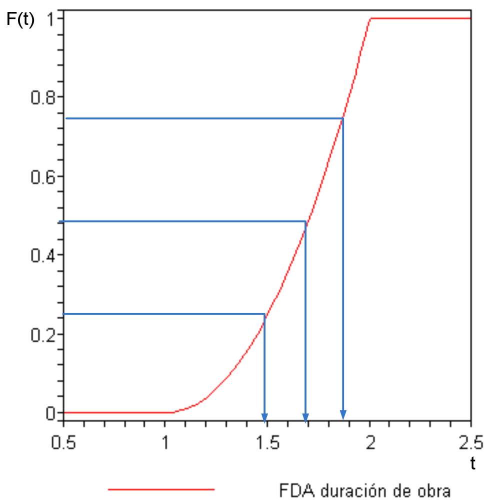


Figura 11.7 La FDA de la duración de la obra T con los fractiles 0.25, 0.5 y 0.75

Para el caso de las variables aleatorias continuas si hay correspondencia uno a uno entre los valores de X y los fractiles; situación que puede no suceder con las variables aleatorias discretas como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.13 Considérese la FDA de una variable aleatoria discreta que se ilustra en la figura 11.8, si se observa, los cuartiles $f_{0.25} = 2.5\ y\ f_{0.50} = 3$ están perfectamente definidos; por su parte, el cuartil $f_{0.75}$ tomo una infinidad de valores entre 4 y 5. Para tener un valor que caracterice este cuartil, aunque existe el método de interpolación más preciso que se estudiará más adelante, es práctica común tomar el punto medio con lo cual $f_{0.75} = \frac{4+5}{2} = 4.5$, que se ilustra en dicha figura.

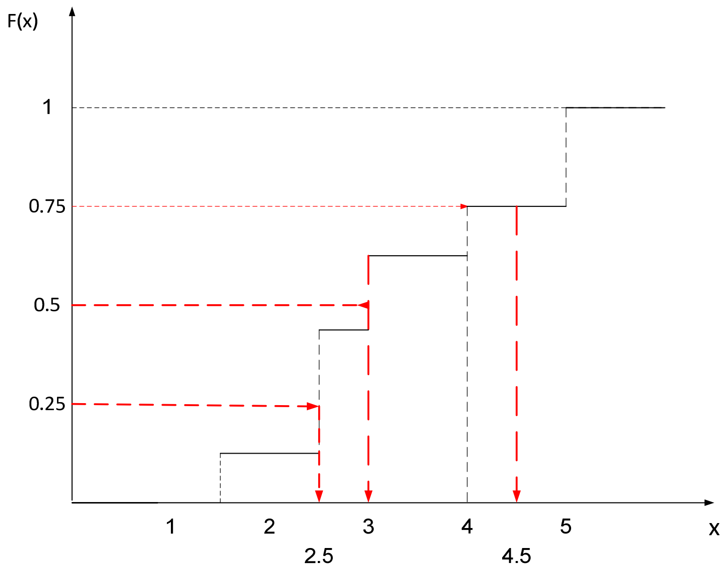


Figura 11.8. FDA de una variable aleatoria discreta con los fractiles 0.25, 0.5 y 0.75

Con estos antecedentes acerca de los fractiles, definimos **la media truncada** como el promedio de los valores que no toman en cuenta a los que están antes del primer cuartil y después del tercero, lo que requiere calcular nuevas FMP o la FDP, ajustadas por la pérdida de las probabilidades de los valores eliminados como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.14 La FMP de T -el tiempo de viaje en hrs.- que se presenta en la tabla corresponde al ejemplo del viajero que desea ir de la ciudad A a la B.

t	**1**	**2**	**3**	**4**
p(t)	0.2	0.4	0.3	0.1

Obsérvese que al eliminar los valores 1 y 4, que están fuera del rango intercuartilítico, y calculamos la media:

$\mu_t = 2(.4) + 3(.3) = 1.7$, valor que está fuera de dicho rango, donde debe estar la media truncada; esto sucede a que las probabilidades de 2 y 4 No conforman una FMP, por lo que se debe redefinir.

Para tal efecto, sumamos las probabilidades a la izquierda con el cuartil inferior y las probabilidades a la derecha con el cuartil superior, dando por resultado la nueva FMP:

t	**2**	**3**
p(t)	0.6	0.4

Con la cual si podemos calcular la media truncada correcta:

$$\mu_t = 2(.6) + 3(.4) = 2.4.$$

Este valor está comprendido en el rango intercuartilítico y, al compararse con las medias vistas hasta aquí, resultan semejantes:

La media de T es: $\mu_T = 1(0.2) + 2(0.4) + 3(0.3) + 4(0.1) = 2.3$
La media truncada de T es: $\mu_t = 2.4$
La media aritmética de T es: $\mu_a = 2.5$
La media geométrica de T es: $\mu_g == 2.21$
La media cuadrática de T es: $\mu_c = RMS_X = 2.74$
La media armónica de T es: $\mu_h = 1.92$

Ejemplo 11.15 Para encontrar la media truncada de ejemplo 5, se ajustar la FDA al igual que como se hizo en el ejemplo anterior. Dicha función original es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 1 \\ t^2 - 2t + 1 & para\ 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & para\ t > 2 \end{cases}$$

El ajuste se hace calculando los valores de las constantes a y b de la función $F(t) = t^2 - at + b$ para los fractiles $\boldsymbol{f_{0.25} = 1.5}$ y $\boldsymbol{f_{0.75} = 1.87}$ -calculados en el ejemplo 10- igualando a 0 y 1 la función, respectivamente, con lo cual

$$F(1.5) = 1.5^2 - a(1.5) + b = 0$$

$$F(1.87\ ) = 1.87^2 - a(1.87) + b = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para a y b se obtiene $a = 0.68$ y $b = -1.23$, con cuyos valores la FDA es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 1.5 \\ t^2 - 0.68t - 1.23 & para\ 1.5 \leq t \leq 1.87 \\ 1 & para\ t > 1.87 \end{cases}$$

En efecto, si $t = 1.5$ se tiene $F(1.5\ ) = 0$ y para $t = 1.87$se tiene $F(1.87) = 1$.
Para encontrar la media truncada -μ_t- derivamos a $F(t)$ respecto a t:

$$f(t) = \frac{d(t^2 - 0.68t - 1.23)}{dx} = 2t - 0.68$$

Probemos que $f(t)$ es una FDP:

$$\int_{1.5}^{1.87} (2t - 0.68)\, dt = (t^2 - 0.68t)|\,_{1.5}^{1.87} = 1.0$$

Y la media truncada -μ_t- es:

$$\mu_t = \int_{1.5}^{1.87} t(2t - 0.68)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{0.68t^2}{2}\right)\Big|\begin{matrix}1.87\\1.5\end{matrix} = 1.69$$

Obsérvese que esta media está comprendida en el rango intercuartilítico $[1.5, 1.87]$ y, además, su valor es muy semejante a la media calculada en el ejemplo 5, -$\mu_T = 1.66$-.

Debido a la multitud de medias que existen, debe tenerse cuidado y seleccionar aquella que mejor se ajuste a las necesidades concretas del problema que se está resolviendo; pues bien se dice "desconfiemos de las medias". En la parte de probabilidad de este libro -salvo que se indique lo contrario- usaremos las definiciones de la media - μ_X *o* μ- dado por las expresiones (11.1) y (11.2) ya que consideran explícitamente a las probabilidades y a las variables aleatorias; además que es la comúnmente utilizada en esta rama de las matemáticas.

Finalmente, es importante tener cuidado con la notación utilizada para las diferentes medias estudiadas en esta sección; pues la mayoría de las complicaciones que ocurren en la probabilidad y la estadística se derivan de la confusión o el descuido de dicha notación; así, en el ejemplo anterior μ_T hace alusión a la variable aleatoria T en tanto que μ_t es la notación que se utiliza en este libro para la media truncada.

11.3.8 La mediana -μ_m-

Otra de las medidas centrales de las distribuciones es la mediana –cuya notación será μ_m - que se define como aquel valor comprendido entre los que puede tomar la variable aleatoria que divide en dos partes iguales a la distribución, de manera tal a cada lado de la mediana se tiene 0.5 de probabilidad; es decir:

$$p(X \le \mu_m) = p(X \ge \mu_m) = 0.50 \tag{11.11}$$

Formalmente se define como:

$\int_{-\infty}^{\mu_m} f(x)dx = 0.50$ para las variables aleatorias continuas.

$\sum_{i=1}^{\mu_m} p(x_i) = 0.5$ para las variables aleatorias discretas.

En otros términos, la mediana es el segundo cuartil de la distribución o sea $\mu_m = f_{0.5}$

Ejemplo 11.16 Con relación al tiempo de vida de un sistema eléctrico de potencia del ejemplo 1, que se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[80, 120]$; su mediana es:

$$\frac{1}{40}\int_{80}^{\mu_m} dx = \frac{1}{40}x\Big|\begin{matrix}\mu_m\\80\end{matrix} = \frac{1}{40}(\mu_m - 80) = 0.50$$

Despejando a μ_m:

$$\mu_m = 20 + 80 = 100$$

Si se observa la figura 11.1 en este caso la media es igual a la mediana, que fraccionan en 2 a la distribución y que a cada lado se tiene 0.5 del área total -que es 1- debido a que la distribución es simétrica; lo que ocurre en todas las distribuciones simétricas.

Otra forma alternativa de determinar la mediana, consiste en referirse a la gráfica de la FDA como puede verse en la figura 11.9 y, partiendo de 0.50 en el eje vertical –que corresponde a $F(x)$- trazar una recta horizontal y, en la intersección con la curva, trazar una recta vertical hacia el eje x donde se localiza el valor de la mediana.

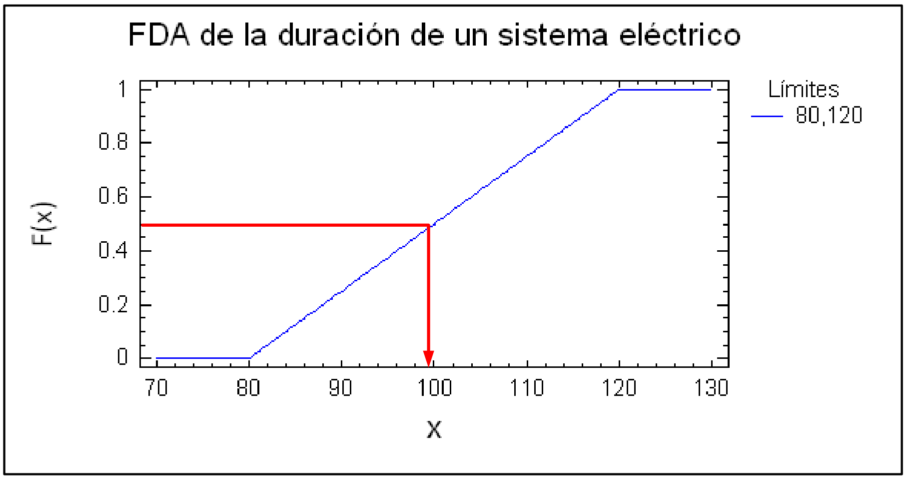


Figura 11.9 La mediana a partir de la FDA de una variable aleatoria continua

Para el caso de las variables aleatorias discretas, la mediana no siempre coincide uno a uno con un valor de la distribución -al igual que con la media- por lo que para su cálculo se procede de dos formas distintas como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.17 Con relación a la empresa constructora que adquiere 3 grúas para la construcción de una obra de infraestructura del ejemplo 3; consideremos el caso en que $p = 0.80$. La FDA se da en la tabla y se representa en la figura 11.10.

x	p	$p(x)$	$\sum_{i=1}^{k} p(x)$
0	0.8	0.008	0.008
1	0.8	0.096	0.104
2	0.8	0.384	0.488
3	0.8	0.512	1
	Suma	1	

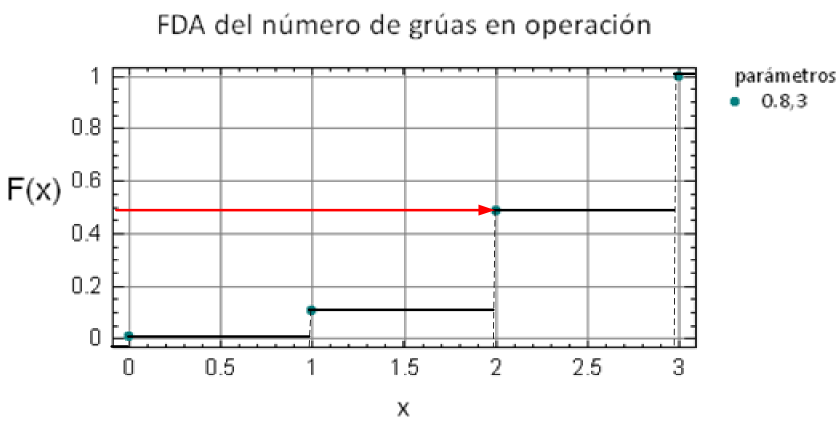


Figura 11.10 La Función de Distribución Acumulada de las Grúas

Si se observa, hasta dos grúas se tiene la probabilidad acumulada de 0.488 y hasta tres ya se tiene 1.00; por lo que μ_m está comprendida entre los valores 2 y 3. La forma presisa de cacularla es mediante una interpolación lineal; para lo cual, con apoyo en la figura 11.11 y por triángulos semejantes:

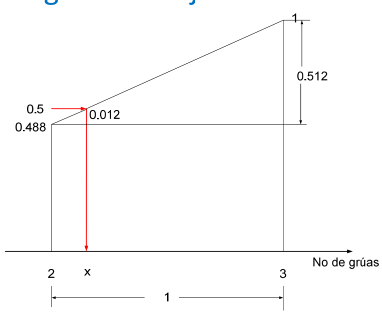


Figura 11.11 Apoyo de interpolación para el cálculo de la mediana

$$\frac{x}{1} = \frac{0.012}{0.512} = 0.023$$

Que sumado a 2 se tiene:

$$\mu_m = 2 + 0.023 = 2.023.$$

Otra alternativa más sencilla, aunque menos precisa que la anterior, consiste en sacar el promedio entre los límites donde se ubica la mediana, que para nuestro caso es:

$$\mu_m = \frac{2+3}{2} = 2.5.$$

Cabe observar que si se utiliza la gráfica dela FDA -ver figura 11.11- se obtendría un número infinito de medianas entre 2 y 3.

11.3.9 La moda -μ_{mo}-

Es la medida de tendencia central más fácil de encontrar e interpretar y se define como el valor de la variable aleatoria para el cual la FMP tiene la máxima probabilidad o la FDP tiene su punto máximo.

Si la FMP está en forma tabular, el valor de X que tiene la máxima probabilidad será la Moda -μ_{mo}- en cambio, para las variables aleatorias continuas cuya FDP da en forma de una función se calcula el máximo aplicando los conceptos de máximos y mínimos estudiados en el cálculo diferencial.

Ejemplo 11.18 La FMP de los ingresos – moneda nacional- del personal de una compañía es

x	p(x)
6,500	0.10
8,500	0.40
12,000	0.30
15,000	0.10
25,000	0.05
50,000	0.05

Al inspeccionar la tabla anterior encontramos que $\mu_{mo} = 8{,}500.$

Ejemplo 11.19 El volumen horario de tráfico para el diseño de una supercarretera está distribuido como se muestra en la figura 11.12 El ingeniero de tránsito puede diseñar la capacidad de tránsito de la supercarretera igual a la moda, la media x, la mediana o el valor del percentil 0.90 de X. Determinemos la capacidad de diseño de la supercarretera y la correspondiente la capacidad de excedencia –la capacidad de diseño es menor que el volumen de tránsito- para cada uno de los cuatro casos.

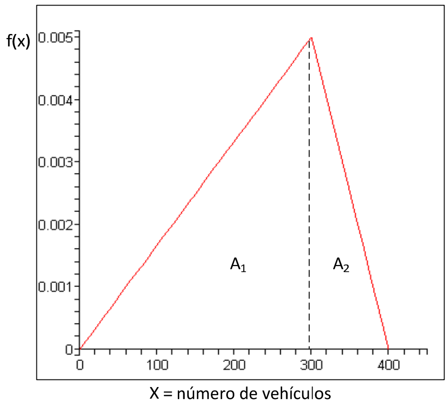


Figura 11.12 Distribución horaria del volumen horaria de tránsito de la supercarretera

Para resolver el problema, primero determinemos la FDP y la FDA de X.
Sabemos que $A_1 + A_2 = A = 1$

$$A_1 = \frac{300h}{2} = 150h + A_2 = \frac{100h}{2} = 50h = 1;\;\; h = \frac{1}{200}$$

Con lo cual $A_1 = \frac{3}{4}$ y $A_2 = \frac{1}{4}$; que sumadas dan 1.0, que comprueba geométricamente que las rectas si constituyen una FDP.

Con las ecuaciones de la recta $-y = mx + b$ o $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ se puede demostrar que la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & para\ x < 0 \\ \frac{x}{60{,}000} & para\ 0 \leq x \leq 300 \\ \frac{-x}{20{,}000} + \frac{1}{50} & para\ 300 < x \leq 400 \\ 0 & para\ x > 400 \end{cases}$$

Es conveniente que probar que la expresión anterior si es una función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \int_0^{300} \frac{x}{60{,}000}\ dx + \int_{300}^{400} \left(\frac{-x}{20{,}000} + \frac{1}{50}\right) dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Ahora calculemos la FDA.

Para $0 \leq x \leq 300$: $F_1(x) = \int_0^x \frac{t}{60{,}000} dt = \frac{x^2}{120{,}000}$; $para\ x = 300,\ F_1(300) = \frac{3}{4} = A_1$.

Para$300 < x \leq 400$: $F_2(x) = \frac{3}{4} + \int_{300}^{x} (\frac{-t}{20{,}000} + \frac{1}{50})\ dt = \frac{-x^2}{40{,}000} + \frac{x}{50} - 3.$

Que puede verificarse calculando A_2.

$A_2 = F_2(400) - F_1(300) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Como ya se había visto $A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

La FDA es, entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para\ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{120{,}000} & para\ 0 \leq x \leq 300 \\ \dfrac{-x^2}{40{,}000} + \dfrac{x}{50} - 3 & para\ 300 < x \leq 400 \\ 1 & para\ x > 400 \end{cases}$$

Ahora:

a) Para la moda de X la capacidad de diseño es
   i. $\mu_{mo} = 300$, que corresponde al valor de X donde la FDP toma su máximo.
   ii. La probabilidad de capacidad de excedencia es $p(X > \mu_{mo} = 300) = \frac{1}{4}$, que correponde a A_2.

b) Para la media de X, necesitamos calcularla:

i. $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{300} \frac{x^2}{60{,}000}\, dx + \int_{300}^{400} x(\frac{-x}{20{,}000} + \frac{1}{50})dx = 233.33$

ii. La probabilidad de capacidad de excedencia es $p(X > \mu_x = 233.33) = 1 - F_1(233.33) = 1 - \frac{233.33^2}{120{,}000} = 0.57$.

c) Para la mediana de X, necesitamos calcularla:

$$F(\mu_m) = f_{0.50} = p(X \leq 0.5) = \frac{{\mu_m}^2}{120{,}000} = 0.5 \Rightarrow \ \mu_m = 245$$

d) La probabilidad de capacidad de excedencia es

$p(X > \mu_m) = 1 - F_1(245) = 1 - \frac{245^2}{120{,}000} = 0.50$ como era de esperarse.

e) Finalmente, para el fractil $f_{0.90}$

i. El valor del fractil 0.90 es $F(f_{0.90}) = \frac{-{f_{0.90}}^2}{40{,}000} + \frac{f_{0.90}}{50} - 3 = 0.90$ lo que da

ii. ${f_{0.90}}^2 - 800f_{0.90} + 156{,}000 = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $f_{0.90} = 336.75 \sim 367$ que corresponde a la capacidad de diseño.

iii. La probabilidad de capacidad de excedencia es $p(X > f_{0.90}) = 1 - 0.90 = 0.10$

11.4 Parámetros de dispersión de la variable aleatoria

Además de los parámetros de localización, los de dispersión de la variable aleatoria son los siguientes en importancia, que es una cantidad que indica que tan cerca o que tan alejados o dispersos están los valores de dicha variable respecto al parámetro de localización que se elija. En particular, aquí se usará la media de la variable aleatoria -μ_X o simplemente μ- por ser ésta, como ya se advirtió, una suma –o integral- ponderada de los valores de X por sus probabilidades correspondientes.

En la figura 11.13 muestra una familia de distribuciones normales donde en (a) se ha variado la media -$\mu_X = 0, -3\ y\ 3$- y se ha mantenido constante la desviación estándar -$\sigma_X = 2$-, que como se verá es la raiz cuadrada de la varianza; mientras en (b) se ha mantenido $\mu_X = 0$ pero se ha variado la $\sigma_X = 1{,}2\ y\ 3$. Observe que el cambio de la media provoca un corrimiento solamente y que el cambio de la varianza ocasiona un cambio de escala.

11.4.1 La Varianza - $V(X), \sigma_X^2$ o σ^2 –

En la sección de los momentos centrales del capítulo 10 definimos a *la varianza de una variable aleatoria* como

$$V(X) = \sigma_X^2 = \mu_2 = \mu_X^{(2)} = E[(X - \mu_1')^2] = E[(X - \ \mu_X)^2] \tag{11.12}$$

También demostramos que

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mu_2 - (\mu_1)^2 \qquad (11.13)$$

También demostramos que es el valor más pequeño que se obtiene en comparación con otros valores de localización. En adelante, usaremos las dos primeras notaciones.

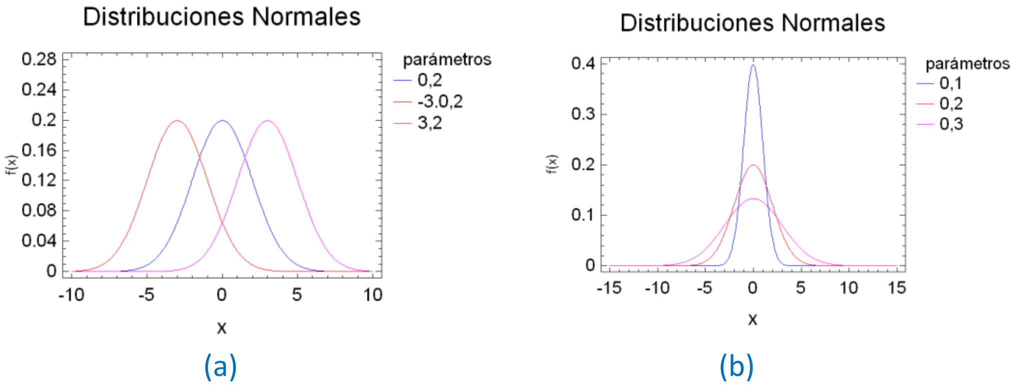


Figura 11.13 Distribuciones con diferentes medias y varianzas

En la tabla 1 del capítulo citado aparecen las expresiones para calcular los momentos respecto al origen μ_n'; así,

Momento de orden

$$r = \begin{cases} \mu_r' = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^r p(x_i) & \text{para variables aleatorias discretas} \qquad (11.14) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx & \text{para variables aleatorias continuas} \qquad (11.15) \end{cases}$$

11.4.2 La desviación estándar - σ_X o σ –

En virtud de que la varianza tiene las unidades de X al cuadrado, entonces se utiliza la *desviación estándar* que se define como la raíz cuadrada de la varianza para obtener las unidades originales.

$$\sigma_X = \sigma = \sqrt[2]{V(X)} = \sqrt[2]{\sigma_X^2} \qquad (11.16)$$

11.4.3 El rango - τ_X –

Tiene la desventaja que no toma en cuenta las distribuciones sino solamente los valores extremos de la variable aleatoria y se define como

$$\tau_X = x_{máx} - x_{mín}$$

Donde $x_{máx}$ es el valor máximo y $x_{mín}$ es el valor mínimo de la variable aleatoria, respectivamente.

11.4.3.1 El rango intercuartilítico

El rango intercuartilítico se define como el conjunto de valores de la variable aleatoria comprendidos entre el primero y el tercer cuartil; es decir, que excluye a los valores que están antes del primer cuartil y después del tercero.

11.4.4 El coeficiente de variación - δ_X o δ-

Sobre las bases de la varianza y la desviación estándar solamente, es difícil discernir si la dispersión es pequeña o grande; por lo cual se define al coeficiente de variación como la dispersión relativa al valor central media.

$$\delta_X = \delta = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\sigma}{\mu} \tag{11.17}$$

Además de que el coeficiente de variación proporciona una medida significativa de si la dispersión es pequeña o grande, tiene la ventaja que es una medida adimensional y permite la comparación entre las distribuciones de manera expedita.

Con el propósito de aligerar la lectura, los subíndices de todos estos parámetros se pueden omitir cuando no haya confusión sobre la variable aleatoria en que operan.

Ejemplo 11.20 Con relación a la La FMP de los ingresos del personal de una compañía – Ejemplo 16- calculemos su varianza, desviación estándar, el rango y su coeficiente de variación. Los datos aparecen en la tabla de abajo.

x	p(x)
6,500	0.10
8,500	0.40
12,000	0.30
15,000	0.10
25,000	0.05
50,000	0.05

a) cálculo de la varianza

Conforme(4) $V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$\mu_X = \mu_1' = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^1 p(x_i) = 6{,}500 \times 0.1 + 8{,}500 \times 0.4 + \cdots + 50{,}000 \times 0.05 = 12{,}900$

$$\mu_2' = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p(x_i) = 6{,}500^2 \times 0.1 + 8{,}500^2 \times 0.4 + \cdots + 50{,}000^2 \times 0.05$$
$$= 255{,}075{,}000$$

Con lo cual

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 255{,}075{,}000 - 12{,}900^2$$
$$= 88{,}655{,}000$$

b) La desviación estándar es

$$\sigma_X = \sqrt[2]{\sigma_X^2} = \sqrt{88{,}665{,}000} = 9{,}416.3$$

c) El rango es

$$\tau_X = x_{máx} - x_{mín} = 50{,}000 - 6{,}500 = 43{,}500$$

d) El coeficiente de variación es

$$\delta_X = \delta = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{9{,}416.3}{12{,}900} = 0.73$$

11.5 La Variable Aleatoria Estandarizada

Con la media y la desviación estándar es posible establecer una transformación de la variable aleatoria original - X – a otra variable aleatoria conocida como *la variable aleatoria estandarizada* - Z – para mostrar el estado relativo de los valores posibles de X; por lo cual es más fácil de utilizar en la estadística; por ejemplo, si damos una información de 8,500 al salario de un empleado, sabemos muy poco de su significado ¿es alto, bajo o medio? En cambio, si conocemos la media y la desviación estándar de la distribución de las calificaciones, entonces podemos tener un juicio más certero de la localización del salario en la distribución.

Si X es una variable aleatoria, la correspondiente variable aleatoria estandarizada, denotada con Z se define como

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma_X} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{11.18}$$

La variable aleatoria estandarizada es entonces una desviación del valor esperado relativa a la desviación estándar. Para cualquier valor de la variable aleatoria X, el correspondiente valor de Z nos informa que tantas desviaciones estándar el valor de X está alejado de la media μ_X.

Ejemplo 11.21 Para calcular la distribución estandarizada de los ingresos del ejemplo anterior sabemos que $\mu_X = 12{,}900$ y $\sigma_X = 9{,}416.3$

Con lo cual

$z_1 = \frac{6{,}500 - 12{,}900}{9{,}416.3} = -0.68$, $z_2 = \frac{8{,}500 - 12{,}900}{9{,}416.3} = -0.47$, … , $z_6 = \frac{50{,}000 - 12{,}900}{9{,}416.3} =$ 3.94 ; de

manera tal que la distribución de Z es

z	p(z)
-0.68	0.10

-0.47	0.40
-0.10	0.30
0.22	0.10
1.29	0.05
3.94	0.05

Ahora podemos decir que el ingreso de $8,500 está ubicado a -0.47 por debajo de la media.

Otras propiedades de la distribución de la variable estandarizada Z consisten en que a) la forma general de la distribución no cambia con la transformación de X a Z y b) la media $\mu_Z = 0$ y su varianza $\sigma_Z^2 = 1.0$ como se demuestra a continuación:

$$E[Z] = E\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X}E[X-\mu_X] = 0$$

$$V(Z) = (\frac{X-\mu_X}{\sigma_X})^2 = E\left[\frac{(X-\mu_X)^2}{{\sigma_X}^2}\right] = \frac{1}{{\sigma_X}^2}E[(X-\mu_X)^2] = \frac{{\sigma_X}^2}{{\sigma_X}^2} = 1 \quad y \quad \sigma_X = 1$$

Se propone al lector que calcule estos parámetros del ejemplo anterior con las expresiones correspondientes vistas arriba.

Ejemplo 11.22 Si la variable aleatoria X tiene como como FDP

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Aplicando la transformación $X \rightarrow Z$ se obtiene la FDP estandarizada de X que es

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \tag{11.19}$$

11.6 La desigualdad de Chebychev

Con base en la variable aleatoria estandarizada, esta desigualdad es útil para determinar probabilidades cuando se conoce la media y la desviación estándar de la variable aleatoria X, aún cuando no se conozca la forma de la distribución. Esta desigualdad lleva el nombre del matemático ruso y se establece como

$$p(|X-\mu| \geq k) < \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \text{o} \quad p(|X-\mu| < k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \tag{11.20}$$

Lo que significa que la probabilidad que una variable aleatoria estandarizada tenga una magnitud *absoluta* mayor o igual a algún número positivo k es *siempre* menor o igual $1/k^2$. Así, si conocida la media y la varianza de una distribución, sin conocer su forma, la probabilidad de sacar un caso que tenga un valor estandarizado de 2 o más, en valor absoluto, es a lo sumo $1/4$.

Ejemplo 11.23 Si X representa la duración en días, que toma un embarque de crudo petrolero de México a España y por experiencia se sabe que la media es de 50 días con una desviación estándar de 10, como se desconoce la FDP de X no es posible tener probabilidades exactas, pero aplicando la desigualdad de Chebychev podemos tener probabilidades aproximadas; así para $x = 60$ y, conforme a la desigualdad de Chebychev, la probabilidad que X este alejado de la media en cualquier dirección es

$z = \frac{60-50}{10} = 1$ y $p(|Z| \geq 1) \leq 1/1 \leq 1$; lo que significa que la probabilidad que embarque arribe a España saliendo de México en el periodo de 40 a 60 días es a lo más 1.0

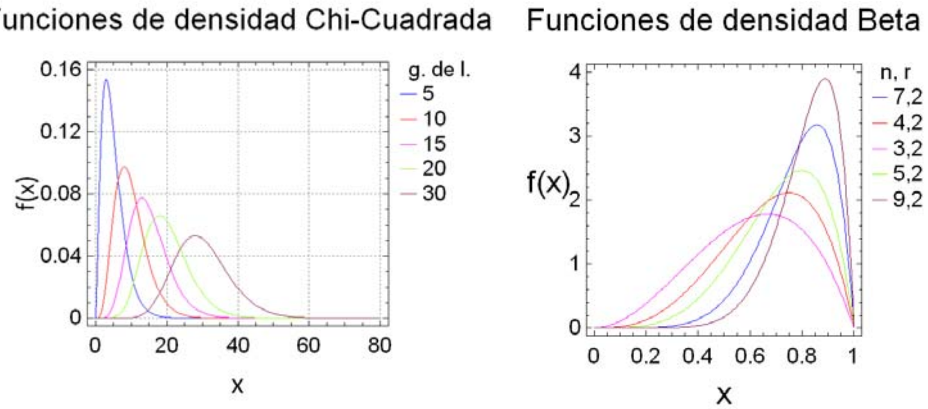
Si $x = 70$ se tiene $z = \frac{70-50}{10} = 2$ y $p(|Z| \geq 2) \leq 1/2 \leq 0.5$; o sea que a lo más hay una probabilidad de 0.5 de que la duración esté comprendida entre 30 y 70 días.

Si $x = 80$ se tiene $z = \frac{80-50}{10} = 3$ y $p(|Z| \geq 3) \leq 1/3 \leq 0.333$; que corresponde a la máxima probabilidad que el embarque de crudo petrolero saliendo de México arribe a España entre 20 y 80 días.

Cabe observar que a medida que nos alejamos de la media en valor absoluto, para la misma desviación estándar, las probabilidades acumuladas disminuyen.

11.7 Parámetro de sesgo, primer factor de forma o tercer momento estándar -α_3-

Otros dos parámetros de las distribuciones corresponden a los parámetros que miden la forma de las distribuciones de probabilidad, el primer parámetro de forma es el de sesgo y el segundo es el de aplanamiento de la distribución conocido como curtosis que estudiaremos en la siguiente sección. La rica variedad de formas de las distribuciones van desde sesgadas a la izquierda, simétricas, hasta sesgadas a la derecha. Como se ilustra en las figuras previas 11.1 a 11.9, la 11.1, 11.6 (a), 11.6 (c), 11.6 (e), 9(a) y 9(b) corresponden a distribuciones simétricas; en tanto que las figuras 2, 3, 4(b) y 8 pertenecen a distribuciones no simétricas, asimétricas o sesgadas. Más aún, como se aprecia en la figura 11,14 los miembros de una familia de distribuciones cambian su forma, su sesgo o su simetría, cuando se varían los parámetros; así, al aumentar el parámetro de la distribución de la figura 10 (a), va disminuyendo el sesgo que presenta a la derecha y va tendiendo a la simetría, en cambio en la figura 10 (b) sucede lo contrario, al disminuir los parámetros, en este caso n, los miembros de la familia pierden su asimetría izquierda y tienden a la simetría.



(a) (b)

Figura 11.14. Distribuciones sesgadas a la derecha (a) y a la izquierda (b)

Se dice que una distribución es *simétrica* si puede desplegarse con referencia a un eje vertical de manera tal que los dos lados sean iguales –como puede verificarse en las distribuciones de la 11. 1, cuya simetría se establece con respecto a las rectas verticales que pasan por sus medias, o en la distribución central de la figura 11.13 (a) que es simétrica con respecto al eje vertical que contiene al cero.

Las distribuciones que carecen de simetría con respecto a un eje vertical se llaman distribuciones *sesgadas*, como puede verse en las figuras 2 y 8. Se dice que una distribución está *sesgada a la derecha* si su cola está en esta dirección - ver figura 11.14 (a) - , por el contrario, la distribución está sesgada a la izquierda si su cola está en esta dirección - ver figura 11.14 (b) -.

El parámetro de sesgo de una distribución de X se define como

$$\alpha_3 = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{E[(X-\mu_1')^3]}{\sigma_X^3} = \frac{E[(X-\mu_X)^3]}{\sigma_X^3} \tag{11.21}$$

Donde α_3 es un valor sin dimensiones.

α_3 siempre está conforme al signo de μ_3 y el valor puede ser negativo, cero o positivo.

$$\text{Si } \alpha_3 = \begin{cases} < 0, & \text{la distribución está sesgada a la izquierda} \\ = , & \text{la distribución es simétrica entorno a } \mu_X \\ > 0, & \text{la distribución está sesgada a la derecha} \end{cases}$$

Ejemplo 11.24. La resistencia lateral - R - del marco de edificio es aleatoria con FDP

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{3}{500}(r-10)(20-r) & para\ 10 \le r \le 20 \\ 0 & para\ otros\ valores \end{cases}$$

Calculemos

a) el valor medio de R

La densidad es $f_R(r) = \frac{3}{500}(-r^2 + 30r - 200)$ con la cual

$$\mu_R = \frac{3}{500}\int_{10}^{20} r(-r^2 + 30r - 200)dr$$
$$= \frac{3}{500}\int_{10}^{20} (-r^3 + 30r^2 - 200r)dr = 15$$

b) La mediana de R

$$\frac{3}{500}\int_{10}^{\mu_m}(-r^2 + 30r - 200)dr = \frac{3}{500}\left(-\frac{r^3}{3} + \frac{30r^2}{2} - 200r\right)\Big|_{10}^{\mu_m} = 0.5$$

Entonces $\mu_m = 15$

c) La moda se encuentra aplicando los conceptos de máximos y mínimos

$\left(\frac{3}{500}\right)\frac{d(-r^2+30r-200)}{dr} = \left(\frac{3}{500}\right)(-2r + 30) = 0$, resolviendo para $r = \mu_{mo}$

$\mu_{mo} = \frac{90}{6} = 15$

d) La desviación estándar

Recordemos que $\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2} = \sqrt{E[R^2] - E[R]^2}$

$E[R^2] = \frac{3}{500}\int_{10}^{20} r^2(-r^2 + 30r - 200)dr = \frac{3}{500}\int_{10}^{20}(-r^4 + 30r^3 - 200r^2)dr = 230$

Por lo tanto $\sigma_R = \sqrt{230 - 15^2} = \sqrt{5}$

e) El coeficiente de variación

$\delta_R = \frac{\sigma_R}{\mu_R} = \frac{\sqrt{5}}{15} = 0.149$

f) El primer factor de forma o coeficiente de sesgo

$\alpha_3 = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{E\left[(X-\mu_1')^3\right]}{\sigma_X^3} = \frac{E[(X-\mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$

Como se demostró en el capítulo anterior, el tercer momento central es

$\mu_X^{(3)} = \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2{\mu_1'}^3$

Donde $\mu_1' = E[R] = 15$, $\mu_2' = E[R^2] = 230$, $\mu_3' = E[R^3]$ cuyo valor es

$$\mu_3' = E[R^3] = \frac{3}{500}\int_{10}^{20} r^3(-r^2 + 30r - 200)dr = \frac{3}{500}\int_{10}^{20}(-r^5 + 30r^4 - 200r^3)dr$$

$$= \frac{3}{500}(600{,}000) = 3{,}600$$

Con el cual

$\mu_X^{(3)} = \mu_3 = 3{,}600 - 3(15)(230) + 2(15)^3 = 0$ y

$$\alpha_3 = \frac{0}{\sigma_X^3} = 0$$

Lo que indica que la forma de la distribución de R es simétrica, lo que ya se sospechaba al ver que la media, la mediana y la moda eran iguales a *15;* y se puede atestiguar al ver las gráficas de la FDP y de la FDA de R que se presentan en la figura 11.15.

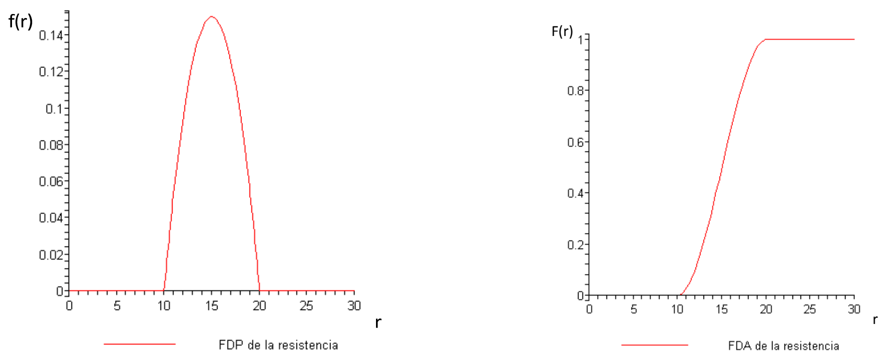


Figura 11. 15 Gráficas de la FDP y FDA de la resistencia lateral del marco

Ejemplo 11.25 La FMP del tiempo de retardo - T - de un proyecto de construcción de un sistema electrónico y el costo de la penalización - C - correspondiente se da en la siguiente tabla.

t_i (en meses)	$P(t_i)$	Función de penalización c(t_i) (x$100,000)
1	0.5	5
2	0.3	6
3	0.1	7
4	0.1	7

Determinemos la penalización media de proyecto

$$\mu_1' = \mu_C = 5(0.5) + 6(0.3) + 7(0.1) + 7(0.1) = 5.7 \rightarrow \mu_C = 570{,}000$$

La desviación estándar de la penalización es

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_C^2} = \sqrt{E[C^2] - E[C]^2}$$

$$\mu_2' = E[C^2] = 5^2(0.5) + 6^2(0.3) + 7^2(0.1) + 7^2(0.1) = 33.1$$

$$\sigma_C = \sqrt{33.1 - 5.7^2} = \sqrt{0.61} = 0.78 \rightarrow \ \sigma_C = 78{,}000$$

El coeficiente de variación

$$\delta_C = \frac{\sigma_C}{\mu_C} = \frac{78{,}000}{570{,}000} = 0.14$$

El primer factor de forma:

Recordemos que $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ donde $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2{\mu_1'}^3$, necesitamos calcular μ_3'.

$$\mu_3' = 5^3(0.5) + 6^3(0.3) + 7^3(0.1) + 7^3(0.1) = 195.9$$

Con lo cual $\mu_3 = 195.9 - 3(5.7)(33.1) + 2(5.7^3) = 0.076$

$$\alpha_3 = \frac{0.076}{0.78^3} = 0.16$$

Lo que se interpreta como una FMP sesgada a la derecha como puede verse si se grafica la función de distribución de las multas.

11.8 Parámetro de aplanamiento o curtosis, segundo factor de forma o cuarto momento estándar -α_4-

Una indicación del aplanamiento o que tan "picuda" está una distribución se obtiene con el cuarto momento central $\mu_4 = \mu_X^{(4)} = E[(X - \mu_1')^4] = \mu_4' - 4\mu_1'{\mu_3'}^2 + 6\mu_1'{\mu_2'}^2 - 3{\mu_1'}^4$. Como en el primer factor de forma, el cuarto momento estándar se define como

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} \tag{11.22}$$

Para determinar el aplanamiento de una distribución, se usa la distribución normal estándar como "estándar" puesto que para ella $\alpha_4 = 3$; así, para cualquier otra distribución de la variable aleatoria X decimos que es menos "picuda" o que tiene mayor curtosis que la distribución normal si su $\alpha_4 > 3$ y que es más picuda o tiene menos curtosis si su $\alpha_4 < 3$.

Ejemplo 11.26 Para el ejemplo 21 relacionado con la resistencia lateral del marco de edificio es aleatoria con FDP calculemos su segundo factor de forma -parámetro de curtosis-.

Ya encontramos que $\mu_1' = E[R] = 15,\ \mu_2' = E[R^2] = 230,\ \mu_3' = E[R^3] =$ 3,600. Para calcular μ_4 necesitamos determinar μ_4'.

$$\mu_4' = E[R^4] = \frac{3}{500}\int_{10}^{20} r^4(-r^2 + 30r - 200)dr$$
$$= \frac{3}{500}\int_{10}^{20} (-r^6 + 30r^5 - 200r^4)dr = 67000000/7$$

$$\mu_X^{(4)} = \mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'{\mu_3'}^2 + 6\mu_1'{\mu_2'}^2 - 3{\mu_1'}^4$$

$$\mu_4 = \frac{67000000}{7} - 4(15)(3{,}600)^2 + 6(15)(230)^2 - 3(15)^4 = 66999573/7$$

Y

$$\alpha_4 = \frac{66999573/7}{(\sqrt{5})^4} = \frac{66999573}{175} = 328{,}855$$

En conclusión, el conocimiento de los parámetros de localización, dispersión, sesgo y curtosis, analizados en este capítulo; constituyen el conjunto de valores útiles y necesarios para caracterizar a la distribución de la variable aleatoria y suelen agruparse con la notación D $(\mu, \sigma, \gamma_1, \gamma_2)$ donde D representa la distribución. En adelante, se pondrá énfasis en la media, la varianza y la desviación estándar y se representará con D(μ, σ), salvo que se indique lo contrario.

11.9 Bibliografía y referencias

http://es.wikipedia.org/wiki/Media_aritm%C3%A9tica, consultada en agosto de 2009.

http://es.wikipedia.org/wiki/Media_geom%C3%A9trica, consultada en agosto de 2009.

http://es.wikipedia.org/wiki/Media_armonica, consultada en agosto de 2009.

http://es.wikipedia.org/wiki/Media_generalizada, consultada en agosto de 2009.

Bhattacharyya G. Johnson R (1977), *STATISTICAL, CONCEPTS AND METHODS*, John Wiley & Sons, USA.

Olkin I, Gleser L. Derman C (1980), *PROBABILITY, MODELS AND APPLICATIONS*, Macmillan Publishing, USA.

Winkler R. Hays W. (1975) Statistics: *Probability, Inference and Decision*, Second Edition, Holt, Rinehart and Winston, USA.

Ang A. Tang W. (1975) *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, John Wiley & Sons, USA.

Nombre de archivo: cap11 parámetros de las Distribuciones de Probabilidad-def.docx
Directorio: C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\g-1) Capítulos de mi libro de Probabilidad y estadística 2007-2009
Plantilla: C:\Documents and Settings\bfc\Datos de programa\Microsoft\Plantillas\Normal.dotm
Título:
Asunto:
Autor: Bernardo Frontana de la Cruz
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 24/08/2009 13:06:00
Cambio número: 150
Guardado el: 08/02/2010 23:07:00
Guardado por: fACULTAD DE INGENIERÍA
Tiempo de edición: 5,315 minutos
Impreso el: 30/08/2010 13:06:00
Última impresión completa
Número de páginas: 30
Número de palabras: 8,140 (aprox.)
Número de caracteres: 44,776 (aprox.)