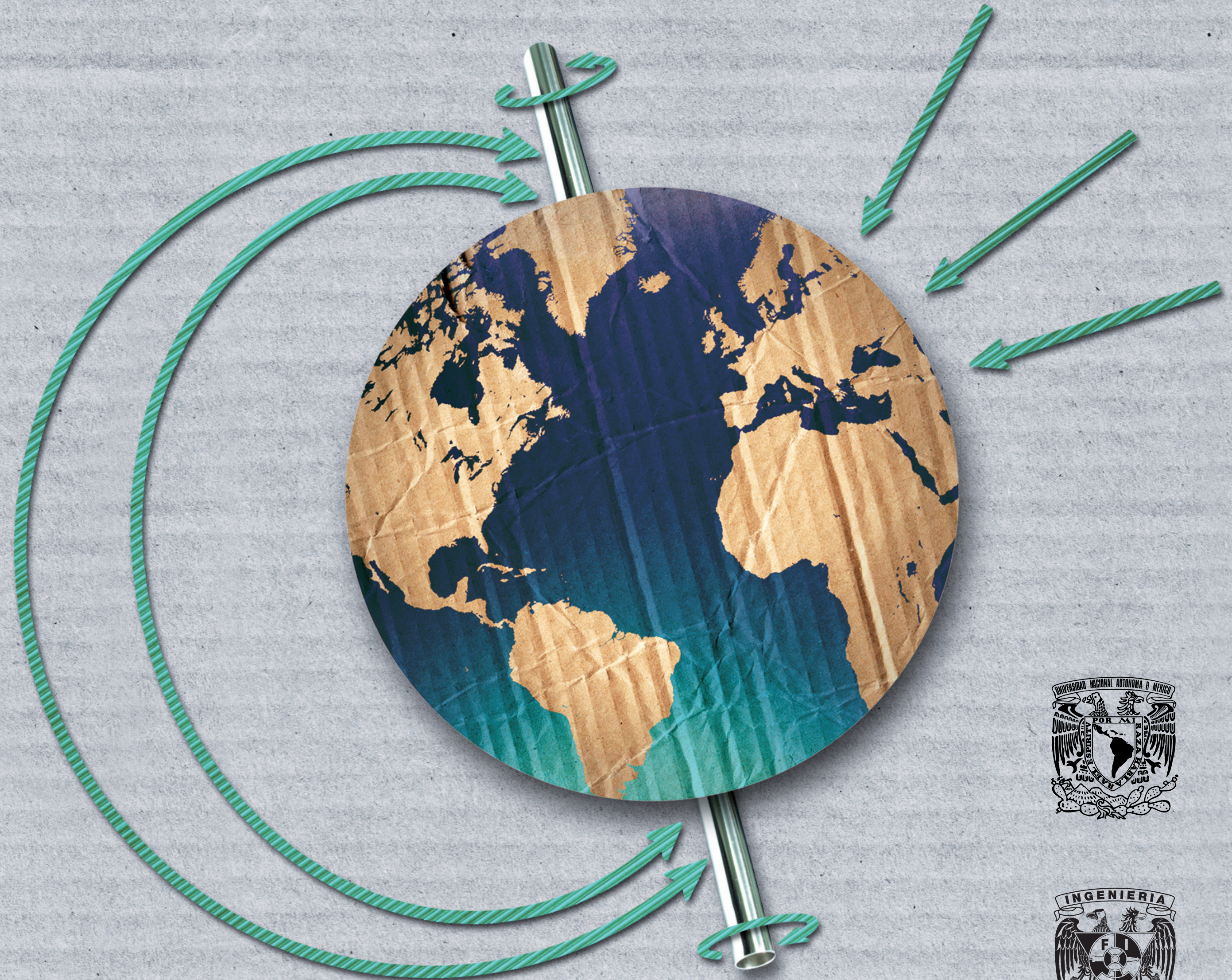
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO VECTORIAL: GRAD, DIV, ROT... Y ALGO MÁS



CÁLCULO VECTORIAL:

GRAD, DIV, ROT... Y ALGO MÁS

Baltasar Mena

MENA INIESTA, Baltasar. *Cálculo Vectorial: grad, div, rot ... y algo más.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2011.

Cálculo Vectorial: grad, div, rot ... y algo más.

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial de esta obra por cualquier medio o sistema electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Derechos reservados.
© 2011, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
Avenida Universidad No. 3000
Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C. U.,
Delegación Coyoacán, México, D. F.
Código postal 04510

Primera edición, 2011

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

Diseño de portada: Nismet Díaz Ferro
Impreso y hecho en México

Cálculo Vectorial: grad,div,rot ... y algo más.

Baltasar Mena Iniesta

Abril, 2011

Índice general

Acerca del Autor.

El Dr. Baltasar Mena nació en Montblanc, Tarragona en 1942. Llegó a México en 1947 en calidad de asilado político y recibió su educación en este país hasta obtener su Licenciatura en Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México en 1964. Posteriormente, obtuvo el Diploma de Hidráulica en la Universidad de Toulouse, Francia (1967), la Maestría (1969) y el Doctorado en la Universidad de Brown (1973) en Estados Unidos. Después de varias estancias posdoctorales en el Reino Unido (Universidad de Gales y Universidad de Manchester), se integró a la UNAM en 1974 y desde entonces ha sido profesor e investigador en la Facultad de Ingeniería, el Instituto de Investigaciones en Materiales y actualmente en el Instituto de Ingeniería de dicha institución.

Ha impartido numerosas materias entre ellas, Mecánica de Fluidos, Dinámica de Fluidos, Transferencia de Calor, Mecánica del Medio Continuo, Temas Especiales de Termofluidos incluyendo temas como: reología, transformadas integrales, ecuaciones diferenciales parciales y otras aplicaciones, Seminarios de Tesis, Historia de la Ciencia y la Tecnología y, en particular, Cálculo Vectorial. Ha dirigido más de 60 tesis tanto de licenciatura como de maestría y doctorado en diversas áreas de ingeniería. El Dr. Mena ha recibido los mayores galardones otorgados por nuestra universidad, entre ellos el Premio UNAM de Tecnología y Diseño (1996), el Premio Leon Bialik de Innovación Tecnológica (1994), el Premio PUAL de Alimentos (1995) y a nivel nacional, el Premio ADIAT en Tecnología (1995) y el Premio Nacional de Ciencias y Artes en Tecnología y Diseño (1997). A nivel internacional ha obtenido el Distinguished Alumnus Award (1999) y la Medalla de Ingeniería de la Universidad de Brown (2000), además de ser reconocido por esta última como uno de los 100 graduados más distinguidos del siglo XX, entre 75 mil egresados.

Finalmente, recibió la Medalla Albert Einstein y el Premio de Ciencias de la UNESCO en 2001 en París. Es miembro del Consejo Consultivo de Ciencias de la Presidencia de México, de la Academia Mexicana de Ciencias y del Sistema Nacional de Investigadores en el más alto nivel. Recientemente ha sido nombrado académico correspondiente de la Real Academia de Ingeniería de España (2010).

Además, Baltasar ha sido pionero del rock en México desde 1959 formando parte de grupos como “Los Sonámbulos”, “Los Sinners” y “Los Tequila”. Desde 1975 forma parte del grupo “Naftalina” con el cual continúa grabando discos y ofreciendo conciertos de rock en forma cotidiana. Imparte la asignatura de Cálculo Vectorial en la Facultad de Ingeniería de la UNAM desde 1993 y este libro es el resultado de sus clases.

Introducción.

A lo largo de casi cuatro décadas de impartir cursos en la Facultad de Ingeniería de la UNAM,incluyendo temas como Mecánica y Dinámica de Fluidos, Mecánica del Medio Continuo. Transferencia de Calor, Métodos Matemáticos, Reología y algunas otras, el autor se ha dado cuenta de la existencia de enormes lagunas por parte de los alumnos, en los conocimientos básicos de álgebra, matemáticas y, en particular, de cálculo vectorial. Existe una tendencia casi inevitable de aprender la materia a base de resolver una infinidad de ejercicios repetitivos los cuales, aunque siempre son de utilidad, tienden a relegar a un segundo plano los conceptos fundamentales del cálculo vectorial; siendo estos la base de todas las aplicaciones de las ciencias de la ingeniería.

La matemática es una ciencia eidética abstracta la cual establece definiciones y reglas rigurosas. Usa conceptos a veces imaginarios, pero siempre con la finalidad de resolver problemas prácticos y explicar, junto con la física, los fenómenos existentes en la naturaleza. Los conceptos de punto, línea, curva y densidad, por ejemplo, son tan abstractos como los conceptos de vector y tensor. Sin embargo, sin esos conceptos no se podrían explicar los campos de fuerzas, velocidades, aceleraciones, esfuerzos, deformaciones, corrientes eléctricas, campos magnéticos, etc, fundamentales en ingeniería y sus aplicaciones. Los ejemplos anteriores son campos vectoriales existentes en la naturaleza; estos actúan necesariamente sobre los cuerpos que encuentran a su paso. Pueden actuar sobre todo el volumen del cuerpo o sobre la superficie del mismo, pero siempre ocasionarán algún tipo de efecto sobre él. Así, un campo de fuerzas provocará un campo de movimientos y aceleraciones; un campo de esfuerzos dará lugar a deformaciones. Las relaciones entre causa y efecto, conducen a ecuaciones o leyes constitutivas y a ecuaciones de conservación, fundamentales en la física y en la ingeniería. El cálculo vectorial forma la base de todo lo anterior. Las ecuaciones fundamentales de balance y conservación en la física y en la ingeniería son la ecuación de balance de masa (continuidad), la ecuación de balance de momentum lineal (cantidad de movimiento) o segunda ley de Newton y la ecuación de balance de energía; sin ellas no se puede concebir la enseñanza y comprensión de la mecánica de sólidos, fluidos, gases y de otros materiales.En la teoría electromagnética su equivalente son las ecuaciones de Maxwell. El planteamiento y la derivación de dichas ecuaciones, necesariamente hace uso de los conceptos del cálculo vectorial. Los campos vectoriales, al actuar sobre los cuerpos, lo hacen sobre el volumen rodeado necesariamente por una superficie cerrada (Teorema de la Divergencia) o sobre la superficie del cuerpo delimitada siempre por una curva cerrada (Teorema de Stokes). El alumno que no haya comprendido a fondo los teoremas anteriores no podrá entender los conceptos fundamentales involucrados en las ecuaciones básicas de conservación y por lo tanto le recomiendo que se dedique a otras actividades, pero no a la ingeniería ni a la física.

El curso realmente está dividido en dos partes; la primera parte está dedicada a un repaso del cálculo de dos o más variables. El cálculo diferencial e integral de una sola variable es extendido a dos (o más) variables para abarcar por lo menos tres dimensiones. Lo que inicialmente se aprendió para el plano, se extiende a superficies; estos conceptos son necesarios para establecer un campo vectorial a partir de los campos escalares ya conocidos por el alumno. Las derivadas totales se convierten en derivadas parciales y las integrales se convierten en integrales sucesivas o múltiples. Posteriormente, en la segunda parte del curso, se estudian las propiedades fundamentales de los campos vectoriales y sus representaciones diferenciales por medio de operadores. Una vez caracterizado el campo vectorial, se analiza la forma de describir una superficie y un volumen también en forma vectorial; finalmente, se estudia la interacción entre los campos y los cuerpos para obtener los teoremas fundamentales del cálculo vectorial y sus aplicaciones.

Existen numerosos libros de texto de cálculo vectorial; algunos de ellos magníficos, otros buenos, muchos regulares y algunos francamente incomprensibles y malos.

A pesar de ello, el autor se ha percatado tras muchos años de impartir la materia, de la necesidad de que el alumno posea un libro de texto apegado al plan de estudios y dirigido a cubrir las necesidades explícitas de aprendizaje correspondientes a dicho plan. El presente libro ha sido creado tras muchos semestres de impartir la materia en la Facultad de Ingeniería de la UNAM y refleja el trabajo de recopilación de un gran número de alumnos los cuales han incorporado sugerencias y de profesores de la materia cuyas correcciones y sugerencias forman parte fundamental de este trabajo. En particular el autor agradece el intenso trabajo de Ma.Fernanda Lugo e Imelda Salado para las correcciones y formato de la presente edición. El libro es necesariamente selectivo en sus temas y se ha preferido sacrificar rigor en las demostraciones en aras de aplicaciones físicas dirigidas al futuro ingeniero. No se ha pretendido abarcar todos los temas del cálculo vectorial sino solamente aquellos que el autor ha considerado de mayor aplicación y apego al plan de estudios correspondiente.

El formato del texto, permite que cada profesor modifique el sistema de explicación del tema correspondiente añadiendo sus ideas al mismo. Para ello, se ha dejado un espacio en blanco en cada hoja de texto para que el alumno haga las anotaciones correspondientes, eliminando así la elaboración tediosa de apuntes y guardando la información en un solo libro de texto.

Así mismo, los ejercicios correspondientes a cada tema, han sido tomados de los exámenes departamentales de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y reflejan los diversos puntos de vista y enfoques de los distintos profesores que imparten la materia. Todos los ejercicios incluyen la solución correspondiente y muestran al alumno muchos de los “trucos” y suposiciones que algunos maestros no benévolos consideran parte del conocimiento del alumno.

La meta de este libro es, por lo tanto, proveer al alumno con un cuaderno de trabajo de cálculo vectorial, el cual permita una gran flexibilidad tanto a él como al profesor, de efectuar las anotaciones que juzguen convenientes y le permitan una mejor comprensión del tema.

Capítulo 1

Conceptos Elementales.

En este capítulo, se extienden las nociones de cálculo diferencial de una sola variable, conocidas por el lector, al cálculo de varias variables.

Inicialmente, los conceptos de límite, derivada de una sola variable, son aplicables a curvas planas. En el caso de dos variables, las curvas planas se convierten en superficies en el espacio. Entonces, el concepto de derivada como una línea tangente a una curva en un punto dado, se convierte en un plano tangente a una superficie en el punto considerado.

El concepto es básicamente el mismo. El lector encontrará que la extensión a dos variables se hace en forma natural y sin complicaciones; es simplemente la extensión geométrica de dos a tres dimensiones. Las reglas del cálculo diferencial de una sola variable son las mismas para varias variables. En el caso de n dimensiones, la visualización geométrica no es posible pero el concepto es el mismo. Invariablemente, el alumno se pregunta el porqué hay que estudiar más de dos variables si las dimensiones físicas de la naturaleza son tres. La respuesta es muy sencilla; existen problemas prácticos en los cuales el número de variables es muy grande y éstas no tienen nada que ver con dimensiones en el espacio. Por ejemplo, consideremos un concepto como las utilidades de una empresa; obviamente, estas serán una función de muchas variables: el número de trabajadores, el número de productos, los costos de la materia prima, los costos de fabricación, etc. Para estudiar dicha función será necesario considerar tantas variables como sea necesario. Hay numerosos problemas en donde el número de variables es mayor a tres. Además, el cálculo de varias variables no es más que una extensión natural del cálculo de una sola variable.

De igual manera, las funciones de varias variables pueden ser implícitas, es decir, que una variable puede ser función de otras. Las reglas para funciones implícitas son de mucha utilidad en la solución de problemas prácticos. Además, se introduce al lector al concepto de Jacobiano de un sistema, concepto utilizado en muchas aplicaciones; en particular para resolver sistemas de ecuaciones tanto algebraicas como diferenciales, cambios de coordenadas, etcétera.

NOTA: Se ha incluido la definición y concepto de gradiente y de derivada direccional y sus respectivas representaciones geométricas (1.10.1 a 1.10.6.) Aunque estos conceptos pertenecen al Cálculo Vectorial y serán extendidos en el capítulo 4, se ha considerado prudente incluirlos en la primera parte del libro.

1.1. Funciones escalares y vectoriales.

1.1.1. Notación y definiciones preliminares.

1. Un conjunto V de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_i$ se representa mediante:
$$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$$
2. El elemento x pertenece a V $x \in V$
3. El elemento x no pertenece a V $x \notin V$
4. Dados dos conjuntos U y V, U es un subconjunto de V si,
$$\forall x \in U, x \in V \quad \Rightarrow \quad U \subset V$$
5. El conjunto de elementos de U y V que pertenecen a ambos es la intersección:
$$U \cap V$$
6. La unión de dos conjuntos U y V consiste en el conjunto de elementos de U y/o de V:
$$U \cup V$$
7. El conjunto vacío $\emptyset$ no tiene elementos.

1.2. Campos escalares y vectoriales.

1.2.1. Campo escalar.

Un campo escalar F es un conjunto no vacío de elementos con dos leyes de combinación, llamadas suma y multiplicación, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. SUMA:

   A cada par de elementos $a, b \in F$ le corresponde un solo elemento $a + b$ llamado *suma.* Dicha suma tiene las siguientes propiedades:

   a) *Conmutativa:* $a + b = b + a$

   b) *Asociativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$

   Existe un elemento llamado 0 tal que $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathrm{F}$

   A cada $a \in \mathrm{F}$ le corresponde un solo elemento $(-a)$:
   $$a + (-a) = 0$$
   En general se escribe: $b + (-a) = b - a$

2. MULTIPLICACIÓN:

   A cada par de elementos $a, b \in \mathrm{F}$ le corresponde un elemento único llamado *producto*, denotado por ab *ó* $a \cdot b$ el cual cumple con las propiedades siguientes:

   a) *Conmutativa:* $a \cdot b = b \cdot a$

   b) *Asociativa:* $(ab)c = a(bc)$

   c) *Distributiva* con respecto a la adición: $(a + b)c = ac + bc$

   Existe un elemento llamado 1, tal que: $a \cdot 1 = a$

   Para cada $a \in F$ existe un elemento a^{-1} tal que: $aa^{-1} = 1$

   Los elementos de F se llaman ***escalares.***

1.2.2. Espacio o Campo vectorial.

Un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un conjunto de elementos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, ...\}$ llamados ***vectores*** que satisfacen las siguientes reglas de operación:

1. SUMA:

   A cada par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ le corresponde un vector asociado $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ llamado *suma.*

   La suma cumple con las siguientes propiedades:

   a) *Conmutativa:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

   b) *Asociativa:* $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

   A cada espacio $\mathbf{V}$ le corresponde un vector único $\mathbf{0}$ llamado el vector nulo:
   $$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$
   A cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ le corresponde un vector $\;(-\mathbf{u}) \in \mathbf{V} : \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

2. MULTIPLICACIÓN ESCALAR:

   A cada vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y a cada escalar $\alpha \in F$, le corresponde un vector $\alpha\mathbf{u}$ llamado el producto escalar:

   Propiedades:

   a) *Asociativa:* $\alpha\left(\beta\mathbf{u}\right) = \left(\alpha\beta\right)\mathbf{u} = \alpha\left(\beta\mathbf{u}\right) = \beta\left(\alpha\mathbf{u}\right)$

   b) *Distributiva:* $\begin{array}{l} \left(\alpha + \beta\right)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \\ \alpha\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \end{array}$

   Existe un vector unitario $\mathbf{1}$ tal que asociado a un vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$: $\mathbf{1}u = \mathbf{u}$ y su negativo $\;(-\mathbf{1}) : \quad (-\mathbf{1})\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

   El producto del escalar 0 y un vector $\mathbf{u}$ es el vector nulo. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

1.3. Funciones de varias variables.

Considerese dos conjuntos (o espacios vectoriales) U y V. Una función o mapeo "f" es una operación o regla la cual asocia a cada elemento $x \in U$ un elemento único $y \in V$.

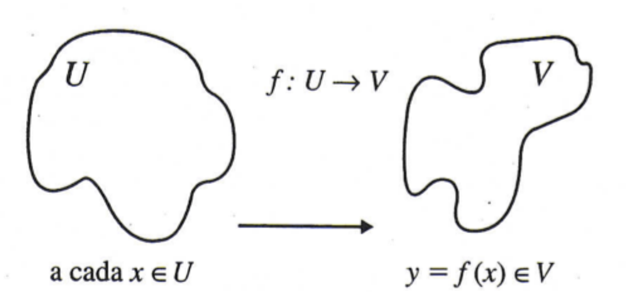


Figura 1.1.

Observese que el conjunto de U es el dominio de f y el conjunto de V es el rango de f. Además nótese que los elementos x pueden ser escalares, vectores, etc.. Es decir x puede ser un conjunto de "n tuplos" (escala ordenada de números reales) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si el mapeo de U a V cubre todo V se dice que es *sobre* (onto); es decir para cada $y \in V$ le corresponde por lo menos un $x \in U$ para el cual $y = f(x)$. De otra manera el mapeo de U a V es *dentro o interior* (into); x se llama ***variable independiente***; y y se llama ***variable dependiente.***

Ejemplo 1.3.1.

Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones de dos variables:

Funciones	**Dominio**	**Rango**
$a) w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$w \geq 0$
$b) w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$w \neq 0$
$c) w = \operatorname{sen} xy$	$\forall x, y$	$-1 \leq w \leq 1$
$d) w = -\frac{1}{x^2+y^2}$	$(x, y) \neq (0, 0)$	$-\infty < w < 0$

Ejemplo 1.3.2.

Determinar el dominio y el rango de la función:

$$f(x, y) = \frac{xy - 5}{2(y - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Esquematizar el dominio y localizar los valores para los pares (2,5), (1,2) y (-1,2).

Solución:

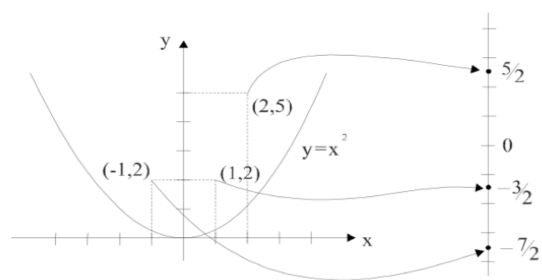


Figura 1.2.

Se tiene,

Dominio: todos los pares (x, y) tales que $y - x^2 > 0$

Rango: $-\infty < w < \infty$

Valores:

$$f(2,5) = \frac{(2)(5) - 5}{2(5-4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}$$

$$f(1,2) = -\frac{3}{2}$$

$$f(-1,2) = -\frac{7}{2}$$

Definiciones.

Entorno o vecindad: El entorno de un punto $P_0\,(x_0, y_0)$ es el conjunto de puntos que distan de P_0 un número menor que otro $\delta > 0$ prefijado. Si el entorno excluye al punto, se llama *entorno reducido.*

Métrica: En un espacio Euclidiano la distancia entre dos puntos se define como la métrica:

$$d = \overline{x_1 x_2} = \sqrt{\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 + \left(x_2^2 - x_3^2\right)^2 + \dots}$$

Punto interior: Se dice que el punto P es un punto interior de S si existe al menos un entorno de P formado exclusivamente por puntos de S.

Punto exterior: P es exterior a S si existe al menos una vecindad de P formado por puntos que no pertenecen a S.

Punto frontera: P es frontera de S si todos los entornos de P contienen puntos de S y puntos exteriores a S.

Interior de una región: Es el conjunto de puntos interiores de dicha región.

Frontera o contorno de una región: Es el conjunto de puntos frontera de la misma.

Región abierta: Aquella que contiene solamente puntos interiores.

Región cerrada: Contiene los puntos interiores y todos los puntos frontera.

Punto de acumulación: P es un punto de acumulación de S si todo entorno reducido de P contiene un número infinito de puntos de S. Así, son puntos de acumulación los puntos interiores y los puntos frontera.

Conjunto conexo: Un conjunto de puntos en S es conexo si dos puntos cualesquiera de el pueden unirse mediante una línea quebrada con un número finito de quiebres y formada exclusivamente por puntos del conjunto. De lo contrario es **no conexo**.

Región: Conjunto de puntos abierto y conexo.

Contorno : Totalidad de puntos de acumulación que no pertenecen a la región.

Ejemplo 1.3.3.

$$x^2 + y^2 + z^2 < 4, \text{es una región (acotada).}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 > 0, \text{es una región (no acotada).}$$

Ejemplo 1.3.4.

Dada la región acotada $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ su contorno es $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Si la región contiene a su contorno se llama ***región cerrada*** *o* ***dominio***.

Ejemplo 1.3.5.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

Trayectoria: Todo arco de curva contenido íntegramente en una región.

1.3.1. Representación gráfica de funciones de dos variables. Gráficas y curvas o superficies de nivel.

Sea la función $z = f(x, y)$. A cada valor (x, y) le corresponde un valor de z. La totalidad de los valores de $z = f(x, y)$ forman una superficie llamada la ***gráfica de la función.***

El conjunto de puntos $f(x, y) = cte$ forman lo que se llama ***curvas de nivel.***

Si la función en cuestión es de tres variables independientes, el valor $f(x, y, z) = cte$ es una ***superficie de nivel de f.***

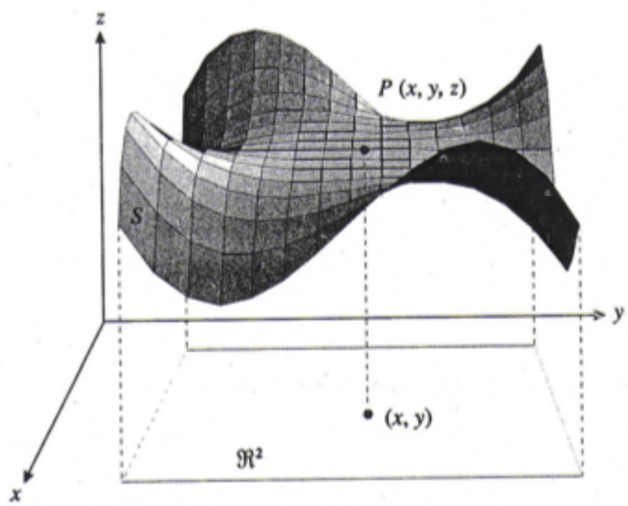


Figura 1.3.

Ejemplo 1.3.6. Sea la función de dos variables independientes $z = z(x, y)$ definida en R^2.

A cada valor de (x, y) le corresponde un valor z que localiza un *punto* $P(x, y, z)$. El conjunto de puntos formar una superficie S que representa geométricamente a la función.

1.4. Limites y Continuidad.

1.4.1. Repaso.

Límite de funciones de una sola variable.

$$\text{Se dice que: } \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si dado un círculo de radio positivo pequeño ε alrededor de L existirá otro circulo de radio positivo δ alrededor de x_0 tal que para todos los x dentro del circulo (exceptuando posiblemente x_0), los valores $y = f(x)$ estarán dentro del circulo de radio ε alrededor de L.

Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\text{si dado } \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, |\forall x : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una manera sencilla de imaginar el concepto de límite es la siguiente:

Imaginemos dos brincolines, de los que utilizan los niños para saltar, de distintos radios, δ y ϵ. En el brincolín de radio δ, se encuentra el equipo de las variables y en el de radio ϵ el de las funciones. Cada variable tiene un gorro de un color al igual que cada función correspondiente. El juego consiste en que cada elemento del equipo de las variables salta y avanza hacia el centro del brincolín al mismo tiempo que su correspondiente función hace lo mismo. El centro del brincolín de las variables es el punto a y el de las funciones es $f(a)$ excepto que este último es un agujero. A medida que los elementos del equipo de las variables se acercan al centro, los correspondientes elementos de las funciones se acercan al agujero y desaparecen.

Es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{si dado} \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0$$
$$\forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tomando en cuenta que $f(a)$ puede no estar definido.

Ejemplo 1.4.1.

Sea $f(x) = 5x - 3$ demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 3) = 2$

Solución:

Se tiene que demostrar que para cualquier :

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad |\forall x: \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(5x - 3) - 2| < \varepsilon$$

Para buscar el valor de δ resolvemos la desigualdad para ε:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| &< \varepsilon \\ |5x - 5| &< \varepsilon \\ 5|x - 1| &< \varepsilon \\ |x - 1| &< \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Entonces $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ funcionará. *Nótese que no es el único valor, ya que cualquiera más pequeño, sirve para el mismo propósito.*

1.4.2. Propiedades de los límites.

Si $\lim\limits_{x \to c} f_1(x) = L_1$ *y* $\lim\limits_{x \to c} f_2(x) = L_2$, entonces:

$$1. - \lim [f_1(x) + f_2(x)] = L_1 + L_2$$

$$2. - \lim [f_1(x) - f_2(x)] = L_1 - L_2$$

$$3. - \lim f_1(x) \cdot f_2(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$4. - \lim k f_2(x) = k \cdot L_2$$

$$5. - \lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad L_2 \neq 0$$

En general, para n variables independientes, Se dice que A es el límite de la función $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cuando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si dado $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$Cuando:

$$\begin{array}{l} 0 < |x_1 - a_1| < \delta \\ 0 < |x_2 - a_2| < \delta \\ \vdots \\ 0 < |x_n - a_n| < \delta \end{array}$$

Obsérvese que la definición habla de un entorno reducido del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ya que existen funciones con dicho límite que no están definidas en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Simbólicamente:

$$\underset{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)}{lim} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$$

$$\text{Si dado } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$$

Cuando:

$$\begin{array}{l} 0 < |x_1 - a_1| < \delta \\ 0 < |x_2 - a_2| < \delta \\ \vdots \\ 0 < |x_n - a_n| < \delta \end{array}$$

1.4.3. Definición generalizada para espacios vectoriales.

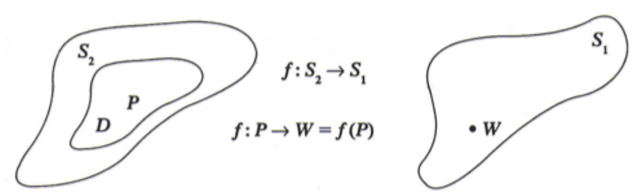


Figura 1.4.

La función $f = \{\mathbf{P}, \mathbf{W}\}$ es el conjunto de todos los pares $(\mathbf{P}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{P} \in S_2$ y $\mathbf{W} \in S_1$.

$\mathbf{W} = f(\mathbf{P})$ donde $w = f(x, y)$, o bien, $w = f(x, y, z)$, etc, dependiendo de la dimensión del espacio.

$\mathbf{W} = D = \{\mathbf{P}\}$ para los cuales $f(\mathbf{P})$ está definida. Además $R = \{f(\mathbf{P})\} = \{\mathbf{W}\}$

Sea f una función definida en un dominio D. Sea $\mathbf{P}_0$ un punto de acumulación en D. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{P_0}} f(\mathbf{P}) = A$$

$$\text{Si dado } \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta(\varepsilon, \mathbf{P}_0) > 0 \qquad |f(\mathbf{P}) - A| < \varepsilon$$

$$\text{Cuando} \quad 0 < |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| < \delta \quad y \quad \mathbf{P} \in D$$

Ahora se generalizará la definición para funciones de varias variables independientes:

Sea la función $f(x, y)$ sobre los números reales. Si los valores de $f(x,y)$ están arbitrariamente cerca de un valor real fijo L para todos los puntos (x,y) cercanos a un punto (x_0,y_0) pero no igual a (x_0, y_0) entonces se dice que L es el límite de f cuando (x,y) se acerca a (x_0, y_0).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Al decir que (x,y) esta cerca de (x_0, y_0) significa que la distancia

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \text{ es pequeña}$$

Ahora:

$$|x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

También:

$$|y - y_0| = \sqrt{(y-y_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

La desigualdad:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

para cualquier δ, implica que:

$$|x - x_0| < \delta \quad y \quad |y - y_0| < \delta$$

Recíprocamente, si para algún $\delta > 0$, ambos $|x - x_0| < \delta \quad y \quad |y - y_0| < \delta$.

Entonces:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{2\delta^2} = \sqrt{2}\delta$$

El cual es pequeño si δ es pequeña. Es decir que al calcular límites podemos pensar en términos de distancia entre los puntos en el plano o diferencias en las coordenadas individuales. Así:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si dado

$$\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall (x,y) \neq (x_0, y_0) \ \ni F$$

Se cumple:

$$\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon,$$

o bien:

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo 1.4.2.

$$\text{Sea} f(P) = f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Dominio: todo el plano R^2 excepto el origen $P_0(0,0)$.

Se toma el punto $P_0 = (0,0)$ y se investiga el $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ Sea un $\varepsilon > 0$ dado. Encontrar un $\delta > 0$ $|f(P)| < \varepsilon$ cuando $0 < |P| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Solución:

Obviamente

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$y^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow |f(P)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |P| = \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\text{luego } \delta = \sqrt{\varepsilon} \text{ satisface que: } \lim_{P\to P_0} f(P) = 0$$

1.4.4. Propiedades de límites de funciones de dos variables.

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$

$$1)\ \lim [f+g] = L_1 + L_2$$

$$2)\ \lim [f-g] = L_1 - L_2$$

$$3)\ \lim [f\cdot g] = L_1 \cdot L_2$$

$$4)\ \lim kg = kL_2$$

$$5)\ \lim \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2} \qquad L_2 \neq 0$$

1.4.5. Continuidad.

Definición.

La función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0) si:

1. f está definida en (x_0,y_0).
2. Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

La función es continua si es continua en cada punto del dominio definido por la función.

1.4.6. Límites dobles

Sea la función $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; calcúlese su límite en $P_0(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

En un entorno del punto $P_0(0,0)$, $x \neq 0, y \neq 0$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}} = 0 \qquad pues \quad \frac{x^2}{y^2}+1>0$$

Al calcular los límites reiterados de la función, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0 \qquad\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Nótese que los límites son completamente distintos aunque el valor sea el mismo.

1.4.7. Algunos Teoremas de Continuidad.

1. La suma de un número finito de funciones continuas en un punto es una función continua en dicho punto.
2. El producto de un número finito de funciones continuas en un punto es una función continua en ese punto.
3. El cociente de un número finito de funciones continuas en un punto es una función continua en ese punto siempre y cuando el denominador no sea nulo en ese punto.

1.5. Derivadas parciales.

La derivada parcial de una función $f(x,y)$ con respecto a una de sus variables en el punto (x_0,y_0) es la derivada ordinaria de dicha función con respecto a dicha variable cuando la otra variable se ha mantenido fija.
Así, sea $u=f(x,y)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left.\frac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left.\frac{d}{dy}f(x_0,y)\right|_{y=y_0} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

Diversas notaciones:

Sea $u=u(x,y)$ y el punto (x_0,y_0)

$$\begin{array}{ccc} Lagrange: & Cauchy: & Jacobi: \\ \left.u_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} & \left.D_xu\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \\ \left.u_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} & \left.D_yu\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} & \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \end{array}$$

Ejercicios propuestos.

1. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ en $P(3,5)$ de $u = 2x^2 + 3xy + 5y^2$.

2. $u = 7xyz + az^2 + y$ calcular u_x, u_y, u_z

3. $u = 5x^2 + 3y^2 + \dfrac{x}{y}$ encontrar $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ en $P(3,1)$

4. Encontrar $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ en cada caso siguiente:

   a) $u = \tan^{-1} \dfrac{x}{y}$

   b) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

   c) $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$

   d) $u = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

   e) $u = e^{xy} \ln xy$

   f) $u = \operatorname{senh} \left[\cos \left(2x^2 + 3 \right) \right]$

   g) $u = \tanh \left[\tan^{-1} xy \right]$

   h) $u = \tanh^{-1} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5. Si $u = sen\left(x^2 - 2xy + y^2\right)$ demuestre que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

6. Si $u = e^{\frac{x}{y}} sen \dfrac{x}{y}$ demuestre que $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

1.5.1. Derivadas parciales sucesivas.

Sea $u = u(x, y, z)$ una función diferenciable. Sus derivadas parciales u_x, u_y, u_z son en general funciones de x, y, z , a su vez con derivadas parciales:

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & u_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & u_{zx} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\
u_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & u_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & u_{zy} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \\
u_{xz} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & u_{yz} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & u_{zz} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{array}
$$

Al reiterar el proceso, estas nuevas funciones de x, y, z pueden ser a su vez diferenciables y entonces se obtienen las parciales de tercer orden o mayores sucesivamente. Cuando bajo el símbolo de derivación aparecen más de una variable independiente, la parcial se llama ***mixta***.

Calculemos directamente el valor de u_{yx}, u_{xy} en el punto $P(a, b)$:

$$u_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h,b) - u(a,b)}{h}$$

$$u_{yx}(a,b) = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h,b+k) - u(a,b+k) - u(a+h,b) + u(a,b)}{hk}$$

$$u_{xy}(a,b) = \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{u(a+h,b+k) - u(a+h,b) - u(a,b+k) + u(a,b)}{hk}$$

A partir de la definición anterior, observar el por qué se indica el orden de derivación de derecha a izquierda en la notación. En general difiere el orden de cálculo de las derivadas parciales mixtas de una función (*límites reiterados no necesariamente iguales*) a menos que la función sea continua en el punto considerado.

Si hacemos $F(h,k) = u(a+h,b+k) - u(a,b+k) - u(a+h,b) + u(a,b)$,

$$u_{xy} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{F(h,k)}{hk} \quad u_{yx} = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{F(h,k)}{hk}$$

1.5.2. Teorema de Euler *(Schwarz).*

Si $u = u(x,y)$ es tal que en un entorno al punto $P(a,b)$:

1. Existen sus parciales u_x, u_y.
2. u_{yx} es continua.

Entonces existe u_{xy} en $P(a,b)$ y además: $u_{yx}(a,b) \equiv u_{xy}(a,b)$.

Demostración:

Definamos la función: $\phi(x) = u(x,b+k) - u(x,b)$ donde k, $y=b$ están fijos.

Así para x suficientemente cercana a $x=a$ y k pequeña, ϕ es función de la variable x cerca de $x=a$:

$$\phi(a+h) - \phi(a) = u(a+h,b+k) - u(a+h,b) - u(a,b+k) + u(a,b) = F(h,k)$$

u_x existe en un entorno del punto $P(a,b)$. Entonces $\phi(x)$ es continua en dicho entorno y cumple la hipótesis del teorema del valor medio.

$$\phi(a+h) - \phi(a) = h\phi'(a+\theta_1 h) \quad \textit{donde} \quad \phi' = \phi_x \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Luego:

$$\phi(a+h) - \phi(a) = F(h,k) = h\left[u_x(a+\theta_1 h, b+k) - u_x(a+\theta_1 h, b)\right]$$

para cada h, aplicando el teorema del valor medio a la segunda variable, se tiene:

$$\phi(a+h) - \phi(a) = F(h,k) = hk\left[u_{yx}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\right] \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

Usando la definición de ϕ :

$$\begin{aligned}&[u(a+h,b+k) - u(a+h,b)] - [u(a,b+k) - u(a,b)] \\ &\qquad = F(h,k) = hku_{yx}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$u_{xy} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{F(h,k)}{hk} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} u_{yx}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Entonces, puesto que u_{yx} es continua en la vecindad considerada,se tiene que

$$u_{yx}(a,b) \equiv u_{xy}(a,b)$$

1.6. Funciones Diferenciables. La diferencial total.

Considérese la función: $u = u(x, y, z)$ en un entorno al punto $P(x, y, z)$. Si $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ es un punto de la misma vecindad, el incremento de u, es:

$$\Delta u = u\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) - u\left(x, y, z\right) \tag{1}$$

Definición

La función u es *diferenciable* en el punto $P(x, y, z)$ si y sólo si su incremento es de la forma:

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \tag{2}$$

donde A, B, C son independientes de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y $\varepsilon \to 0$ cuando:

$$\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0 \quad \Delta z \to 0$$

Como x, y, z son independientes, los incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se pueden dar en forma arbitraria dentro del entorno considerado. Haciendo $\Delta x \neq 0$ pero $\Delta y = \Delta z = 0$ el incremento de la función, según la definición (2) es:

$$\Delta_x u = A\Delta x + \varepsilon\Delta x \tag{3}$$

Recordando la definición de incremento:

$$\Delta_x u = u\left(x + \Delta x, y, z\right) - u\left(x, y, z\right). \tag{4}$$

y combinando (3) y (4), se tiene,

$$A + \varepsilon = \frac{u\left(x + \Delta x, y, z\right) - u\left(x, y, z\right)}{\Delta x}$$

Además, tomando el límite cuando $\Delta x \to 0, (\varepsilon \to 0)$:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Similarmente se pueden encontrar: $B = \dfrac{\partial u}{\partial y} \quad C = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ en el punto $P(x, y, z)$. Al sustituir en la definición (3) se tiene:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

1.6.1. Diferencial total.

Definición.

La diferencial total de la función u en el punto $P(x, y, z)$ es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

Ahora, según la definición (2):

$$\Delta u = du + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Es decir que para $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ pequeños, el valor de la diferencial total de la función en el punto, puede considerarse como la primera aproximación del incremento correspondiente de la función en dicho punto.

Recuérdese que para una sola variable independiente, su incremento es igual a su diferencial si la función es diferenciable en el punto. Por ejemplo si hacemos $u = x$, entonces $dx = \Delta x$. Por tanto se puede escribir:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

y cuando $\varepsilon \to 0$ y $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{5}$$

Obsérvese que a los incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ de las variables independientes corresponde el incremento de la función:

$$\Delta u = du + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

y no la diferencial de la función dada por (5).

Ejemplo 1.6.1.

Si $u = x^2 - xy$ calcular su diferencial total en el punto $P(8,5)$ para $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.01$. Y evaluar el incremento respectivo de la función u y comparar los resultados.

Solución:

$$du = (2x - y)dx - xdy$$
$$\text{Sustituyendo } x = 8; \quad y = 5; \quad \Delta x = 0.02; \quad \Delta y = -0.01$$
$$du = (16 - 5)0.02 + 8(0.01) = 0.30$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)\\ \Delta u &= u(8.02, 4.99) - u(8, 5)\\ \Delta u &= (8.02)^2 - (8.2)(4.99) - 64 + 40\\ \Delta u &= 0.3006\end{aligned}$$

Al hacer comparaciones se encuentra que el error es:

$$\varepsilon = \frac{6 + 10}{3000} = 0.2\,\%$$

Ejercicios propuestos:

Obtener las diferenciales totales de las funciones siguientes:

1. $u = x^3y + x^2y^2 + 1$
2. $u = 4\left(x^2 + y^3\right)^4$
3. $u = e^{x^2 - y^2 - 2z}$
4. $u = \ln\left(xyz^2\right)$
5. $s = \ln\left(r^2 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}$
6. $u = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$
7. $u = \tan e^{xy}$
8. $u = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$

9. Se tiene que calcular el radio de un círculo a partir de una de sus cuerdas y la flecha respectiva. Si la cuerda mide 8m, se estima un error de $\pm 2cm$ y la flecha es de 2m con un error de $\pm 1cm$, calcular el error máximo con que se determinará el radio en cuestión.

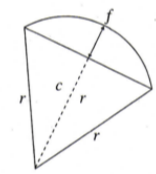


Figura 1.5.

1.6.2. Diferenciabilidad y Continuidad

Teorema.

Si una función $u = u(x, y, z)$ es diferenciable en el punto $P(x, y, z)$, es continua en dicho punto.

Demostración:

Sea $u = u(x, y, z)$ diferenciable en $P(x, y, z)$. Entonces,

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + u_z \Delta z + \varepsilon \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Por otro lado:

$$\Delta u = u\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) - u\left(x, y, z\right)$$

Al igualar las expresiones y tomar límites cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\rightarrow(0,0,0)} \left[u\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) - u\left(x, y, z\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\rightarrow(0,0,0)} u\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) = \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\rightarrow(0,0,0)} u\left(x, y, z\right)$$

y la función es continua en $P(x, y, z)$.

El recíproco del teorema no es necesariamente cierto ya que existen funciones continuas en un punto que no son diferenciables en dicho punto.

Ejemplo 1.6.2.

Demostrar que la función $u\left(x, y\right)$ es continua pero no diferenciable en el punto $P(0, 0)$ aunque sus dos derivadas parciales existan en dicho punto.

$$u\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución:

Continuidad

$$\lim_{x\rightarrow 0} \lim_{y\rightarrow 0} \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0; \qquad \lim_{y\rightarrow 0} \lim_{x\rightarrow 0} \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Evidentemente no existe $u\left(0, 0\right)$, pero el $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} u = 0$; luego, al definir $u\left(0, 0\right) = 0$, la función es continua en ese punto aunque sus derivadas parciales no existan.

Teorema recíproco:

Si $u = u(x, y)$ es tal que $u_x u_y$ son continuas en $P(x, y)$ la función es diferenciable en ese punto. (*Evidentemente la demostración se deja como ejercicio, utilizar el teorema del valor medio*).

1.7. Funciones Compuestas. Regla de la cadena.

Sea la función diferenciable $u = u(x, y, z)$ donde $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ siendo t una variable independiente. La función u es una función compuesta de la variable t.

$$u = u[x(t), y(t), z(t)] = \phi(t)$$

Calculemos la derivada de u con respecto a t. Para ello demos un Δt al cual corresponderán los incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ correspondientes a x, y, z y a su vez al Δu de la función $u = u(x, y, z)$.Como u es diferenciable:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Si $\Delta t \neq 0$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

Si se toma el limite cuando $\Delta t \to 0$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (1)$$

que es la derivada total de u con respecto a t.

La expresión (1) contiene como casos particulares las fórmulas de derivación de una sola variable.

Ejemplo 1.7.1.

1. Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables.

   a) Demostrar que $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

   Sea $(u + v)$ una función compuesta de la variable x. Usando (1), se tiene,

   $$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{\partial}{\partial u}(u + v)\frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial v}(u + v)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

   De manera similar obtener $\dfrac{d}{dx}$ para $(u \cdot v)$ y $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

   b) $\dfrac{d}{dx}(u \cdot v) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

   $$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{\partial}{\partial u}(u \cdot v)\frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial v}(u \cdot v)\frac{dv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} - \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} \\ &= \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}\end{aligned}$$

2. Demostrar que:

$$\frac{d}{dx}u^v = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} \quad (u > 0)$$

1.7.1. Funciones compuestas de varias variables.

Sean las funciones diferenciables:

$$u = u\,(x, y, z) \quad x = x\,(r, s, t) \quad y = y\,(r, s, t) \quad z = z\,(r, s, t)$$

donde r, s, t son variables independientes. La función u es función compuesta de las variables r, s, t de segunda clase. Al aplicar el mismo procedimiento que para una variable, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\end{aligned}$$

Una función compuesta de varias variables de segunda clase tendrá tantas derivadas parciales como número de variables de segunda clase y sus derivadas parciales tendrán tantos términos como variables de primera clase haya.

Ejercicios propuestos:

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones como se indica:

   a) $\dfrac{d}{dx}(senx)^{\cos x}$

   b) $\dfrac{du}{dt} \quad si \quad u = x\sqrt{x^2 + y^2} \quad x = \cos t \quad y = sent$

   c) $\dfrac{du}{dt} \quad si \quad u = x^2 + xe^y \quad x = sent \quad y = \ln t$

2. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s}$ en los casos siguientes:

   a) $u = \ln\,(xyz) \quad x = r^2 + rs + s^2 \quad y = e^r + e^s \quad z = \ln\,(rs)$

   b) $u = x^2 - y^2 \quad x = 2r - 3s + 7 \quad y = -r + 8s - 9$

   c) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \quad x = se^r \quad y = se^{-r}$

1.7.2. Permanencia de la forma de la diferencial total.

Sea $f = f\,(x, y, z)$ una función diferenciable. Entonces,

$$df = fx\,dx + fy\,dy + fz\,dz \tag{1}$$

donde x, y, z son variables independientes. Supongamos que son diferenciables: $x = x\,(r, s)$ $y = y\,(r, s)$ $z = z\,(r, s)$ Entonces,

$$\begin{aligned} dx &= x_r\,dr + x_s\,ds \\ dy &= y_r\,dr + y_s\,ds \\ dz &= z_r\,dr + z_s\,ds \end{aligned} \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1), se tiene

$$df = fx\,(x_r\,dr + x_s\,ds) + fy\,(y_r\,dr + y_s\,ds) + fz\,(z_r\,dr + z_s\,ds)$$

Agrupando términos

$$df = (f_x\,x_r + f_y\,y_r + f_z\,z_r)\,dr + (f_x\,x_s + f_y\,y_s + f_z\,z_s)\;ds$$

$$\Rightarrow df = f_r\,dr + f_s\,ds$$

La forma de la diferencial total es la misma cuando las variables son independientes o cuando no lo son.

1.7.3. Funciones implicitamente definidas.

Consideresé la ecuación $f(x, y) = 0$. La función $y = y(x)$ esta implícitamente definida si cumple la ecuación $f(x, y(x)) = 0$.Obviamente, no siempre $f(x, y) = 0$ define implícitamente a $y = y(x)$. Por ejemplo la ecuación: $x^2 + y^2 = -9$, no define a y como función implícita de x pues no existen valores reales de x y y que la satisfagan.

Un ejemplo de función implícitamente definida es $y = \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{sen}^{-1} x$ ya que está implícitamente definida por $x = \operatorname{sen} y$.

El punto fundamental es que aunque no sea posible encontrar y como función de x explícitamente, sí se puede calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y las demás derivadas en términos de y y de x.

Ejemplo 1.7.2.

Sea $y = f\,(x)$ donde x y y satisfacen la relación $x^3 + xy^2 + 8x \operatorname{sen} y = 0$

Mediante la regla de la cadena se obtiene

$$3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + 8 \operatorname{sen} y + 8x \cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

despejando $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2 + 8 \operatorname{sen} y}{2xy + 8x \cos y}$$

En general para la función $F(x,y)=0$, se deriva con respecto a x usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad , \text{ pero} \qquad \frac{dx}{dx}\equiv 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1)+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0, \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Ejemplo 1.7.3.

Sean $F(u,v,x,y,z)$ y $G(u,v,x,y,z)$ funciones diferenciables de las cinco variables en una región R^5. Supóngase además que $u=u(x,y,z)$ y $v=v(x,y,z)$ en R^3 satisfacen las ecuaciones:

$$F(u,v,x,y,z)=0$$
$$G(u,v,x,y,z)=0$$

Calcular las parciales de u y v con respecto a x.

Solución:

Obsérvese que

$$dF=F_u\,du+F_v\,dv+F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=0$$

Como y y z se mantienen fijas, $dy=dz=0$.

Es decir

$$Fu\frac{\partial u}{\partial x}+Fv\frac{\partial v}{\partial x}+Fx=0$$

y también:

$$Gu\frac{\partial u}{\partial x}+Gv\frac{\partial v}{\partial x}+Gx=0$$

Entonces:

$$F_u u_x+F_v v_x=-F_x$$
$$G_u u_x+G_v v_x=-G_x$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones lineales para determinar u_x y v_x. Aplicando la regla de Cramer:

$$u_x=-\frac{\begin{vmatrix} Fx & Fv \\ Gx & Gv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}} \qquad\qquad v_x=-\frac{\begin{vmatrix} Fu & Fx \\ Gu & Gx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}}$$

$$\text{Cuando } \begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}\neq 0$$

Estas fórmulas son válidas en cada punto $P_i(x,y,z)$, donde el determinante sea distinto de cero.
El determinante:

$$J\left(\frac{F,G}{u,v}\right) \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{\partial\,(F,G)}{\partial\,(u,v)}=\begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}$$

recibe el nombre de *jacobiano del sistema* F, G *con respecto a las variables* u, v.

Así,

$$Ux = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (x,v)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}} \qquad Vx = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,x)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}}$$

De igual manera se puede obtener,

$$Uy = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (y,v)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}} \qquad Vy = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,y)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}}$$

1.8. Funciones implícitas.

Teorema de existencia:

Si $P_0\,(x_0, y_0)$ es un punto interior de R y además:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $FxFy$ y son continuas en R.
3. $Fy(x_0, y0) \neq 0$

Entonces existe un intervalo a x_0 donde $y = y\,(x)$ es una función diferenciable y única tal que:

1. $y_0 = y_x$
2. $F(x, y(x)) = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Fx}{Fy}$

Demostración:

Sea $Fy\,(x_0, y_0) > 0$ (si fuera negativo se usaría la ecuación $-Fy\,(x_0, y_0) = 0$ en lugar de $Fy\,(x_0, y_0) = 0$).

Como Fy es continua en R, existe el entorno:$|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ al punto P_0, donde $Fy\,(x_0, y) > 0$. Entonces la función $F\,(x_0, y)$ es continua y creciente en $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$.

Utilizando la hipótesis (1) del Teorema de existencia, $F\,(x_0, y_0) = 0$, se tiene:

$$F\,(x_0, y_0 - b) < 0$$
$$F\,(x_0, y_0 + b) > 0$$

Con la hipótesis (2), Fx es continua en R luego existe un intervalo, $|x - x_0| \leq \delta$ para $\delta \leq a$ en el cual $F\,(x, y_0 - b) < 0$ y $F\,(x, y_0 + b) > 0$.

Sea x un valor del conjunto $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

Como $F(x, y)$ es creciente en $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ y además,

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$
$$F(x_0, y_0 + b) > 0$$

existirá un solo valor y en ese intervalo tal que $F(x_0, y_0) = 0$.

Este razonamiento se podría reiterar para toda x en el intervalo $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ y obtener siempre valores de y en el intervalo $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$.

Entonces se encuentra definida $y = y(x)$ en $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ tal que,

$$F[x, y(x)] = 0.$$

Como a x_0 le corresponde y_0 y ambos son puntos de los intervalos considerados entonces $y_0 = y(x_0)$.

Ahora puesto que F_x y F_y son continuas en R la función $F = F(x, y)$ es diferenciable. Entonces,

$$\frac{dF}{dx} = Fx + Fy\frac{dy}{dx}$$

pero $F(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dF}{dx} = 0$ y por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy}$$

El teorema se puede generalizar de la misma manera a tres variables:

Sea la ecuación $F(x, y, z) = 0$. Si tal ecuación define implícitamente a $z = z(x, y)$ de tal suerte que $F[x, y, z(x, y)] = 0$ entonces, si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto interior de R y además, se consideran las hipótesis:

1. $F(x_0, y_0, z_0 = 0)$
2. $Fx\,Fy\,Fz$ son continuas en R
3. $Fz(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Existe un intervalo a z_0 donde se encuentra definida $z = z(x, y)$ tal que:

1. $z_0 = z(x_0, y_0)$
2. $F[x, y, z(x, y)] = 0$
3. $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{Fy}{Fz}$ cuando $Fz \neq 0$

Generalizando, sean $F(u, v, x, y, z)$ y $G(u, v, x, y, z)$ funciones diferenciables.

Además, $u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z)$ satisfacen las ecuaciones,

$$F(u, v, x, y, z) = 0 \quad y \quad G(u, v, x, y, z) = 0 \ .$$

Entonces, es posible calcular directamente $\dfrac{\partial u}{\partial x}\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$ usando el *jacobiano*.

Se sabe que,

$$F_u u_x + F_v v_x = -F_x$$
$$G_u u_x + G_v v_x = -G_x$$

Resolviendo,

$$Ux = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (x,v)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}} \qquad Vx = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,x)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}}$$

$$Uy = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (y,v)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}} \qquad Vy = -\frac{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,y)}}{\dfrac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}}$$

Ejemplo 1.8.1.

Si la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define implícitamente a las funciones $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ y $z = z(x,y)$,demostrar que,

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Solución:
De $f(x,y,z) = 0$,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} \quad ; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad ; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

Sustituyendo,

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\right) = -1$$

$$\therefore \; q.e.d.$$

Ejemplo 1.8.2.

Si aumenta a razón de 2 cm/s cuando pasa por el valor $x = 3$ cm, determinar la razón a la que debe variar y cuando $y = 1$ cm, para que la función $z = 2xy^2 - 3x^2y$ permanezca constante.

Solución:
Del enunciado en el punto $P(3,1)$

$$z = z(x,y) \qquad x = x(t) \qquad y = y(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = 2 \qquad \frac{dy}{dt} = ¿?$$

Usando la regla de la cadena, se tiene $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0$
Se calculan las derivadas;

$$\frac{dz}{dx} = 2y^2 - 6x \qquad\qquad \frac{dz}{dy} = 4xy - 3x^2$$

Se evalua $\dfrac{dz}{dt} = (2-18)(2) + (12-27)\dfrac{dy}{dt} = 0,\quad$ donde $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{32}{15}\left[\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$

1.8.1. Derivadas sucesivas de funciones implícitas.

Sea $y = y\,(x)$ una función implícitamente definida en $F\,(x,y)$. Si las parciales enésimas de $F\,(x,y)$ son continuas, se puede encontrar $y''\,(x)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{Fx}{Fy}\right) \qquad \textit{donde} \quad Fy \neq 0$$

Ejemplo 1.8.3.

Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ de $x^4y^2 - 3x^5y + x^6 + 8 = 0,$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3y^2 - 15x^4y + 6x^5}{2x^4y - 3x^5}$$

Ejemplo 1.8.4.

Determinar la pendiente en cada punto del polinomio de Descartes.

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{\left(x^2 - ay\right)}{\left(y^2 - ax\right)}$$

Ejemplo 1.8.5.

Calcular $\dfrac{dz}{dx}$ $\;y\;$ $\dfrac{dz}{dy}$ si: $3x^3yz^2 + xy^4z + y^2z^4 + z^6 = 0$

Solución:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{9x^2yz^2 + y^4z}{6x^3yz + xy^4 + 4y^2z^3 + 6z^5}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{3x^3z^2 + 4xy^3z + 2yz^4}{6x^3yz + xy^4 + 4y^2z^3 + 6z^5}$$

1.9. Curvas y tangentes.

Definición.

Una trayectoria o curva en R^3 es un mapeo de un intervalo de números reales a R^3. Entonces:

$$\mathbf{c}(t) = (g(t), h(t), k(t)) = g(t)\,\mathbf{i} + h(t)\,\mathbf{j} + k(t)\,\mathbf{k}$$

La tangente o vector velocidad a la curva $\mathbf{c}(t)$ en $\mathbf{c}(t_0)$ esta dada por:

$$\mathbf{c}'(t_0) = g'(t_0)\,\mathbf{i} + h'(t_0)\,\mathbf{j} + k'(t_0)\,\mathbf{k}$$

1.9.1. Curvas en gráficas.

Si $(g(t), h(t))$ es una curva en el plano y $f(x, y)$ es una función diferenciable, entonces la curva $\mathrm{c}(t) = (g(t), h(t), f(g(t), h(t)))$ esta en la gráfica $z = f(x, y)$.

1.9.2. Tangentes a curvas en superficies.

Si $\mathrm{c}(t) = (g(t), h(t), f(g(t), h(t)))$ está en la superficie $z = f(x, y)$,entonces la tangente a esa curva en el punto $\mathrm{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{c}'(t_0) = g'(t_0)\,\mathbf{i} + h'(t_0)\,\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} g'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(t_0)\right)\mathbf{k}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en $(g(t_0), h(t_0))$. Este vector yace en el plano tangente a la superficie.

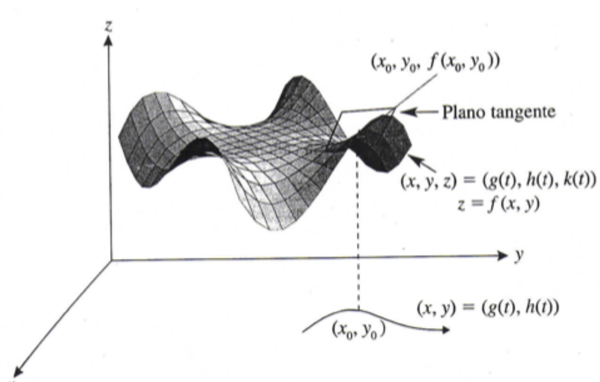


Figura 1.6.

Se escribe la curva como $\mathrm{c}(t) = (g(t), h(t), k(t))$ donde $k(t) = f(g(t), h(t))$. De la definición de derivada, se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = g'(t)\,\mathbf{i} + h'(t)\,\mathbf{j} + k'(t)\,\mathbf{k}$$

Nótese que $D_c(t)$ es una matriz columna con la misma componente de $\mathbf{c}'(t)$. Usando la regla de la cadena,

$$k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(t)$$

Por otro lado $\mathbf{c}'(t)$ esta en la dirección del plano tangente el cual es perpendicular a la normal. En efecto, la normal es

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \quad y \quad \mathbf{c}' = \left(g'(t), h'(t), \frac{\partial f}{\partial x}g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}h'(t)\right)$$

Además el producto puntual $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}' \equiv 0$

$$\begin{bmatrix} g'(t) \\ h'(t) \\ k'(t) \end{bmatrix} \left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = -\frac{\partial f}{\partial x}g'(t) - \frac{\partial f}{\partial y}h'(t) + k'(t) \equiv 0$$

pero

$$k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}h'(t)$$

Casos especiales de la regla de la cadena.

1. *Dos variables independientes y dos intermedias.*

   Sean $f : R^2 \to R$ y $g : R^2 \to R^2$ una función diferenciable. Si se escribe f como función de las variables u, v y sea $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

   Definamos $h : R^2 \to R$ como: $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

   Desarrollando se obtiene la regla de la cadena buscada

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. *Regla de la cadena para tres variables independientes y tres intermedias.*

   Sean $f : R^3 \to R$ y $g : R^3 \to R^3$ funciones diferenciables.

   Se escribe $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ y se define

$$h : R^3 \to R \text{ como } h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

   Entonces,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Caso general de la Regla de la Cadena.

Sean $g(x_1,\ldots,x_n) = (g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$ m funciones de n variables y sean $f(u_1,\ldots,u_m) = (f_1(u_1,\ldots,u_m),\ldots,f_p(u_1,\ldots,u_m))$ p funciones de m variables. Suponiendo que f y g son diferenciables. Entonces $f\cdot g$ es diferenciable y luego,

$$\mathrm{D}(f\cdot g)(\mathrm{x}_0) = \mathrm{D}f(g(\mathrm{x}_0))\cdot \mathrm{D}g(\mathrm{x}_0)$$

$$\text{si} \quad h = f\cdot g \quad u = g(\mathrm{x})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

1.9.3. Diferenciabilidad. Matriz Derivada.

La diferenciabilidad es un concepto más restrictivo que la existencia de derivadas parciales, lo que no sucede en el caso de una variable.

Considérese la ecuación del plano tangente a la gráfica $z = f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0).

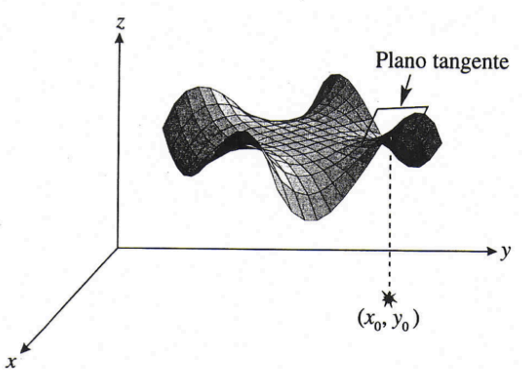


Figura 1.7.

Para puntos $P_i(x,y)$ cercanos a $P_0(x_0,y_0)$, la gráfica del plano tangente está cercana a la gráfica de f. Un plano que pasa por el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es la gráfica de una función lineal:

$$z = z_0 + a(x-x_0) + b(y-y_0) = g(x,y)$$

Como ya se sabe que las derivadas parciales representan las pendientes de curvas en la gráfica, éstas deben coincidir en el punto $P_0(x_0,y_0)$. Entonces,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Entonces, el plano tangente a la gráfica $z = f(x,y)$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ tiene la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

y la normal será,

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)$$

Ejemplo 1.9.1.

Encontrar la ecuación del plano tangente al hemisferio $z = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Solución:

Sea $f(x,y) = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

La ecuación del plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$z = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(x - x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(y - y_0)$$

$$z = z_0 - \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

Un vector normal a este plano es: $\dfrac{x_0}{z_0}\mathbf{i} + \dfrac{y_0}{z_0}\mathbf{j} + \dfrac{z_0}{z_0}\mathbf{k}$

Otro vector normal será multiplicando por z_0,es decir $x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$,el cual indica que el plano tangente a una esfera en el punto P es perpendicular al vector del centro de la esfera hacia P.

1.9.4. Diferenciabilidad.

Recuerdesé la definición de derivada para funciones de una sola variable,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Sea $x = x_0 + \Delta x$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0} = f'(x_0)$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0) \equiv f'(x_0)$ es posible escribir la ecuación de la siguiente manera,

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0$$

Es decir, si extendemos esta definición para el plano tangente

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

Sea $f : R^2 \to R$. Decimos que f es diferenciable en $P_0(x_0,y_0)$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en $P_0(x_0,y_0)$ y además,

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)-\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}\to 0$$

cuando $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$. Si se escribe esta definición en notación matricial. Para multiplicar elementos de R^2 por matrices, los elementos de R^2 se representan por matrices columna 2x1.

Sea $\mathrm{D}f(x_0,y_0)$ la matriz renglón: $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$

La definición de diferenciabilidad dice que:

$$f(x_0,y_0)+Df(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

$$=f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

es una buena aproximación a la función f cerca de $P_0(x_0,y_0)$.

Considérese $f : U\subset R^n \to R$ y sea $x_0\in U$. Usando la notación anterior la matriz derivada de f en x_0 es la matriz $Df(x_0)$ cuyo elemento ij es $\dfrac{\partial fi}{\partial xj}$ evaluado en x_0. Se dice que f es diferenciable en x_0 si las derivadas parciales de cada f_u existen en x_0 y además si,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-\mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

Si m=1, $f : U\subset R^n \to R$

$$\mathrm{D}f(x_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right]$$

y en el caso general donde f mapea un subconjunto de R^h a R^{hn}, $f(x_1,\dots,x_n)=(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ la matriz derivada es la matriz $m\times n$ tal que,

$$Df(x_0)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde $\dfrac{\partial fi}{\partial xj}$ está evaluado en x_0. A este arreglo se le llama la *matriz jacobiana.*

Ejemplo 1.9.2.

Calcular las matrices jacobianas de:

1. $f(x,y) = \left(e^{x+y} + y, y^2 x\right)$

   Aquí, $f : R^2 \to R^2$ queda definido por $f_1(x,y) = e^{x+y} + y$, $f_2(x,y) = y^2 x$ luego, D es una *matriz de* 2×2.

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$

2. $f(x,y) = \left(x^2 + \cos y, ye^x\right)$

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}$$

3. $f(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$

$$\mathrm{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}$$

1.10. Derivada direccional y gradiente

1.10.1. El Gradiente

Si $f(x,y,z)$ es una función escalar (real) de tres variables, su gradiente,∇f o $gradf$,es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

En dos dimensiones $f(x,y)$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

donde el operador ∇, "nabla" o "del", se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Nota: ∇ *no es un vector, si no un operador vectorial.*

Por ejemplo, si ϕ es un *campo escalar*, $\phi\nabla$ es un operador, mientras que $\nabla\phi$ es una función vectorial llamada *gradiente*. Igualmente, si $\mathbf{V}$ es un *campo vectorial*, $\mathbf{V} \cdot \nabla$ es un operador; mientras que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ es una importante función escalar llamada *divergencia*.

Al aplicar ∇ por la izquierda resulta una *función vectorial* ya que actúa como *operador*. Pero si ∇ se aplica por la derecha resulta en un *operador vectorial*.

Obsérvese que ∇f es lo mismo que la derivada Df representada como vector y no como matriz renglón.

Ejemplo 1.10.1.

Encontrar ∇f si $f(x,y,z)=xy-z^2$

Solución:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$$

Nótese que el vector $\nabla f(x,y,z)$ es una función del punto $P(x,y,z)$ donde se evalúan sus derivadas parciales . Es decir, el operador vectorial ∇ asigna a cada punto en el espacio un vector (campo vectorial). El ∇f $(gradf)$ es un *campo vectorial.*

Ejemplo 1.10.2.

Dibuje el campo vectorial ∇f donde $f(x,y)=x^2+y^2$

Solución:

$$\nabla f=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}=2\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\right)$$

Para cada (x,y) dibujamos un vector $2\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\right)$ basado en (x,y).

Ejemplo 1.10.3.

Sea $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ y $r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, demostrar que:

1. $\nabla r=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$
2. $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3};\quad r\neq 0$
3. $\left|\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right|=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Solución:

1.

$$\begin{aligned}\nabla r&=\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\\&=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\&=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r}\end{aligned}$$

entonces ∇r es el vector unitario en la dirección (x,y,z).

2. $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{r}}\right)=\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\right)=-\dfrac{\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3}\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3}$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}\left(x\mathrm{i}+y\;\mathrm{j}+z\;\mathrm{k}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

3. $\left|\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right|=\left|-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}\right|=\left|-\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{r^3}\right|=\dfrac{r}{r^3}=\dfrac{1}{r^2}\equiv\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

1.10.2. Derivada direccional.

Considérese un vector unitario $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$. Sea en R^3 campo escalar diferenciable $F = F(x, y, z)$. Para cada punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ del campo, se define la semirrecta,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha \\ y &= y_0 + t\cos\beta \quad t > 0 \\ z &= z_0 + t\cos\gamma \end{aligned}$$

Para todos los puntos $P(x, y, z)$ de la región, F es una función compuesta de t. Luego,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Representa la variación del campo escalar F en la dirección de la semirrecta, Así

$$\frac{dF}{dt} = Fx\cos\alpha + Fy\cos\beta + Fz\cos\gamma;$$

recibe el nombre de **derivada direccional.**

Obviamente, $\dfrac{dF}{dt} = \nabla F \cdot \mathbf{e}$

Pero $\nabla F \cdot \mathbf{e} = |\nabla F|\,|\mathbf{e}|\cos(\mathbf{e}, \nabla F) = Fx\cos\alpha + Fy\cos\beta + Fz\cos\gamma$

Si $\mathbf{e}$ coincide con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ $\cos(\mathbf{e}, \nabla F) = 1$ y $\dfrac{dF}{dt} = |\nabla F|$

La magnitud de ∇F es el *tamaño máximo de la derivada direccional.*

Ejemplo 1.10.4.

Mostrar que la derivada direccional de una función escalar $\phi(x, y, z)$ en la dirección de una curva C, se expresa como,

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T}$$

donde $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \dfrac{dx}{ds}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{ds}\mathbf{j} + \dfrac{dz}{ds}\mathbf{k}$ es el vector tangente unitario.

Solución:

Usando regla de la cadena:

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \text{ que es el producto escalar } \nabla\phi \cdot \mathbf{T}.$$

por otro lado, obsérvese que,

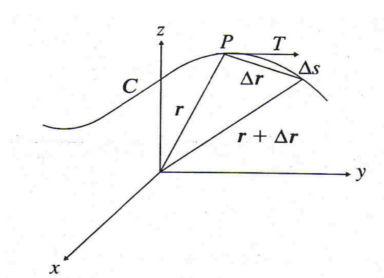


Figura 1.8.

Sean $P(x,y,z)$ y $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ dos puntos sobre C. Los vectores posición son respectivamente,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = (x+\Delta x)\mathbf{i} + (y+\Delta y)\mathbf{j} + (z+\Delta z)\mathbf{k}$$

Si $\phi(x,y,z)$ es una función diferenciable que contiene al arco de curva dado P a Q, la derivada direccional de $\phi(x,y,z)$ en P en la dirección de un vector tangente T unitario en P se define como,

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x,y,z)}{\Delta s}$$

donde Δs es la longitud de arco sobre C entre P y Q .

1.10.3. Representación geometría del gradiente y la derivada direccional.

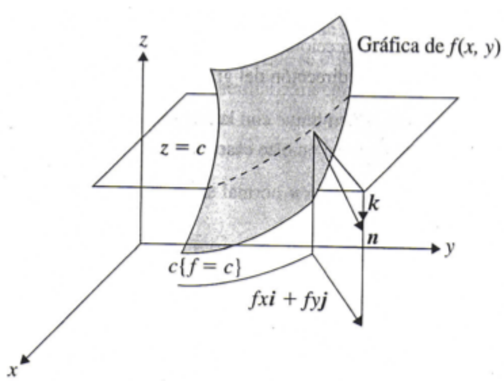


Figura 1.9.

Sea el vector $\mathbf{n}$ normal a la gráfica $f(x,y)$. Se divide en una parte vertical $-\mathbf{k}$ y una horizontal $f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ que además es perpendicular a la curva de nivel C $\{f = c\}$.

La parte horizontal es $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ y es perpendicular a la curva de nivel C $\{f = c\}$.

El vector gradiente ∇f es ortogonal a la curva $\{f = c\}$ que pasa por el punto $P(x,y)$. Además el gradiente apunta en la dirección ascendente de valores de f.

1.10.4. Gradientes y derivadas direccionales

Sean,

1. f una función escalar diferenciable de dos o tres variables.
2. $\mathbf{T}$ un vector unitario.
3. $\nabla f \cdot \mathbf{T}$ la derivada direccional de f en un punto $P(x,y)$ en la dirección.

Se sabe que,
$\nabla f \cdot \mathbf{T} = |\nabla f|\,|\mathbf{T}|\cos\theta = (|\nabla f|\cos\theta)$ donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{T}$.

Puesto que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ el valor máximo es cuando $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ es decir cuando ∇f y $\mathbf{T}$, tengan la misma dirección. Entonces:

$$\mathbf{T} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

es la dirección en la cual se incrementa f. Igualmente la dirección $-\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ es en la cual f disminuye.

En resumen, la derivada direccional en (x, y) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{e}$, es la razón de cambio de f a lo largo de una línea recta que pasa por (x, y) en la dirección de $\mathbf{e}$.

La derivada direccional en (x, y) en la dirección $\mathbf{e}$ tiene un valor $\nabla f \cdot \mathbf{e}$ y es máximo cuando $\mathbf{e} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ y mínimo cuando $\mathbf{e} = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Propiedades de la derivada direccional y el gradiente.

$$D_{uf} = \nabla f \cdot \mathbf{e} = |\nabla f|\,|\mathbf{e}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

1. La derivada direccional tiene su valor máximo cuando $\cos\theta = 1$ es decir cuando $\mathbf{e}$ es la dirección del gradiente $D_{uf} = |\nabla f|$.
2. La función f disminuye con la mayor rapidez en la dirección $-\nabla f$. Su derivada direccional en este caso es: $D_{uf} = |\nabla f|\cos\pi = -|\nabla f|$.
3. Cualquier dirección $\mathbf{n}$ normal al gradiente, es una dirección de cero cambio en f,
$$D_{uf} = |\nabla f|\cos\frac{\pi}{2} = |\nabla f| \cdot 0 \equiv 0$$

Reglas algebraicas para gradientes.

1. $\nabla(kf) = k\nabla f$
2. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
4. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

Algunas aplicaciones de derivadas parciales de orden superior.

Ecuación de calor: *(Fourier, Siglo XIX, 1968-1830)*

Sea un cuerpo homogéneo $V \quad en \quad R^3$ .Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en cada punto en el tiempo t, T debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$ donde k es la conductividad térmica.

Ecuación Potencial: (Laplace.)

Para cualquier campo donde $\mathbf{F} = -\nabla f$ se satisface que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \text{ (excepto el origen)}$$

Anteriormente Euler la uso en fluidos. Después Poisson demostró que para campos eléctricos, el potencial eléctrico satisface:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4pr$$

Ecuación de onda, (Bernoulli,1727)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Las ecuaciones arriba mencionadas muestran algunas de las aplicaciones más importantes de ecuaciones en derivadas parciales frecuentemente utilizadas en ingeniería. Indudablemente el lector se familiarizará con ellas a lo largo de sus estudios ya sea en teoría electromagnética, mecánica y dinámica de fluidos, mecánica del medio continuo y transferencia de calor.

Ejemplo 1.10.5.

Si $f(x, y) = x^2 - y^2$ en que dirección desde $(0, 1)$ deberán ir para aumentar f al máximo.

Solución:

La dirección del vector será:

$$\begin{aligned} \nabla f(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{en} \quad (0,1) \\ &= 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} \quad \text{en} \quad (0,1) \\ &= -2\mathbf{j} \end{aligned}$$

Se tiene que dirigir hacia el origen a lo largo del eje $y'y$.

Ejemplo 1.10.6.

Una hormiga en una sartén quiere aliviarse rápidamente del calor. Su posición con respecto al centro es $(x, y) = (-1, 2)$. La temperatura en (x, y) está dada por $T(x, y) = 200 - x^2 - 2y^2$. *¿Hacia dónde debe correr?*

Solución:

$$\begin{aligned} \nabla T(x,y) &= -2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} \\ \Rightarrow \nabla T(-1,2) &= 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \end{aligned}$$

(*Dirección del aumento de temperatura*).

Deberá correr en dirección opuesta, o sea $(-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$.

Ejemplo 1.10.7.

Una colina tiene la forma de la gráfica $z = e^{-x^2-2y^2}$. Si se parte del punto $\left(2, 3, e^{-22}\right)$ encontrar la ruta más empinada para llegar a la cima.

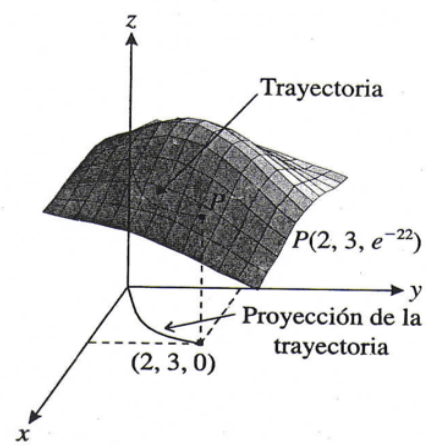


Figura 1.10.

Solución:

Consideremos la proyección de la trayectoria en el plano x, y.

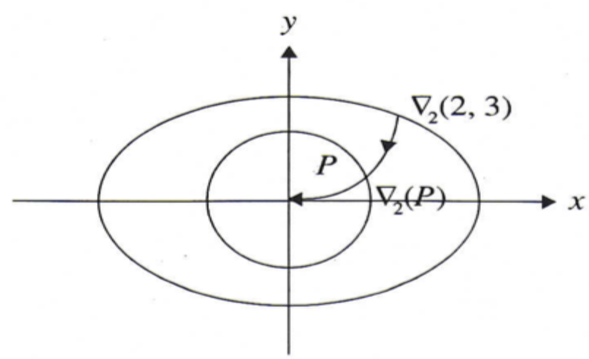


Figura 1.11.

La ruta de mayor pendiente en cada punto dado es la dirección $\nabla z\,(2, 3)$. Dicha trayectoria es tangente a $\nabla z\,(p)$; si se continúa en esa dirección nunca se llegará a la cima. La dirección debe cambiar a medida que la trayectoria suba. En cada punto $P_n(x, y)$,∇z dará la dirección en la cual z aumenta con mayor rapidez. Al buscar una curva la cual tenga en cada punto la dirección del gradiente, se tiene

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2e^{-x^2-2y^2}\left(-x, -2y\right)$$

La pendiente de este vector es:

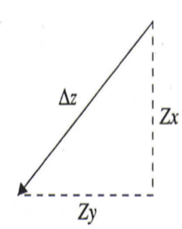


Figura 1.12.

Pendiente de la curva buscada en $(x, y) = \dfrac{Z_y}{Z_x} = \dfrac{2y}{x}$

La curva de la segunda figura tiene como pendiente: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$

Al resolver esta ecuación diferencial se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\ln y = 2 \ln x + cte.$$

$$\ln y = \ln x^2 + c$$

$$y = cx^2$$

ya que la curva pasa por el punto $P(2, 3)$, entonces:

$$3 = c \cdot 2^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{4}$$

$$\text{luego } y = \frac{3}{4}x^2.$$

En el espacio la trayectoria será:

$$z = e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-\frac{9x^4}{8}}$$

Ejemplo 1.10.8.

La *fuerza gravitacional* ejercida en una *masa* m en $P(x, y, z)$ por una masa M en el origen es, según *la ley de la gravitación universal de Newton*,

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{donde} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad r = |\mathbf{r}|$$

Escriba $\mathbf{F}$ como el negativo del gradiente de una función ϕ (llamada el potencial gravitacional) y verifique que $\mathbf{F}$ es ortogonal a las superficies de nivel de ϕ.

Solución:

Del ejemplo 1.10.3 ,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Eligiendo $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ tal que $\phi = -\dfrac{GMm}{r}$ se cumple $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.

Nótese que en cada superficie de nivel de ϕ , r es una constante, luego la superficie es una esfera. Ya que $\mathbf{F}$ es un múltiplo positivo de $\mathbf{r}$, entonces $\mathbf{F}$ apunta hacia el origen y es ortogonal a esa esfera.

Ejemplo 1.10.9.

El potencial de un punto $P(x, y, z)$, en un cierto campo electrostático, está dado por

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Determinar:

1. La rapidez de cambio de v en el punto $A(2, 1, -2)$ y en dirección al punto $B(4, -5, 1)$.
2. La dirección en la cual se presenta la mayor rapidez de cambio de v en el punto A , expresada por un vector unitario.

Solución:

1. Se tiene:

$$\nabla v = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z)$$

$$\nabla v|_A = -\frac{1}{27}(2, 1, -2)$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{AB}{|AB|} = \frac{1}{7}(2, -6, 3)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{ds} = \left(-\frac{1}{27}\right)\left(\frac{1}{7}\right)(2, 1-2) \cdot (2, -6, 3) = \frac{8}{189}$$

2. La dirección es:

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$$

Ejemplo 1.10.10.

La ecuación de la superficie de una montaña es

$$z = 1200 - 2x^2 - 3y^2$$

donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el norte y el eje y hacia el oeste. Un montañista se encuentra en el punto A(5,-10,850).

1. ¿Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada?
2. Si el montañista se desplaza en dirección norte, ¿asciende o desciende? y ¿a que razón?
3. Si el montañista se desplaza en dirección sureste, ¿asciende o desciende? y ¿a que razón?
4. ¿En qué dirección recorre una trayectoria de nivel?

Solución:

Tenemos,

$$z = 1200 - 2x^2 - 3y^2 \text{en el punto } P(5, -10, 850)$$

1. La dirección de la ladera más pronunciada es la del gradiente de z. Entonces,

$$\nabla z = \frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} = -4x\,\mathbf{i} - 6y\,\mathbf{j}$$

$$\nabla z = -20\,\mathbf{i} - 60\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{40}}[-2\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}]$$

2. Si el montañista se desplaza en dirección norte, entonces

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}$$

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \mathbf{u} = (-20\mathbf{i} + 60\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = -20.$$

desciende a razón de 20 [m/m].

3. Si el montañista se desplaza en dirección sureste entonces,

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \mathbf{u} = (-20\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{20}{\sqrt{2}} + \frac{60}{\sqrt{2}} = \frac{80}{\sqrt{2}} = 56.568$$

4. Recorre una trayectoria de nivel a 90° del gradiente . Por lo tanto se mueve en las direcciones:

$$\alpha_1 = \theta + 90^{\text{o}}; \alpha_2 = \theta - 90^{\text{o}}$$

donde θ es la dirección del gradiente en grados

$$\theta = \arctan(-\frac{60}{20}) = -71.56^{\text{o}}$$

$$\theta = 288.43^{\text{o}}$$

Finalmente,

$$\alpha_1 = 288.43 + 90^{\text{o}} = 378.43^{\text{o}}; \qquad \alpha_2 = 288.43 - 90^{\text{o}} = 198.43^{\text{o}}$$

Ejemplo 1.10.11.

Determinar la derivada direccional de la función vectorial $\mathbf{V} = (xyz-1)\mathbf{i} + (y_2 - x2)\mathbf{j} + (xyz)\mathbf{k}$ en el punto $P(4,3,0)$ y en dirección del punto $Q(2,2,2)$.

Solución:

Se tiene

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ -2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \qquad \nabla\mathbf{V}|_P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \frac{PQ}{|PQ|} = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{V}}{ds} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 24 \\ 10 \\ 24 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.10.12.

Un alpinista se encuentra en el punto $P(-10,5,850)$ de una montaña descrita por la ecuación $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ donde la distancia se mide en metros y el eje x apunta al este y el eje y apunta hacia el norte.

Determinar:

1. La dirección de la ladera más pronunciada.
2. La razón a la que asciende o desciende el alpinista si se desplaza en dirección este.
3. Las direcciones en las cuales se desplaza por una curva de nivel.

Solución:

1. La dirección de la ladera más pronunciada está dada por el gradiente de z.

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-6x, -4y)$$

$$\nabla z|_P = (60, 20)$$

o bien,

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

2. Puesto que el eje x apunta al este

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x; \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = 60 \text{ asciende a una razón de } 60 \text{ (m/m).}$$

3. Para que se desplace sobre una curva de nivel

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\text{si } \mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} \quad |\mathbf{u}| = 1$$

$$\text{y puesto que} \quad \nabla z|_P = (60, 20)$$

Se tiene

$$60u_x + 20u_y = 0$$

$$u_x{}^2 + u_y{}^2 = 1$$

Al resolver el sistema, las direcciones son:

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\,\mathbf{j}$$

Ejercicios propuestos.

1. Encontrar para $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su derivada direccional en la dirección de $P(1, 1, 0)$ a $Q(2, 1, 1)$ y su máximo valor y dirección en el punto $P(1, 1, 0)$.

2. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $3xy + z^2 = 4$ en el punto $P(1, 1, 1)$.

3. Encuentre la ecuación de la línea tangente a $xy = 6$ en $x = 1, \quad x = 6$.

4. La ley de Coulomb dice que la fuerza eléctrica en una carga q en (x, y, z) producida por otra carga Q situada en el origen es $\mathbf{F} = \dfrac{Qq\mathbf{r}}{r^3}$. Encuentre ϕ tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ y verifique que $\mathbf{F}$ es perpendicular a las superficies de $\phi = cte$.

1.11. Resumen Capítulo 1. Conceptos Elementales.

Funciones implicitas.

Sean $F(u,v,x,y,z)$ y $G(u,v,x,y,z)$ funciones diferenciables.
Además: $u = u(x,y,z) \quad v = v(x,y,z)$ satisfacen las ecuaciones:

$$F(u,v,x,y,z) = 0 \quad y \quad G(u,v,x,y,z) = 0$$

Entonces podemos calcular directamente $\dfrac{\partial u}{\partial x} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}$ usando el *jacobiano.*

Se llama jacobiano al determinante:

$$J\left(\frac{F,G}{u,v}\right) \text{ o } \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}$$

Así:

$$Ux = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad Vx = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$Uy = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad Vy = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Regla de la cadena

Dos variables independientes y dos intermedias.

Sea $f : R^2 \to R$ y $g : R^2 \to R^2$ una función diferenciable.
Escribamos f como función de las variables u, v y $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.
Definamos $h : R^2 \to R$ como:

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

pruebe:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Para tres variables independientes y tres intermedias.

Sea $f : R^3 \to R \quad y \quad g : R^3 \to R^3$ funciones diferenciables.
Donde $g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ y se define,
$h : R^3 \to R$ como $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$.
Entonces:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Derivada direccional y gradiente.

Gradiente.

Si $f(x,y,z)$ es una función escalar (real) de tres variables, su gradiente, ∇f o *gradf* es el vector,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

En dos dimensiones $f(x,y)$, es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Donde el operador ∇ " nabla " o "del" se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Derivada Direccional

Se considera un vector unitario $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$.
Sea en R^3 campo escalar diferenciable $F = F\,(x,y,z)$.
Para cada punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ del campo, se define la semirrecta:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha \\ y &= y_0 + t\cos\beta \quad t > 0 \\ z &= z_0 + t\cos\gamma \end{aligned}$$

Para todos los puntos $P_n(x,y,z)$ de la región, F es una función compuesta de t.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma$$

Obviamente:

$$\frac{dF}{dt} = \nabla F \cdot \mathbf{e}$$

Pero

$$\nabla F \cdot \mathbf{e} = |\nabla F|\,|\mathbf{e}|\cos(\mathbf{e}, \nabla F) = Fx\cos\alpha + Fy\cos\beta + Fz\cos\gamma$$

Si $\mathbf{e}$ coincide con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

$$\cos(\mathbf{e}, \nabla F) = 1 \text{ y } \frac{dF}{dt} = |\nabla F|$$

La magnitud de ∇F es el *tamaño máximo de la derivada direccional.*

1.12. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 1.1.

Determinar las coordenadas del punto P, contenido en la curva de ecuación $\mathbf{r}(t) = (2\alpha t - \alpha)\mathbf{i} + (\alpha t + 1)\mathbf{j} + (3t^2)\mathbf{k}$, $\alpha \ni R$, sabiendo que las ecuaciones de la recta tangente en P son,

$$x = -3\alpha + \alpha t, y = -1 + t \text{ y } z = 3 - 3t$$

Solución:

La dirección de la curva tangente a la curva está dada por,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\alpha\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}.$$

Y debe ser paralela a la dirección de la recta

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

de donde

$$\frac{dr}{dt}u \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \lambda u \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \alpha\lambda \\ \alpha = \lambda \\ 6t = -3\lambda \end{cases}$$

Al resolver se obtiene,

$$\lambda = 2 \qquad\qquad \alpha = 2 \qquad\qquad t = -1$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P = \mathbf{r}(-1) &= [2(2)(-1) - 2]\,\mathbf{i} + [(2)(-1) + 1]\,\mathbf{j} + 3(-1)^2\,\mathbf{k} \\ &= -6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ &\Rightarrow P(-6, -1, 3) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.

Determinar, de ser posible, la ecuación de la superficie en donde queda contenida la curva de ecuaciones

$$x = 2 - t - t^2 \qquad\qquad y = 1 + 2t - 2t^2 \qquad\qquad z = -3 - t + 3t^2$$

Solución:

Se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (2 - t - t^2,\ 1 + 2t - 2t^2,\ -3 - t + 3t^2) \\ \mathbf{r}' &= (-1 - 2t,\ 2 - 4t,\ -1 + 6t) \\ \mathbf{r}'' &= (-2, -4, 6) \\ \mathbf{r}''' &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= (8, 8, 8) \\ |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2 &= 192 \end{aligned}$$

$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = 0, J = \dfrac{0}{192} = 0$ **La curva es plana.**

La ecuación del plano está dada por,

$$P_0P_1 \times P_0P_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_0 = \mathbf{r}(0) = (2, 1, -3) \\ P_1 = \mathbf{r}(1) = (0, 1, -1) \\ P_2 = \mathbf{r}(-1) = (2, -3 - 1) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} (x-2) & (y-1) & (z+3) \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x+2) + 8(y-1) + 8(z+3) = 0$$

El plano es $x + y + z = 0$.

Ejercicio 1.3.

Sean las superficies S_1 y S_2 ,definidas por

$$S_1 = \mathbf{r}_1(s,t) = (4\tan s)\,\mathbf{i} + (4\operatorname{sen} t \sec s)\,\mathbf{j} + (4\cos t \sec s)\,\mathbf{k}$$

$$S_2 = \mathbf{r}_2(s,t) = (4\sec v)\,\mathbf{i} + (4\operatorname{sen} u \tan v)\,\mathbf{j} + (4\cos u \tan v)\,\mathbf{k}$$

A partir de las ecuaciones, determinar la ecuación cartesiana del plano normal a la curva de intersección de S_1 y S_2, en el punto $P(0, 0, 4)$.

Solución:

En el punto P

$$S_1 = \begin{cases} 0 = 4\tan s \\ 0 = 4\operatorname{sen} t \sec s \quad \Rightarrow \; s = 0, t = 0 \\ 4 = 4\cos t \sec s \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} 0 = 4\sec v \\ 0 = 4\operatorname{sen} u \tan v \quad \forall u, v \\ 4 = 4\cos u \tan v \end{cases}$$

El punto P no pertenece a S_2 , por lo cual no puede obtenerse la ecuación del plano normal.

Capítulo 2

Valores extremos para funciones de dos o más variables.

Este capítulo está dedicado exclusivamente al cálculo diferencial de varias variables y no al cálculo vectorial. Sin embargo, es absolutamente esencial para los problemas prácticos del ingeniero. Al extender los conceptos de valores extremos (máximos y mínimos) de una a dos o más variables, se abre un universo de problemas prácticos. Desde aplicaciones sencillas en tres dimensiones hasta problemas de optimación y valores extremos de muchas variables, de gran aplicabilidad a problemas de ingeniería industrial y cálculo de variaciones. Se empieza por extender el concepto de punto crítico para funciones de una sola variable a funciones de dos variables, estableciendo la generalización del Teorema de Taylor. Se presenta entonces, el criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables. Una vez comprendidos los criterios para maximizar o minimizar una función, se introduce al lector a los multiplicadores de Lagrange. Este concepto, novedoso para el estudiante, establece el método para maximizar (o minimizar) funciones sujetas a restricciones entre sus variables. Así por ejemplo, se podrán resolver problemas de gran utilidad en ingeniería industrial, de costos, probabilidad y cálculo de variaciones.

2.1. Máximos y mínimos para funciones de dos variables.

Teorema de Taylor (para una variable).

Consideremos una función $y = f(x)$ tal que sus derivadas son continuas hasta $(n+1)$. Entonces, para un punto fijo $x = a$, se tiene:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n.$$

$$\text{Donde } R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\,dt \text{ es el residuo.}$$

Para valores de x cercanos a a, este residuo es pequeño (de orden n); es decir:

$$\frac{R_n}{(x-a)^n} \to 0 \text{ cuando} x \to a.$$

Luego R_n es pequeño comparado con la cantidad ya pequeña $(x-a)^n$.

Demostración:

Del teorema fundamental del cálculo integral:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

Integrando el lado derecho por partes, y usando $u = f'(t)$ y $v = x - t$
Se obtiene:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt$$

lo cual prueba el primer orden del teorema para $n = 1$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt$$

Integrando nuevamente por partes usando:

$$u = f''(t) \qquad v = \frac{(x-t)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt = \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$$

y así sucesivamente.

2.1.1. Series de Taylor y de Maclaurin.

Si la $(n+1)$-ésima derivada de $y = f(x)$ existe en $a \leq x \leq a+h$, entonces

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(a+\theta h)$$

donde $0 < \theta < 1$

Supongamos que por grande que sea n, existe en el mismo intervalo $f^{n+1}(x)$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{h=0}^{n} \frac{h^n}{n!}f^n(a) + R_n \\ &= S_n + R_n. \end{aligned}$$

donde S_n es la suma parcial de la serie de potencias $\sum_{h=0}^{n} \frac{h^n}{n!}f^n(a)$ y R_n es el residuo o resta de Lagrange.

Teorema:

La condición necesaria y suficiente para que $f(a+h)$ se pueda desarrollar en serie de potencias es que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Demostración.

Si $f(a+h)$ es desarrollable en serie de potencias, entonces

$$f(a+h) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n$$

pero para que la función $f(a+h)$ sea desarrollable en serie de potencias se requiere que

$$f(a+h) = \lim_{n\to\infty} S_n \text{ luego } \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

recíprocamente, si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \Rightarrow f(a+h) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

Lo mismo es cierto si $f^{n+1}(x)$ es acotada en $a < x < x+h$ para toda n, luego la función es desarrollable en serie de potencias en el intervalo considerado.

En resumen,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \ldots \qquad \textit{Taylor}$$

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(0) + \ldots \qquad \textit{Maclaurin}$$

Ejemplo 2.1.1.

Efectuar el desarrollo de series de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Solución:

Sea $y = \operatorname{sen} x$; como $\left|\dfrac{d^n}{dx}\operatorname{sen} x\right| < 1$ es acotada, entonces la función se puede desarrollar en series de potencias.

Usando la serie de Maclaurin:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\big|_{x=0} &= \cos x\big|_{x=0} = 1\\
\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen} x\big|_{x=0} &= -\operatorname{sen} x\big|_{x=0} = 0\\
\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen} x\big|_{x=0} &= -\cos x\big|_{x=0} = -1\\
\frac{d^4}{dx^4}\operatorname{sen} x\big|_{x=0} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(0) + \frac{x}{1!}\cos(0) - \frac{x^2}{2!}\operatorname{sen}(0) - \frac{x^3}{3!}\cos(0) + \frac{x^4}{4!}\operatorname{sen}(0) + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Nota: Si x es pequeño, entonces $sen = x$

Sea $y = \cos x$

$$
\begin{aligned}
y' &= -\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\\
y'' &= -\cos x = \cos(\pi + x)\\
y''' &= \operatorname{sen} x = \cos\left(3\frac{\pi}{2} + x\right)\\
y^{iv} &= -\cos x = \cos(\pi + x)\\
&\vdots\\
y^n &= \cos x = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right)
\end{aligned}
$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots$$

Ejemplo 2.1.2.

Efectuar el desarrollo en serie de e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Nota: Si $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \ldots = 2.718281828457045$$

Consideremos la función e^z, donde z es complejo.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

Si $z = ix$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots$$

Agrupando

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots\right) +$$

$$i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Similarmente,

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

Resulta obvio,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Igualmente se puede obtener

$$e^x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$$

y por analogía con las funciones trigonométricas

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x \qquad \Rightarrow \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ejercicios propuestos.

1. Demostrar

   a) $sen^2 x + \cos^2 x = 1.$

   b) $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$

   c) $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx).$

2. Desarrollar en serie de potencias a $y = \ln x$.

2.1.2. Extensión del Teorema de Taylor a dos variables.

De la definición de función diferenciable en un punto, sabemos que si $f(x, y)$ es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$, entonces

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] + (y - y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] + R_1$$

donde

$$\frac{R_1}{\left|\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right|} \to 0 \quad cuando \quad \begin{array}{l} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{array}$$

Sin olvidar que

$$z = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] + (y - y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

es la ecuación del plano tangente a la gráfica $z = f(x, y)$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

El lado derecho es la *aproximación lineal* o aproximación de primer orden de la función f. Es decir, esta versión del teorema de Taylor dice que la gráfica del plano tangente es muy cercana a la gráfica de la función $z = f(x, y)$ para puntos $P_n(x, y)$ cercanos a $P_0(x_0, y_0)$. Por cercano, queremos decir que la diferencia con los valores de z es R_1, donde R_1 es tan pequeño que no solo $R_1 \to 0$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ sino que además,

$$\frac{R_1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \to 0 \qquad cuando \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$$

$$\text{Es decir, } R_1 << \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Ahora bien, para la *segunda aproximación* del teorema de Taylor, sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] + (y-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right] + (x-x_0)(y-y_0)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}(y-y_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right] + R_2$$

donde

$$\frac{R_2}{|\mathbf{h}|^2} \to 0 \quad \textit{cuando} \quad |\mathbf{h}| \to 0 \quad \textit{donde} \quad \mathbf{h} = (x-x_0, y-y_0)$$

Esta es la aproximación cuadrática.

Nótese que el error $\frac{R_2}{|\mathbf{h}|^2} \to 0$ cuando $|\mathbf{h}| \to 0$ establece que $R_2 << |\mathbf{h}|^2$ y la aproximación es aún mejor que cuando considerábamos R_1.

Teorema de Maclaurin.

El teorema de Maclaurin es un caso especial del teorema de Taylor para el intervalo $0 \le x \le h$, es decir, cuando a coincide en el origen.

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(0h)$$

Ejemplo 2.1.3.

Calcular la segunda aproximación de Taylor para la función

$$f(x,y) = sen\,(x+2y) \text{ alrededor del origen } P(0,0).$$

Solución:

$f(0,0) = 0$ y la función está acotada.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0+2(0)) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2\cos(0+2\cdot 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$$

Además, como $x_0 = 0, y_0 = 0$; $f(x,y) = x + 2y + R_2$

donde $\frac{R_2}{|\mathbf{h}|^2} \to 0 \quad \textit{cuando} \quad |\mathbf{h}| \to 0 \quad \textit{donde} \quad \mathbf{h} = (x,y)$.

Ejemplo 2.1.4.

Encontrar la primera y segunda aproximación de Taylor para $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $P_0\left(x_0,y_0\right) = P_0\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

$$f(x_0,y_0) = \operatorname{sen}(x_0,y_0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f_x(x_0,y_0) = y_0\cos(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = x_0\cos(x_0,y_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) = -y_0^2\cos(x_0,y_0) = \frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = -y_0x_0\operatorname{sen}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f_{yy}(x_0,y_0) = -x_0^2\operatorname{sen}(x_0,y_0) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

La primera aproximación lineal es

$$\begin{aligned} f\left(x,y\right) &= f\left(x_0,y_0\right) + f_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right) + f_y\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right) \\ &= 1+0+0 = 1 \end{aligned}$$

La segunda aproximación es

$$g\left(x,y\right) = 1+0+0+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x-1\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-1\right)\left(\frac{y-\pi}{2}\right)^2$$

$$g\left(x,y\right) = 1-\frac{\pi^2}{8}\left(x-1\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(x-1\right)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

2.2. Máximos y mínimos para funciones de dos variables.

Definiciones.

Sea $f\left(x,y\right)$ una función de dos variables. Se dice que $P_0\left(x_0,y_0\right)$ es un ***mínimo local*** o relativo de f, si existe un disco de radio positivo alrededor de $P_0\left(x_0,y_0\right)$, tal que $f\left(x,y\right) \geq f\left(x_0,y_0\right) \forall \left(x,y\right) \in$ al disco.

Similarmente, si $f\left(x,y\right) \leq f\left(x_0,y_0\right)$ en el disco, se dice que $P_0\left(x_0,y_0\right)$ es un ***máximo local*** o relativo de f.

Un punto que sea local máximo o local mínimo se llama un *extremo local.*

El punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ es un ***punto crítico*** de $f\left(x, y\right)$ si,

$$f_x\left(x_0, y_0\right) = f_y\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Es decir que el plano tangente a la gráfica $z = f\left(x, y\right)$ en $P_0\left(x_0, y_0\right)$ es horizontal. Esto significa que *cualquier máximo o mínimo es un punto crítico.*

En resumen:

Para hallar los máximos o mínimos locales o relativos de $z = f\left(x, y\right)$ se localizan primero los puntos críticos. Obviamente, para cualquier punto crítico el gradiente $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ es cero.

Ejemplo 2.2.1.

Encontrar los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2yx$$

Como:

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 &= 0 \\ x^2 + 2xy &= 0 \end{aligned}$$

al resolver se tiene que $x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm y$

$$\begin{array}{llllll} Si & x = +y: & 2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ Si & x = -y & -2y^2 + y^2 = -y^2 = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \end{array}$$

El único punto crítico es $P(0, 0)$ y no es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo 2.2.2.

Sea la función $z = 2\left(x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}$ Localizar los máximos y mínimos y los puntos críticos.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 4x\left(e^{-x^2-y^2}\right) + 2\left(x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right) \\ &= e^{-x^2-y^2}\left[4x - 4x\left(x^2 + y^2\right)\right] \\ &= 4xe^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad & \textit{cuando} \quad x = y = 0 \\ o \quad & \textit{cuando} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

los puntos críticos son $P(0, 0)$ y el círculo limitado por $x^2 + y^2 = 1$.

Nótese que en cálculo de una variable, los puntos críticos pueden ser máximos, mínimos o puntos de inflexión. En varias variables existe un nuevo tipo de punto crítico llamado ***punto silla***. Cerca de este punto, la función puede tomar valores mayores o menores dependiendo de la dirección en la que el observador se aleje del punto.

Ejemplo 2.2.3.

Sea $z = x^2 - y^2$ .Mostrar que $A(0,0)$ es un punto crítico. ¿Es un máximo local o mínimo local?

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad para \quad A(0,0)$$

y $A(0,0)$ es un punto crítico. Ahora bien, $f(x,y) = x^2 - y^2$ es cero en $A(0,0)$ pero puede ser positivo en el eje $x'x$, o negativo en el eje $y'y$. Luego es un *punto silla.*

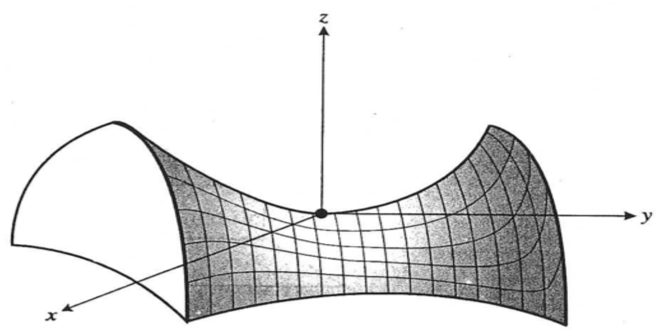


Figura 2.1.

2.2.1. Máximos y mínimos absolutos en intervalos cerrados.

Dada una función diferenciable $y = f(x)$ para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo $[a,b]$ se puede hacer lo siguiente:

1. Encontrar los puntos críticos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el intervalo abierto (a,b).
2. Considerar los valores $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$ y elegir el más grande (*máximo absoluto*) y el más pequeño (*mínimo absoluto*).

Si el intervalo no es cerrado, es necesario tener mayor cuidado; por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad en \quad 0 < x \leq 1$ no tiene un máximo en el intervalo abierto $(0,1)$.

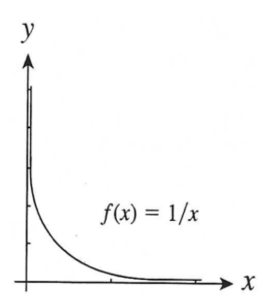


Figura 2.2.

Otro caso es la función $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ definida en todo R excepto $x = 0$,$f(x)$ esta definida en todo R excepto en el origen. Obsérvese que $f(x)$ aumenta cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$ o bien cuando x se acerca cada vez más al punto $x = 0$. Para encontrar el valor mínimo de f consideramos los puntos críticos y escogemos el valor más pequeño.

Así, la derivada se iguala a cero.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \\ &\Rightarrow x^4 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Entonces de tienen dos puntos críticos y,

$$f(\pm 1) = 2 \text{es el valor mínimo de} f.$$

Ejemplo 2.2.4.

Una caja rectangular abierta en la parte superior deberá contener $256cm^3$. Encontrar las dimensiones para las cuales el área de la caja (fondo y 4 lados) es mínima.

Solución:

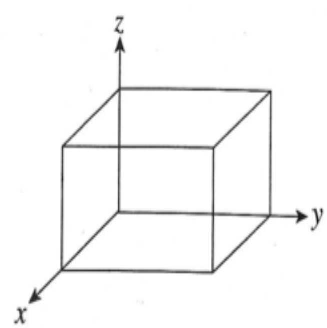


Figura 2.3.

Sean x, y las longitudes de la base.

El volumen es $256cm^3$

$$V = xyz = 256cm^3 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{256}{xy}$$

El área está compuesta por:

Área de dos de los lados: $x\left(\dfrac{256}{xy}\right)$

Área de los otros dos lados: $y\left(\dfrac{256}{xy}\right)$

Área de la base: xy

Así, el área total será:

$$f(x,y) = 2x\left(\frac{256}{xy}\right) + 2y\left(\frac{256}{xy}\right) + xy = \frac{512}{y} + \frac{512}{x} + xy$$

Los únicos valores relevantes de x, y son para $x > 0$, $y > 0$.

Los puntos críticos son

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{512}{x^2} + y \tag{1}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{512}{y^2} + x \tag{2}$$

De (1) en (2)

$$y = \frac{512}{x^2} \Rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{512}{\left(\frac{x^2}{512}\right)^2} + x = -\frac{x^4}{512} + x \tag{3}$$

resolviendo (3), la raíz $x = 0$ obviamente no es solución, pero

$$\frac{x^3}{512} = 1 \quad \textit{lleva} \quad a \quad x = \sqrt[3]{512} = 8 \quad \textit{luego} \quad x = 8$$

Así que $y = \dfrac{512}{(8)^2} = 8$. Entonces, $y = 8$ y la altura será $\dfrac{256}{xy} = 4$.

Por lo que las dimensiones serán $8 \times 8 \times 4$.

2.2.2. Criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables.

Buscamos una prueba que determine para una función de dos variables, si un punto crítico es un máximo, un mínimo o un punto silla.

Sea $P_c(x_0, y_0)$ un punto critico de f. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Utilizando la aproximación cuadrática de Taylor se tiene que

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2 + R_2$$

donde $\dfrac{R_2}{|\mathbf{h}|^2} \to 0$ *cuando* $|\mathbf{h}| \to 0$ $\quad \mathbf{h} = (x - x_0, y - y_0)$ y A, B, C son constantes definidas por,

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Si $P_c(x_0, y_0) = P_c(0,0)$. La fórmula de Taylor se convierte en

$$f(x,y) = f(0,0) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + R_2$$

Debido a que $f(0,0)$ es una constante y R_2 es muy pequeña, la expresión se transforma a $f(0,0) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \doteq f(x,y) = z$ para $P(x,y)$ cercano a $P_c(0,0)$. Es decir que la forma de la gráfica de $z = f(x,y)$ es muy cercana a la forma de la gráfica $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ para valores de $P_n(x,y)$ cercanos a $P_c(0,0)$.
Esta es la idea básica para formar la prueba o criterio de la segunda derivada para determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos, puntos silla o si el criterio es indeterminado.

Nota:
Analizar la gráfica de $g(x,y)$, en lugar de $z(x,y)$, equivale a trasladar el origen al punto $P_0(x_0, y_0)$ y examinar la función en dicho punto.

Se determinará cuando $P(0,0)$ es un máximo local o punto silla para la función cuadrática,

$$z = g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

El punto $P(0,0)$ es un punto critico de $g(x,y)$ puesto que,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2Ax + 2By \quad y \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2Bx + 2Cy$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \equiv 0$$

Recordando la teoría de ecuaciones cuadráticas, llamemos a la expresión $AC - B^2 = \Delta$ *el discriminante.*

Si el discriminante $AC - B^2 = \Delta = D \neq 0$, entonces $P(0,0)$ es el único punto critico.

Si $AC - B^2 = 0$,entonces $P(0,0)$ no es necesariamente único. Por ejemplo, si $z = y^2 + 1$, su gráfica tiene puntos críticos a todo lo largo del eje $x'x$. Aquí, $B = A = 0$ y entonces $D = AC - B^2 \equiv 0$.

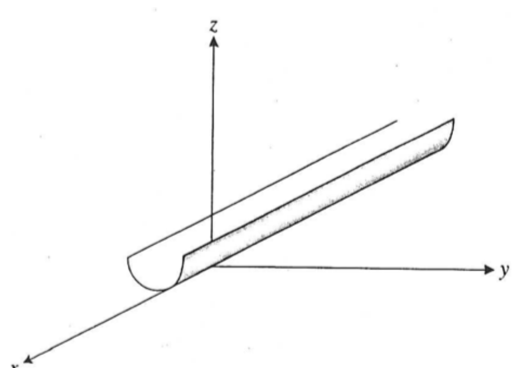


Figura 2.4.

A continuación examinaremos el caso $D \neq 0$.

Primer caso:

$$AC - B^2 > 0$$

En este caso $A \neq 0 \quad C \neq 0$ (ya que si fuese cero quedaría $-B^2 > 0$, lo cual es imposible).

Partiendo de $g(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ y completando cuadrados,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= A\left(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2\right) \\ &= A\left(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{B^2}{A^2}y^2 - \frac{B^2}{A^2}y^2 + \frac{C}{A}y^2\right) \\ &= A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, se presentan dos subcasos:

1. Si $A > 0$, implica que $g(x, y) \geq 0$, y es igual a cero sólo cuando $\frac{AC-B^2}{A}y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ .Entonces

$$0 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 = Ax^2$$

y también $x = 0$. Luego $g(x, y) \geq 0$ es igual a cero sólo cuando $P(x, y) = P(0, 0)$ y $P(0, 0)$ es un mínimo de g. La gráfica se muestra en la figura.

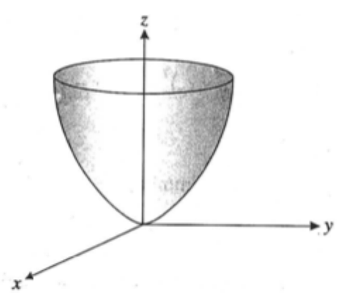


Figura 2.5.

2. Si $A < 0$ se tiene que $P(0, 0)$ es un máximo de g.

Segundo caso:

$$\text{Sea } D = AC - B^2 < 0$$

La expresión es la misma del caso anterior

$$g(x,y) = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2$$

- Si $A < 0$ la expresión conduce a dos desigualdades:

$$\frac{AC - B^2}{A}y^2 \geq 0$$

debido a que el cociente de dos negativos es positivo.

Si $x \neq 0$ indica $g(x,0) = Ax^2 < 0$
y para $-\dfrac{By}{A} = x$, la expresión $g(x,y)$ queda como

$$g\left(-\frac{B}{A}y, y\right) = \frac{AC - B^2}{A}y^2 > 0$$

Es decir, $g(x,y)$ puede ser positivo o negativo para $P(x,y)$ cercano a $P(0,0)$; por lo tanto, es un *punto silla.*

Por último, si A=0 se obtiene también un punto silla cercano a P(0,0).

En resumen:

Para funciones cuadráticas *(compárese con la prueba de definitividad positiva o negativa de una forma cuadrática en álgebra lineal) como*

$$g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

1. Si $D = \Delta = AC - B^2 > 0$ y si
   a) $A > 0$, entonces $P(0,0)$ es un mínimo de g.
   b) $A < 0$, entonces $P(0,0)$ es un máximo de g.
2. Si $D = AC - B^2 < 0$ entonces $P(0,0)$ es un punto silla.
3. Si $D = 0$, el criterio no es concluyente.

Para funciones cuadráticas generalizadas:

$$g(x,y) = K + A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$$

1. $AC - B^2 > 0$
   a) $A > 0$, $P(x_0, y_0)$, es un mínimo de g.
   b) $A < 0$, $P(x_0, y_0)$, es un máximo de g.
2. Si $AC - B^2 > 0$ entonces se tiene un punto silla cercano a $P(x_0, y_0)$.

Comparando estos resultados con la fórmula de Taylor para $z = f(x,y)$ con derivadas continuas hasta de tercer orden y para un punto crítico en $P_0(x_0, y_0)$ podemos escribir,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2 + R_2R_2$$

donde R_2 es muy pequeño para $P(x,y)$ y cercano a $P_0(x_0, y_0)$ y donde:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

La gráfica de f cercana $P_0\left(x_0,y_0\right)$ se puede aproximar por la gráfica de la función,

$$g\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+A\left(x-x_0\right)^2+2B\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+C\left(y-y_0\right)^2$$

Usando los valores de A, B, y C definidos anteriormente podemos enunciar el *criterio de la segunda derivada:*

Si $z=f\left(x,y\right)$ tiene derivadas continuas hasta el tercer orden y si $P_0\left(x_0,y0\right)$ es un punto critico de f, definimos el discriminante:

$$\Delta=D=\left[f_{xx}\left(x_0,y_0\right)\right]\left[f_{yy}\left(x_0,y_0\right)\right]-\left[f_{xy}\left(x_0,y_0\right)\right]^2$$

El cual se puede representar también como un determinante fácil de recordar

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

1. Si $D>0$ y $f_{xx}\left(x_0,y_0\right)>0, P_c\left(x_0,y_0\right)$ es un mínimo local de f.
2. Si $D>0$ y $f_{xx}\left(x_0,y_0\right)<0, P_c\left(x_0,y_0\right)$ es un máximo local de f.
3. Si $D<0$ y $P_c\left(x_0,y_0\right)$ es un punto silla de f.
4. SI $D=0$ el criterio es inconcluso, por lo que es necesario examinar de otra forma el comportamiento de f en $P_c\left(x_0,y_0\right)$.

Ejemplo 2.2.5.

Encontrar los valores extremos (máximos y mínimos) de la función:

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

Solución:

El dominio de la función es todo el plano x,y.

Las derivadas $f_x=2x \qquad f_y=2y$ existen en todo el plano.
Los puntos críticos se obtienen de

$$f_x=2x=0 \qquad f_y=2y \;=0$$

El único punto crítico es $P(0,0)$.

Como f nunca es negativa, el punto será un mínimo.

De otra manera

$$\begin{array}{l} f_{xx}=2 \quad f_{yy}=2 \quad f_{xy}=0 \\ \Rightarrow \quad f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4>0 \end{array}$$

luego $P(0,0)$ es un mínimo.

Ejemplo 2.2.6.

Encontrar los máximos, mínimos y puntos silla de la función:

$$z = \left(x^2 - y^2\right) e^{\dfrac{(-x^2-y^2)}{2}}$$

Solución:

Los puntos críticos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \left[2x - x\left(x^2 - y^2\right)\right] e^{\frac{\left(-x^2-y^2\right)}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left[-2y - y\left(x^2 - y^2\right)\right] e^{\frac{\left(-x^2-y^2\right)}{2}} = 0$$

Son las soluciones a las ecuaciones simultáneas:

$$x\left[2 - \left(x^2 - y^2\right)\right] = 0$$

$$y\left[-2 - \left(x^2 - y^2\right)\right] = 0$$

Dichas soluciones son:

$A\,(0,0)$, $B\left(\sqrt{2},0\right)$, $C\left(-\sqrt{2},0\right)$, $D\left(0,+\sqrt{2}\right)$, $E\left(0,-\sqrt{2}\right)$.

Al calcular las segundas derivadas, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[2 - 5x^2 + x^2\left(x^2 - y^2\right) + y^2\right] e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy\left(x^2 - y^2\right) e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[5y^2 - 2 + y^2\left(x^2 - y^2\right) - x^2\right] e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$$

Punto	$\mathrm{Z_{xx}}$	$\mathrm{Z_{xy}}$	$\mathrm{Z_{yy}}$	***D***	***Tipo***		
$A\,(0,0)$	2	0	-2	-4	***silla***	$\Delta < 0$	
$B\left(\sqrt{2},0\right)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	***máximo***	$\Delta > 0$	$Z_{xx} < 0$
$C\left(-\sqrt{2},0\right)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	***máximo***	$\Delta > 0$	$Z_{xx} < 0$
$D\left(0,+\sqrt{2}\right)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	***mínimo***	$\Delta > 0$	$Z_{xx} > 0$
$E\left(0,-\sqrt{2}\right)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	***mínimo***	$\Delta > 0$	$Z_{xx} > 0$

Ejemplo 2.2.7.

Encuentre los valores extremos de la función:

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

Solución:

La función está definida y es diferenciable para toda x, y, y su dominio es todo el plano.

Para hallar los puntos críticos, se igualan las primeras derivadas a cero

$$f_x = y - 2x - 2 = 0$$
$$f_y = x - 2y - 2 = 0$$

Resolviendo,

$$x = y = -2$$

Así que el punto crítico es $P_c(-2,-2)$.

Usando el criterio de la segunda derivada,

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = -2 & \\ f_{yy} = -2 & \qquad D_{(-2,-2)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \\ f_{xy} = 1 & \end{array}$$

como $f_{xx} < 0 \quad y \quad D > 0$, entonces existe un *máximo local* en $P_c(-2,-2)$. El valor del máximo está dado por $f(-2,-2) = 8$.

Ejemplo 2.2.8.

Sea la función:

$$z = \frac{xy}{(3+x)(x+y)(y+3)}$$

Obtener los puntos críticos de e indicar la naturaleza de dichos puntos.

Solución:

Considerando la función auxiliar

$$u = \ln z = \ln x + \ln y - \ln(x+3) - \ln(x+y) - \ln(y+3)$$

se tiene para los puntos críticos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+y} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+3} = 0 \qquad (2)$$

multiplicando (1) y (2) por $(x+y)$.

$$\frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{x+3} - 1 = 1 + \frac{y}{x} - \frac{x+y}{x+3} - 1 = 0$$

$$\frac{x+y}{x} - 1 - \frac{x+y}{y+3} = \frac{x}{y} + 1 - 1 - \frac{x+y}{y+3} = 0$$

reacomodando,

$$\frac{y}{x} = \frac{x+y}{x+3}; \qquad xy + 3y = x^2 + xy; \qquad y = \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{y+3}; \qquad xy + 3x = y^2 + xy; \qquad 3x = y^2$$

de donde

$$3x = \left(\frac{x^2}{3}\right)^2; \qquad x^3 = 27; \qquad x = 3 \qquad \Rightarrow y = 3$$

por lo tanto, hay un solo punto crítico $P_c(3,3)$

Por otra parte,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P = -\frac{1}{18}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+3)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_P = -\frac{1}{18}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_P = \frac{1}{36}$$

$$W|_P = \begin{vmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{18} \end{vmatrix} = \frac{3}{1296} > 0; \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P < 0$$

luego en el punto $P(3,3)$ hay un máximo.

Ejemplo 2.2.9.

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función,

$$z = -xy(6 + x + y)$$

Solución:

$$z = -6xy - x^2y - xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6y - 2xy - y^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6x - x^2 - 2xy = 0 \qquad (2)$$

de (1) y (2)

$$y(-6 - 2x - y) = 0 \qquad (3)$$

$$x(-6 - x - 2y) = 0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow P_1(0,0) \text{ es un punto crítico}$$

Del sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= -6 \\ x + 2y &= -6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_2(-2,-2) \text{ es un punto crítico}$$

Entonces resolviendo,

$$\begin{aligned} x = 0 \Rightarrow y = -6 & \qquad \therefore P_3(0,-6) \\ y = 0 \Rightarrow x = -6 & \qquad \therefore P_4(-6,0) \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y_2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6 - 2x - 2y$$

$$g(xy) = \frac{\partial^2 z \partial^2 z}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z \partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P_1(0,0) & \qquad \Rightarrow g(0,0) = -36 < 0 & \qquad \therefore \textbf{\textit{punto silla}} \\ P_2(-2,-2) & \qquad \Rightarrow g(-2,-2) = 12 & \qquad \therefore \textbf{\textit{mínimo relativo}} \\ P_3(0,-6) & \qquad \Rightarrow g(0,-6) = -4 & \qquad \therefore \textbf{\textit{punto silla}} \\ P_4(-6,0) & \qquad \Rightarrow g(-6,0) = -4 & \qquad \therefore \textbf{\textit{punto silla}} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.10.

Encontrar los valores extremos de la función,

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Solución:

$$f_x = 2x \qquad f_y = 2y$$

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 2$$

$$\therefore x = 0; \quad y = 0 \Rightarrow P_c(0,0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ por lo tanto es un mínimo}$$

2.2.3. Generalización del criterio de la segunda derivada para funciones de n variables.

Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferencial de orden 3 en la vecindad de un punto extremo (estacionario) $x_1 = x_1, ..., x_n$, es decir donde $f_{x_1} = f_{x_2}$ o $f_{x_n} = 0$.

Consideremos la segunda diferencial total de f en x,

$$d^2 f^0 = \sum_{i,k=0}^{n} f_{xi} \quad x_k^0 \quad dx_i \quad dx_k$$

Esta es una forma cuadrática en las variables $d_{x_1}, ..., d_{x_n}$.

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} f_x, x_1^0 & .... & f_x, x_n^0 \\ ... & .... & .... \\ f_{xn}, x_1^0 & .... & f_{xn}, x_n^0 \end{vmatrix}$$

1. Si D es positiva $(D > 0)$ definida se tiene un mínimo. *(λ positivas).*
2. Si D es negativa $(D < 0)$ definida se tiene un máximo.*(λ negativas).*
3. Si D es indefinida no se tiene ni máximo ni mínimo. *(λ alternadas en signo).*

Nota: A cada valor principal λ *elementos de la diagonal de la matriz hessiana*, corresponde una dirección principal. si TODAS esas direcciones, emergiendo del punto, tienen pendiente positiva, es decir, TODOS los valores de λ son positivos, la función tendrá un MÍNIMO en el punto considerado, ya que los valores de la función cercanos al punto serán mayores que en el punto mismo. De igual manera, si TODOS los valores de λ son negativos, los valores de la función cercanos al punto serán menores que en el punto; es decir, la función tendrá un MÁXIMO en dicho punto. Obviamente, si los signos de λ son alternantes, es decir algunos positivos y otros negativos, el punto critico no será ni un máximo ni un mínimo.

Ejemplo 2.2.11.

Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = 2x^2 - xz + y^3 + 3y^2 + z^2 + 15$$

e indicar su naturaleza.

Solución:

Se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 & 4x - z &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 & 3y^2 + 6y &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 & -x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$x = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad y_2 = 0 \qquad z = 0$$

Entonces, los puntos críticos son $P(0,0,0)$ y $Q(0,-2,0)$. A su vez, la matriz hessiana es,

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & (6y+6) & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

con lo que, en el punto P se tiene

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & (6-\lambda) & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 3+\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 3-\sqrt{2}$$

$\therefore$ hay ***un mínimo*** $P(0,0,0)$; $f(x,y,z) = 15$.

Análogamente, en Q se tiene

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & (-6-\lambda) & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -6 \qquad \lambda_2 = -3+\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = -3-\sqrt{2}$$

$\therefore$ ***no hay ni máximo ni mínimo.***

Ejemplo 2.2.12.

Determinar mediante el criterio de la segunda derivada, los puntos críticos y los valores extremos de la función,

$$f(x,y,z) = y2 - xy - 2xz + yz - 2x + 2y + 2z + 10$$

Solución:

Para obtener los puntos críticos,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad -y - 2z - 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad -x - 2y + z + 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad -2x + y + 2 = 0$$

$$\therefore P(1,0,-1)$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = -1 \quad f_{xz} = -2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = 1$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4 < 0 \text{ Es un punto silla}$$

$$p(\lambda) = det(H - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6 - 4$$

Existen dos o más raíces en R^3. Por lo tanto, el punto $P(1,0,-1)$ ***no es ni máximo ni mínimo.***

Ejemplo 2.2.13.

En el golfo de México una compañía petrolera tiene 3 plataformas, cuyas posiciones relativas están dadas por las coordenadas $A(0,0)$, $B(10,30)$ y $C(50,20)$ en donde las unidades están en km.Se requiere instalar una plataforma de abastecimiento y es necesario determinar su localización para que los costos de transporte sean mínimos, si se sabe que el costo total es proporcional a la suma de los cuadrados de las distancias recorridas.

Solución:
Considerando que la localización de la plataforma esté en el punto $P(x,y)$, se tiene como función a optimizar,

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 + (x-10)^2 + (y-30)^2 + (x-50)^2 + (y-20)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 120x - 100y + 3900 \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \qquad && \Rightarrow 6x - 120 = 0 \qquad && x = 20 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \qquad && \Rightarrow 6y - 120 = 0 \qquad && y = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

Se debe colocar la plataforma en el Punto $P\left(20, \dfrac{50}{3}\right)$ para que los costos de transporte sean mínimos.

Ejemplo 2.2.14.

Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 - yz + 2z^2 + 10$ e indicar su naturaleza.

Solución:

Para los puntos críticos, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \qquad && \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \qquad && \Rightarrow 2y - z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \qquad && \Rightarrow -y + 4z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Con lo que $P_1(0,0,0)$ y $P_2(-2,0,0)$ son los puntos críticos; ahora bien, en cuanto a su naturaleza, se tiene que

$$H_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(x+1)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (6x+6) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12(x+1)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} (6x+6) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 48(x+1)$$

De donde al evaluar en $P_1(0,0,0)$,

$$H_1 = 6 > 0 \qquad H_2 = 12 > 0 \qquad H_3 = 48 > 0$$

$$\therefore \text{ en } P_1(0,0,0) \text{ hay un } \boldsymbol{mínimo}.$$

A su vez, al evaluar en $P_2(-2,0,0)$,

$$H_1 = -6 < 0 \qquad H_2 = -12 < 0 \qquad H_3 = -48 < 0$$

$$\therefore \text{ en } P_2(-2,0,0) \text{ hay un } \textbf{\textit{no hay ni máximo ni mínimo.}}$$

Ejemplo 2.2.15.

Determinar, por medio del criterio de la segunda derivada, los puntos críticos y los valores extremos de la función $f(x,y) = 2x^3 - y^3 + 24x - 27^y + 5$ sobre la región limitada por los puntos $A(-510)$, $B(-5,-6)$ y $C(8,-6)$.

Solución:

Para los puntos críticos, se tiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow 6x^2 - 24 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow -3y^2 + 27 = 0$$

Resolviendo,

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \qquad y_1 = 3 \qquad y_2 = -3$$

Entonces $P(2,3)$,$Q(2,-3)$, $S(-2,3)$ y $T(-2,-3)$ son los puntos críticos. Sin embargo, los puntos críticos contenidos en la región R son Q, S y T.
Por otro lado,

$$H = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = -72xy$$

Al evaluar en cada punto crítico,

$$H_Q = 432 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24 \text{ hay un mínimo relativo} \Rightarrow \qquad f(2,-3) = -81$$
$$H_S = -432 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -24 \text{ hay un máximo relativo} \Rightarrow \qquad f(-2,3) = 91$$
$$H_T = -432 \qquad \Rightarrow \text{hay un máximo relativo}$$

Para los valores extremos,

$$F(-5,10) = -875 \qquad \Rightarrow \text{ en } A \text{ hay un mínimo absoluto}$$
$$F(-5,6) = -71$$
$$F(8,-6) = -891 \qquad \Rightarrow \text{ en } C \text{ hay un máximo absoluto}$$

Ejemplo 2.2.16.

Encontrar los valores extremos y naturaleza de la función: $f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2$.

Solución:
Encontrando los puntos críticos,

$$\left.\begin{array}{l} fx = 4x^3 + 2xy = 0 \\ fy = x^2 + 2y = 0 \\ y = -\dfrac{x^2}{2} \text{ y } 3x^2 = 0 \;\; x = 0 \;\; y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow P(0,0)$$

$$fxx|_p = 0; \qquad fyy|_p = 2 \;\; ; \qquad fxy|_p = 0; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

No aplica el criterio de la segunda derivada. Pero $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) - x^2y$

$$\begin{array}{ll} y < 0 & f(x,y) > 0 \\ y > 0 & f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2 > 0 \end{array}$$

$$\therefore P \text{ es un mínimo}$$

Ejemplo 2.2.17.

Sea

$$f(x,y) = ay^3 - xy^2 + cxy$$

1. Obtener puntos críticos.
2. Determinar su naturaleza.
3. ¿Qué valores de a y c son necesarios para que uno de los puntos sea $P(15,5)$?

Solución:

1. $$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 + cy = 0$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay^2 - 2xy + cx = 0$$
2. Resolviendo el sistema, se obtienen $P_1(0,0)$ y $P_2(3ac,c)$ los cuales son puntos silla.
3. La restricción es que si $x = 15$, $y = 5$ sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones resulta que a = 1 y c = 5.

Ejemplo 2.2.18.

Obtener los puntos críticos y determinar la naturaleza de los mismos.

$$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 - yz + 2z^2 + 10$$

Solución: Para obtener los puntos críticos ,

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 6x = 0 \\ f_y &= 2y - z = 0 \\ f_z &= -y + 4z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $y = z = 0$. Entonces los puntos críticos son: $P_1(0,0,0)$ y $P_2(-2,0,0)$.

Y utilizando el criterio de la segunda derivada

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x + 6 & \qquad f_{xy} &= 0 = f_{yx} \\ f_{yy} &= 2 & f_{xz} &= 0 = f_{zx} \\ f_{zz=4} & & f_{yz} &= -1 = f_{zy} \end{aligned}$$

conduce a la matriz Hessiana,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x+6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

Evaluando en P_1 y P_2 tenemos que,

$$\begin{aligned} &P_1(0,0,0) & \qquad &\Delta = 42 \therefore\ P_1 \text{ es mínimo} \\ &P_2(-2,0,0) & &\Delta = -42 \therefore\ P_2 \text{ no es máximo ni mínimo} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.19.

La temperatura de una región en °C esta dada por,

$$T(x,y,z) = 10(2x^2 + y^2 - y + z^2 + z)$$

Obtener las coordenadas de los puntos más calientes y fríos, así como la temperatura en los mismos.

Solución:

$$\begin{aligned} T_x &= 40x = 0 \\ T_y &= 20y - 10 = 0 \\ T_z &= 20z + 10 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto el punto critico es $P\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Usando el criterio de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= 40 \\ T_{yy} &= 20 \ \ ; T_{xy} = T_{yx} = T_{zx} = T_{xz} = T_{yz} = T_{zy} = 0 \\ T_{zz} &= 20 \end{aligned}$$

Conduce a la matriz Hessiana,

$$H = \begin{vmatrix} 40-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 20-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 20-\lambda \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante, se obtiene

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 40 \\ &\Delta > 0,\ f_{xx} > 0 \\ &\lambda_{2,3} = 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un ***mínimo*** en $P\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y la temperatura en el punto crítico será de -5°C.

2.2.4. Máximos y mínimos con restricciones. Multiplicadores de Lagrange.

Supóngase que queremos maximizar o minimizar una función $f(x, y)$ sujeta a cierta restricción o condición. Por ejemplo, maximizar $f(x, y)$ sujeta a la condición de que $P(x, y)$ satisfaga la ecuación $g(x, y) = c$.

Consideremos la gráfica de una función $f(x, y)$

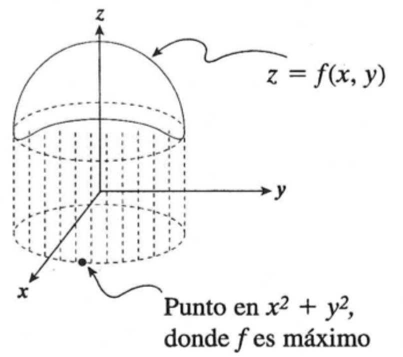


Figura 2.6.

En la figura, el máximo absoluto existe en $A(0, 0)$; sin embargo, buscamos el máximo de $f(x, y)$ cuando $P(x, y)$ pertenece al círculo unitario limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

El cilindro sobre $x^2 + y^2 = 1$ interseca la gráfica $z = f(x, y)$ en una curva que yace sobre la gráfica. El problema de maximizar o minimizar la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$, es encontrar los puntos sobre esa curva donde z sea un máximo o mínimo. Estos puntos reciben el nombre de *máximos y mínimos restringidos.*

Puntos críticos para máximos y mínimos restringidos.

Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones diferenciables de dos variables. Supongamos que $f(x, y)$ cuando esta restringida a la curva de nivel C definida por $g(x, y) = c$ tiene un punto critico en $P_c(x_0, y_0)$ y que $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, existirá un número λ, tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Si $\lambda \neq 0$, significa que las curvas de nivel de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ que pasan por $P_c(x_0, y_0)$ tienen la misma tangente en $P_c(x_0, y_0)$. Es decir, los vectores $\nabla \mathrm{f}(x_0, y_0)$ y $\nabla \mathrm{g}(x_0, y_0)$ son paralelos, y para cierto valor de λ, ser‡n colineales sobre la curva de nivel C.

Para encontrar un máximo o mínimo de $f(x, y)$ sobre la curva de nivel C, buscamos los puntos $P_c(x_0, y_0)$ sobre C para los cuales exista una constante λ (llamada *multiplicador de Lagrange*), tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda g(x_0, y_0)$.
Entonces, habrá que resolver las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

$$g(x, y) = C$$

para las tres incógnitas x, y, λ. Una vez encontrados los valores $P_n(x, y)$ para los cuales se satisfaga el sistema de ecuaciones, se evalúa $f(x, y)$ para esos puntos a fin de obtener una serie de valores $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)\ldots$ Si C es una curva cerrada, el mínimo absoluto será el valor más pequeño y el máximo será el valor más grande.

2.2.5. Máximos y mínimos con restricciones y multiplicadores de Lagrange para funciones de dos variables.

El problema en dos dimensiones (en el plano), se reduce a encontrar los valores estacionarios de la función $f(x, y)$ cuando las dos variables x, y no son mutuamente independientes sino que están relacionadas por medio de una condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$. Geométricamente sea $\phi(x, y) = 0$ una curva en el plano x, y y que la familia de curvas $f(x, y) = c$ cubre una posición en el plano.

Sea el punto P el valor extremo donde las tangentes tendrán el mismo valor. Así, en dicho punto, $fx : fy = \phi x : \phi y$ o bien $\nabla f : \nabla\phi$, separando variables

$$\frac{fx}{\phi x} = \frac{\phi y}{fy}$$

obviamente el lado izquierdo y el derecho sólo pueden ser iguales a una constante. Sea λ dicha constante, entonces:

$$f_x = \lambda\phi_x$$
$$\nabla f = \nabla\phi$$
$$fy = \lambda\phi_y$$

Arreglando:

$$fx + \lambda\phi x = 0$$

$$fy + \lambda\phi y = 0$$

y además:

$$\phi(x, y) = 0$$

la constante λ recibe el nombre de ***multiplicador de Lagrange***

Regla de Lagrange para funciones de dos variables.

Para encontrar los valores extremos de la función $f(x, y)$ sujeta a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, se introduce el multiplicador desconocido λ independiente de x y y se escriben las condiciones necesarias conocidas.

$$fx + \lambda\phi x = 0$$

$$fy + \lambda\phi y = 0$$

en conjunción con la condición subsidiaria $\phi = 0$. Notesé que para convertir un problema de máximos y mínimos para funciones de dos variables, sujetas a una restricción entre ellas, conviene convertir el problema al cálculo de máximos y mínimos de una función de TRES variables SIN RESTRICCIONES. Para ello, introduzcamos una nueva función llamada de Lagrange o complementaria, tal que incluya al multiplicador como variable.

Sea $F = f + \lambda\phi$ dicha función. Obviamente, los valores extremos de esta función serán los mismos que los valores extremos de la función original $f(x, y)$ ya que $\lambda\phi(x, y)$. Es decir, se esta creando una nueva función, ahora de tres variables (al incluir λ), y hemos eliminado virtualmente la restricción. El problema se ha reducido a encontrar los valores extremos de una función de tres variables sin restricciones; pero, además, esa tercera variable es realmente una constante. Es decir, dada la función $f(x, y)$ cuyos valores extremos se quieren obtener sujetos a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, se introduce la función de Lagrange $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$ donde λ es el multiplicador de Lagrange y)$\phi(x, y)$ es la función restricción. Ahora se procede a calcular los valores extremos de F como si fuera un problema de máximos y mínimos sin restricciones. Es decir, los puntos críticos serán las soluciones al sistema de ecuaciones,

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad F_\lambda = 0$$

Siendo $F_\lambda = 0$ equivalente a la restricción $\phi(x, y) = 0$. Nótese que no es necesario resolver explícitamente para λ a menos que simplifique la obtención de los valores de las variables para los puntos críticos.

Ejemplo 2.2.20.

Encontrar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 - y^2$ a lo largo del círculo unitario centrado en el origen del plano x, y.

Solución:

La curva C será $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. La función es $f(x, y) = x^2 - y^2$. Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, buscamos valores de x, y, λ tales que

$$\begin{array}{l} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{array}$$

Es decir,

$$2x = \lambda 2x \tag{1}$$

$$-2y = \lambda 2y \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3}$$

De (1) obtenemos

$$x = 0 \quad \lambda = 1$$

Si $x = 0$, de la ecuación (3) $y = \pm 1$ y de la ecuación (2) se obtiene $\lambda = -1$.
Si $\lambda = 1$ entonces $y = 0 \quad x = \pm 1$ .Los puntos críticos elegibles son

$$\begin{array}{lll} A(x, y) = A_{1,2}(0, \pm 1) & con & \lambda = -1 \\ B(x, y) = B_{3,4}(\pm 1, 0) & con & \lambda = 1 \end{array}$$

El valor máximo será 1 y el mínimo será -1.

Ejemplo 2.2.21.

Encontrar los puntos más cercanos al origen sobre el cilindro

$$x^2 - z^2 - 1 = 0.$$

Solución:

La distancia entre los puntos es:

$$r^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Entonces, habrá que buscar el mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción de que $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ g(x, y, z) &= x^2 - z^2 - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2x = \lambda 2x \tag{1}$$
$$2y = 0 \tag{2}$$
$$2z = \lambda(-2z) \tag{3}$$

De la superficie del cilindro, concluimos que ningún punto de la misma tiene como abscisa $x = 0$. Luego de la ecuación (1), se obtiene que $\lambda = 1$. La ecuación (2) se satisface cuando $y = 0$ y de la ecuación (3) necesariamente $z = 0$. Así, los puntos críticos elegibles son $A_{1,2}(x_{1,2}, 0, 0)$.

Como el punto debe estar sobre la superficie $x^2 - z^2 = 1$, entonces

$$x^2 - 0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Los puntos del cilindro más cercano al origen son $A_1(1, 0, 0)$ y $A_2(-1, 0, 0)$.

Ejemplo 2.2.22.

Encontrar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = xy$ sobre la elipse $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ g(x, y) &= \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ecuaciones:

$$y = \frac{\lambda}{4}x \tag{1}$$
$$x = \lambda y \tag{2}$$
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \tag{3}$$

Al resolver (1) y (2), se tiene que

$$y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \lambda = \pm 2$$

Caso 1: Si $y = 0$, entonces $x = y = 0$ pero el punto $A(0,0)$ no está sobre la elipse, luego $y \neq 0$.

Caso 2: Si $y \neq 0$, $\lambda = \pm 2$ $x = \pm 2y$. Al sustituir los valores en la ecuación $g(x,y) = 0$, se obtiene

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + 4y^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

La función $f(x,y) = xy$ toma sus valores extremos sobre la elipse en los puntos $C(\pm 2, 1)$ $D(\pm 2, -1)$ y dichos valores son $xy = 2$ y $xy = -2$.

Ejemplo 2.2.23.

Calcular, por el método de los multiplicadores de Lagrange, las cotas máxima y mínima de la curva.

$$x_2 + y_2 = 50; \qquad x + y + z = 12$$

Solución: La función objetivo es $f(x,y,z) = z$, de donde la función de Lagrange es

$$L = z + \lambda_1 \left(x^2 + y^2 - 50\right) + \lambda_2 (x + y + x - 12)$$

Así,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad 1 + \lambda_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \qquad x^2 + y^2 - 50 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad x^2 + y^2 - 50 = 0 \qquad (5)$$

de (1) , (2) y (3), se obtiene

$$y = x \qquad (6)$$

al sustituir (6) en (4), se tiene

$$2x^2 - 50 = 0 \qquad (7)$$

$$x_1 = 5;\ x_2 = -5$$

con (6) y (7) en (5), se obtiene el resultado

$$5 + 5 + z - 12 = 0 \qquad \Rightarrow z_1 = 2, \text{cota mínima}$$

$$-5 - 5 + z - 12 = 0 \qquad \Rightarrow z_2 = 22, \text{cota máxima}$$

Ejemplo 2.2.24.

Se desea construir una caja rectangular, abierta en la parte superior, y que contenga 256 (cm^3) de arena. Utilizar multiplicadores de Lagrange para obtener las dimensiones de la caja de tal forma que su área sea mínima.

Solución:

La función objetivo a minimizar es el área $a = xy + 2xz + 2yz$.
Mientras que la función restricción será el volumen $V = xyz = 256$.
De la ecuación de Lagrange,

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - 256)$$

Los detalles se dejan al lector pero obviamente $x = y = 8cm$ y $z = 4cm$

Ejemplo 2.2.25.

Encontrar los valores extremos de sobre el círculo unitario con centro en el origen: $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

Sea

$$\begin{aligned} &f(x, y) = xy \text{ la función objetivo.} \\ &\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ la restricción.} \end{aligned}$$

Así, la función de Lagrange será

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Desarrollan

$$\begin{aligned} F_x &= 0 & y + 2\lambda x &= 0 \\ F_y &= 0 & x + 2\lambda y &= 0 \\ F_y &= 0 & x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo: $x = y \Rightarrow x, y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f(x, y) = \frac{1}{2} \text{ máximo}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f(x, y) = -\frac{1}{2} \text{ mínimo}$$

2.2.6. Generalización del método de multiplicadores de Lagrange para funciones de más de dos variables.

Busquemos los valores extremos de la función :

$$v = f(x, y, z, t) \tag{1}$$

Sujetando las variables a las condición subsidiarias

$$\phi(x, y, z, t) = 0 \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{2}$$

Se busca el punto $P(\xi, \eta, \zeta, \delta)$ donde la función f tome un valor extremo cuando se compare con los valores en todos los puntos vecinos que satisfacen las condiciones subsidiarias.

Tendremos que suponer que dos de las variables, digamos z y t sean funciones implícitas (que se puedan representar como una función de las otras dos x y y por medio de la ecuación (2). Así, el jacobiano en el punto P tendrá que ser distinto de cero.

$$\frac{(\phi, \psi)}{(z, t)} = \begin{vmatrix} \phi_z & \phi_t \\ \psi_z & \psi_t \end{vmatrix} \neq 0; \frac{\partial\,(\phi, \psi)}{\partial\,(z, t)} = \phi_z\psi t - \phi_t\psi_z \neq 0 \tag{3}$$

Representamos entonces las funciones como:

$$z = g(x, y) \qquad \text{y} \qquad t = h(x, y) \tag{4}$$

y sustituyendo en la función v o $f(x, y, z, t)$, la función tendrá un valor extremo en $x = \xi, y = \eta$ cuando sus dos derivadas parciales se añaden en el punto P, es decir :

$$f_x + f_z\frac{\partial z}{\partial x} + f_t\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$
$$f_y + f_z\frac{\partial z}{\partial y} + f_t\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

Las cuatro derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$ se obtienen de las condiciones subsidiarias:

$$\begin{aligned} \phi_x + \phi_z\frac{\partial z}{\partial x} + \phi_t\frac{\partial t}{\partial x} &= 0 \\ \psi_y + \psi_z\frac{\partial z}{\partial x} + \psi_t\frac{\partial t}{\partial x} &= 0 \\ \phi_y + \phi_z\frac{\partial z}{\partial y} + \phi_t\frac{\partial t}{\partial y} &= 0 \\ \psi_y + \psi_z\frac{\partial z}{\partial y} + \psi_t\frac{\partial t}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

a resolver sabiendo que J es distinto de cero.
En lugar de lo anterior, se introducen dos multiplicadores λ y μ tales que:

$$\begin{aligned} f_z + \gamma\phi_z + \mu\varphi_z &= 0 \\ f_t + \gamma\phi_t + \mu\varphi_t &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, se multiplican las ecuaciones (6) por l y m respectivamente, y se suman a la ecuación (5) dando por resultado

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x + (f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z)\frac{\partial z}{\partial x} + (f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t)\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$
$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y + (f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y)\frac{\partial z}{\partial y} + (f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t)\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

en forma simétrica

$$\begin{aligned} f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x &= 0 \\ f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

En resumen, si el punto $P(\xi, \eta, \zeta, \delta)$ es un extremo de la función $f(x, y, z, t)$ sujeto a las codiciones subsidarias

$$\phi(x, y, z, t) = 0$$
$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

y si en ese punto el jacobiano $\dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, t)} \neq 0$, entonces existen los números λ y μ tal que en el punto $P(\xi, \eta, \zeta, \delta)$ se cumplen las ecuaciones;

$$\begin{aligned} f_x + \gamma\phi_x + \mu\varphi_x &= 0 \\ f_y + \gamma\phi_y + \mu\varphi_y &= 0 \\ f_z + \gamma\phi_z + \mu\varphi_z &= 0 \\ f_t + \gamma\phi_t + \mu\varphi_t &= 0 \end{aligned}$$

y las condiciones,

$$\phi(x, y, z, t) = 0$$
$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

En general, si en una función $v = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ las variables $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ no son independientes sino que están relacionadas por m condiciones $(m < n)$.

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ f_2 &= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, se introducen m multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y se igualan con las derivadas de la función $F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + ... + \lambda_n$ son constantes. Las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Así obtenidas, junto con la condiciones subsidiarias

$$\phi_1 = 0, \ldots, \phi_m = 0$$

Forman un sistema de $m + n$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas. Estas ecuaciones se deben cumplir para cualquier punto extremo de f a menos que todos los jacobianos de las m funciones $\phi_1, \ldots, \phi_m conrespectoalasvariables x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean iguales a cero.

2.2.7. Cálculo de variaciones y multiplicadores de Lagrange.

Valor estacionario. Es el valor de la razón de cambio de la función, toda dirección posible desde ese punto es cero, $\nabla f \equiv 0$ (nota: la función puede ser, y lo es en muchos casos, una integral).

Sea la función $F = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)enn$ dimensiones (diferenciable). Al explorar la vecindad de un punto de esa función, se llama *variación* a un cambio infinitesimal. Si el cambio es provocado se llama virtual.

*Primera Variación:*La condición necesaria y suficiente para que una función F de n variables tenga un valor estacionario en un punto P, es que las n derivadas parciales de F con respecto a las n variables sean cero en el punto P.

Segunda Variación: Haciendo una variación virtual del sistema de coordenadas, examinemos la variación de la función expandiendo en serie. Sea un par‡metro pequeño ε, tal que la función cambie a:

$$\Delta F = F(\mu_1 + \varepsilon\alpha_1, \mu_2 + \varepsilon\alpha_2, ..., \mu_n + \varepsilon\alpha_n) - F(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$$

expandiendo en series :

$$\Delta F = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \mu_k} \alpha k + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \alpha i \alpha k + ...$$

Si F tiene un valor estacionario el primer término es cero y nos queda el segundo, el cual recibe el nombre de segunda variación de F.

$$\Delta F = \frac{1}{2}\partial^2 F \qquad \text{donde} \qquad \partial^2 F = \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \alpha i \alpha k$$

Si $\delta^2 F > 0$ para todos los valores α_i tales que la suma de los cuadrados sea 1, entonces F aumenta en cualquier dirección cercana a P, (mínimo). Si $\partial^2 F > 0$ (máximo) F disminuye en cualquier dirección.

Una vez que se tiene un valor estacionario, el criterio para un extremo depende de la segunda variación. Si dicha variación es positiva para cualquier desplazamiento virtual el punto es mínimo. Si es negativo es un máximo. Si el signo de la segunda variación es (+) y (-) para distintos desplazamientos, la función no tiene un valor extremo en el punto.

Condiciones Auxiliares: El método de Lagrange

Si la configuración espacial del punto P está restringida a menos de n dimensiones, dichas condiciones de restricción se llaman auxiliares. Si no hay restricciones se tiene un problema de variaciones *libre*. El sistema de Lagrange de *multiplicadores indeterminados* preserva la simetría de las variaciones sin eliminarlas y reduce el problema a uno de variaciones libres.

En lugar de considerar $\partial F = 0$, consideramos $\partial F + \lambda \partial F = 0$. En lugar de poner la primera variación de F igual a cero, modificamos F a: $F = F + \lambda F$ y ponemos su primera variación igual a cero para variaciones aleatorias de μ_k.

Así, continuamos el problema al de variaciones estacionarias para la función modificada $F = F + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_m f_m$ despreciando las condiciones auxiliares sustituyendo en un problema de variaciones libres.

En resumen

El método de multiplicadores de Lagrange reduce un problema con condiciones auxiliares a un problema de variaciones libres sin restricciones.

Se modifica la función F la cual debe ser estacionaria, al sumarla en los lados izquierdos de las condiciones auxiliares multiplicadas por un factor indeterminado λ. El problema se trata, ahora, como un problema de variaciones libres determinando las incógnitas y los valores de λ.

Ejemplo 2.2.26.

Determine los valores extremos de $F(x, y, z) = x^3y^2z$ sujeta a las restricciones $x + y + z = 6$; $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$.

Solución:

Sea $F = F + \lambda f$ donde $F(x, y, z) = x^3y^2z$, $f = x + y + z - 6 = 0$

$$F = x^3y^2z + \lambda(x + y + z - 6)$$

$$F_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 \tag{1}$$

$$F_y = 2x^3yz + \lambda = 0 \tag{2}$$

$$F_z = x^3y^2 + \lambda = 0 \tag{3}$$

$$F_\lambda = x + y + z - 6 = 0 \tag{4}$$

de (3): $y^2 = -\dfrac{\lambda}{x^3}$ en (1):

$$3x^2\left(-\frac{\lambda}{x^3}\right)z + \lambda = 0 \qquad -\frac{3\lambda z}{x} = -\lambda \qquad \Rightarrow x = 3z$$

de (3): $x^3 = -\dfrac{\lambda}{y^2}$ en (2):

$$2\left(-\frac{\lambda}{y^2}\right)yz + \lambda = 0 \qquad \frac{2z}{y} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow y = 2z$$

en (4): $3z + 2z + z - 6 = 0$; $6z - 6 = 0 \Rightarrow z = 1$

El valor extremo de F está en $P(3, 2, 1)$ y se trata de un máximo.

Ejemplo 2.2.27.

Obtener los puntos críticos y la naturaleza de los mismos para la función:

$$z = f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$$

Solución:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad y_1 = 1 \qquad y_2 = -3$$

$$f_x = 3x^2 - 3 \qquad f_y = 3y^2 + 6y - 9$$
$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 6y + 6 \qquad f_{xy} = 0$$

$$P_1(1, 1) \qquad P_2(1, -3) \qquad P_3(-1, 1) \qquad P_4(-1, -3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y + 6 \end{vmatrix} = 36xy + 36x = 36x\,(y + 1)$$

Punto	f_{xx}	f_{yy}	D	***Tipo***	***Valor***
$P_1(1, 1)$	6	12	72	Mínimo	−5
$P_2(1, 3)$	6	−12	−72	Punto silla	27
$P_3(-1, 1)$	−6	12	−72	Punto silla	−1
$P_4(-1, -3)$	−6	−12	72	Máximo	−31

Ejemplo 2.2.28.

Obtener el valor de la cota extrema de la curva C en la función $f(x, y, z) = z$:

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Restricciones : $\begin{array}{l} \phi = x^2 + y^2 - z = 0 \\ \varphi = x + y - 2 = 0 \end{array}$

luego :

$$F = z + \lambda\phi + \mu\varphi = 0$$

$$F = z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y - 2) = 0$$

$$\begin{array}{lrr} F_x = 0 : & 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ F_y = 0 : & 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ F_z = 0 : & 1 - \lambda = 0 & (3) \\ F_\lambda = 0 : & x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ F_\mu = 0 : & x + y - 2 = 0 & (5) \end{array}$$

Al despejar λ de (3), tenemos $\lambda = 1$

$$\begin{array}{l} 2x + \mu = 0 \\ 2y + \mu = 0 \end{array} ; \quad y = x; \quad 2x - 2 = 0; \Rightarrow x = 1$$

finalmente, $z = 2$, el cual es la cota extrema de la curva C.

Ejemplo 2.2.29.

Hallar el máximo de la función $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ sujeto a la condición subsidiaria $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

Solución:

Sólo hay una condición subsidiaria, entonces sólo es necesario un multiplicador de Lagrange. Así,

$$\begin{aligned}
&F = f + \lambda\phi \\
&\Rightarrow F = x^2y^2z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2\right)
\end{aligned}$$

derivando se obtiene

$$\begin{aligned}
&F_x = 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \\
&F_y = 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0 \\
&F_x = 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0 \\
&F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0
\end{aligned}$$

Obviamente con las soluciones triviales $x = y = z = 0$ no puede haber un máximo, dando por resultado el valor mínimo de la función, es decir $F = 0$.

Las otras soluciones son

$$2xx^2x^2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -x^4$$

$$x^2 = y^2 = z^2$$

y al usar la condición subsidiaria

$$x = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} \qquad y = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} \qquad z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$$

se obtiene que $\left(\pm\frac{c}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ son las coordenadas requeridas.

Para esos valores $F = \frac{c^6}{27}$ es el máximo.

Consecuencia: La media geométrica de tres números positivos nunca es mayor que la media aritmética; es decir

$$\left(x^2, y^2, z^2\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

Ejemplo 2.2.30.

Una cadena de supermercados desea poner una bodega para abastecer a tres de sus tiendas. El primer supermercado se sitúa 5 km. al norte del segundo, y este se localiza a 8 km. al oeste del tercero. Los analistas de costos de la cadena han calculado que sus costos de transporte son proporcionales al cuadrado de la distancia recorrida. Si el segundo supermercado se localiza en el origen del sistema coordenado, determinar en que lugar se debe construir la bodega de abastecimiento a fin de minimizar los costos de transporte.

Solución:

Sea $C(x, y)$ el punto donde se construye la bodega

$$d_{AC}^2 = (x-0)^2 + (y-5)^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25$$
$$d_{DC}^2 = x^2 + y^2$$
$$d_{SC}^2 = (x-8)^2 + y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2$$

puesto que la función de costos U es proporcional a la suma de los cuadrados de las distancias , se tiene la condición $\Delta U = 0$, si k es una constante de proporcionalidad,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(6x - 16) = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = k(6y - 16) = 0$$

la solución del sistema es $x = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{5}{3}$ luego el punto óptimo es $C\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$

Ejemplo 2.2.31.

Se requiere construir una caja sin tapa y en forma de paralelepípedo . Se dispone de 1 m^2 de cartón. Determinar las dimensiones de la caja que proporcionen el volumen máximo. (despreciar dobleces).

Solución:

Función: Volumen; $V = xyz$
Restricción: Área; $A = 2xy + 2xz + 2xz + yz = 1$

$$F = xyz = V$$
$$R = 2xy2xz + yz - 1 = 0$$
$$L = xyz - V + \lambda(2xy + 2xz + yz - 1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x + 2\lambda z = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda x + \lambda z = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda x + \lambda y = 0 \qquad (3)$$

$$\text{De } (1) \Rightarrow \lambda = -\frac{yz}{2y + 2z} \qquad (4)$$
$$\text{De } (2) \Rightarrow \lambda = -\frac{xz}{2x + z} \qquad (5)$$
$$\text{De } (3) \Rightarrow \lambda = -\frac{xy}{2x + y} \qquad (6)$$

De (4) y (5)

$$xz(2y+2z) = yz(2x+z)$$
$$y = 2x$$

De (5) y (6)

$$xz(2x+y) = xy(2x+z)$$
$$y = z$$

Al sustituir en R,

$$y^2+y^2+y^2 = 1 \qquad 3y^2 = 1 \qquad y = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}m \qquad z = \frac{1}{\sqrt{3}}m \qquad x = \frac{1}{2\sqrt{3}}m$$

El valor máximo del volumen es $V = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}m^3$

Ejemplo 2.2.32.

Dado el número 120, encontrar tres números tales que su suma sea 120 y la suma de los productos de cada dos de ellos sea máximo.

Solución:

Sean x, y, z los números

$$x+y+z = 120 \tag{1}$$
$$xy+xz+yz = M \tag{2}$$

de (1)

$$z = 120-x-y$$

al sustituir en (2), se obtiene

$$xy+(120-x-y)(x+y) = M$$

y al resolver se llega a

$$120x+120y-x^2-xy-y^2 = M(x,y)$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = 120-2x-y = 0$$

Los puntos críticos están

$$120-2x-y = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 120-2y-x = 0$$
$$120-2y-x = 0 \tag{3}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene ; $y = 40$

Al sustituir este valor en (3), se obtiene; $x = 40$

y sustituyendo x y y en (1); $z = 40$

Por lo tanto los valores encontrados en x, y, z determinan el valor máximo.

Ejemplo 2.2.33.

Calcular mediante multiplicadores de Lagrange las cotas máximas y mínimas de la curva $f(x,y,z)=0$ con las restricción,

$$x^2+y^2=32 \quad (1)$$
$$x+y+z=10 \quad (2)$$

Solución:

La función cota es $f(x,y,z)=z$

La restricción es $x+y+z-10=0$ y $x^2+y^2=32$

La función auxiliar de Lagrange es

$$F=z+\lambda\left(x^2+y^2-32\right)+\mu\left(x+y+z-10\right)$$

Los puntos críticos son:

$$\begin{aligned} F_x &= 2x\lambda+\mu=0 \\ F_y &= 2y\lambda+\mu=0 \\ F_z &= 1+\mu=0 \\ F_\lambda &= x^2+y^2-32=0 \\ F_\mu &= x+y+z-10=0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se tiene; $x=y$

y sustituyendo en (1); $x=\pm 4$; $y=\pm 4$

Finalmente al sustituir en (2) ; $z_1=2$ **cota mínima** ; $z_2=18$ **cota máxima.**

Ejemplo 2.2.34.

Obtener el valor de la cota extrema de la curva

$$C: x^2+y^2-z=0;\ x+y-2=0$$

Solución:

Función: $z(x,y)=x^2+y^2$
Restricción: $R=x+y-2$

Resolviendo,

$$F=x^2+y^2+\lambda\left(x+y-2\right)=0$$
$$F_x=2x+\lambda=0 \quad (1)$$
$$F_y=2y+\lambda=0 \quad (2)$$
$$F_\lambda=x+y-2=0 \quad (3)$$

de (1), $\lambda=-2x$

Sustituyendo en (2) ,tenemos $x=y$ y sustituyendo en (3) $x=1=y$ sustituyendo estos valores en la función $z(x,y)=1^2+1^2=2$ el valor de la cota es igual a 2.

Ejemplo 2.2.35.

Utilizar los multiplicadores de Lagrange para determinar los semiejes de la elipse con centro en el origen, cuya ecuación es

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$$

Solución:

Los semiejes corresponden a la distancia al origen , mínima o máxima, de los puntos de la elipse.

Así : $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ o bien, $D = x^2 + y^2$

Como restricción se tiene $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$

Y por lo tanto la función de Lagrange es

$$F = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32)$$

Donde,

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda\,(10x - 6y) = 0 && (1)\\ L_y &= 2y + \lambda\,(-6x + 10y) = 0 && (2)\\ L_\lambda &= 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0 && (3) \end{aligned}$$

De (1) y (2)

$$\lambda = \frac{x}{5x - 3y} = \frac{y}{5y - 3x}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y = x && (4)\\ &\Rightarrow y = -x && (5) \end{aligned}$$

Al sustituir (4) en (3), se obtiene

$$4x^2 - 32 = 0 \textit{ donde } x = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right); Q\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

y sustituyendo (5) en (3) $16x^2 - 32 = 0$ donde $x = \pm\sqrt{2}$

$$R\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), Q\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

Por último, los semi-ejes están dados por

$$a = \left|\overline{OP}\right| = 4$$

$$b = \left|\overline{OR}\right| = 2$$

donde $O(0, 0)$.

Ejemplo 2.2.36.

Utilizando el método de Lagrange obtener las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en la elipse de ecuación: $x^2 + 2y^2 = 1$ considerando que x y y están en metros.

Solución:

Función: $P = 4x + 4y$ Restricción: $R = x^2 + 2y^2 - 1$

$$L = 4x + 4y - P + \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) = 0$$

$$\begin{aligned} L_x &= 4 + 2\lambda x = 0 \\ L_y &= 4 + 4\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tenemos,

$$\lambda = -\frac{4}{x} \qquad \lambda = -\frac{2}{y}$$

Igualando , obtenemos $x = 2y$

Sustituyendo en R se obtiene: $1 = 6y^2$; $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

por lo tanto el punto critico será: $P_c\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

2.3. Resumen Capítulo 2.Valores extremos para funciones de dos o más variables.

Máximos y mínimos para funciones de dos variables.

Definiciones.

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables. Se dice que $P_0(x_0,y_0)$ es un ***mínimo local*** o relativo de f, si existe un disco de radio positivo alrededor de $P_0(x_0,y_0)$, tal que $f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \forall (x,y) \in$ al disco.

Similarmente, si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ en el disco, se dice que $P_0(x_0,y_0)$ es un ***máximo local*** o relativo de f.

Un punto que sea local máximo o local mínimo se llama un *extremo local.*

El punto $P_0(x_0,y_0)$ es un ***punto crítico*** de $f(x,y)$ si,

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Es decir que el plano tangente a la gráfica $z = f(x,y)$ en $P_0(x_0,y_0)$ es horizontal. Esto significa que *cualquier máximo o mínimo es un punto crítico.*

Para hallar los máximos o mínimos locales o relativos de $z = f(x,y)$ se localizan primero los puntos críticos. Obviamente, para cualquier punto crítico el gradiente $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ es cero.

Criterio de la segunda derivada:

Si $z = f(x,y)$ tiene derivadas continuas hasta el tercer orden y si $P_c(x_0,y_0)$ es un punto crítico de f , definimos el discriminante:

$$\Delta = D = [f_{xx}(x_0,y_0)]\,[f_{yy}(x_0,y_0)] - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$$

o bien

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, $P_c(x_0,y_0)$ es un mínimo local de f.
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, $P_c(x_0,y_0)$ es un m‡ximo local de f.
3. Si $D < 0$, $P_c(x_0,y_0)$ es un punto silla de f.
4. Si D=0 El criterio es inconcluso, por lo que es necesario examinar de otra forma el comportamiento de f en (x_0,y_0).

Regla de Lagrange para funciones de dos variables.

Para encontrar los valores extremos de la función $f(x,y)$ sujeta a la condición subsidiaria $\phi(x,y) = 0$, se introduce el multiplicador desconocido λ independiente de x y y se escriben las condiciones necesarias conocidas

$$fx + \lambda\phi x = 0$$

$$fy + \lambda\phi y = 0$$

en conjunción con la condición subsidiaria $\phi = 0$.

Se introduce una nueva función llamada de Lagrange o complementaria, tal que incluya al multiplicador como variable. Sea $F = f + \lambda\phi$ dicha función. Es decir,

$$F(x,y,\lambda) = f\,(x,y) + \lambda\phi\,(x,y)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange y $\phi\,(x,y)$ es la función restricción. Los puntos críticos serán las soluciones al sistema de ecuaciones:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad F_\lambda = 0$$

Siendo $F_\lambda = 0$ equivalente a la restricción $\phi\,(x,y) = 0$. Nótese que no es necesario resolver explícitamente para λ a menos que simplifique la obtención de los valores de las variables para los puntos críticos.

Multiplicadores de Lagrange para funciones de más de dos variables.

En general, si en una función $\mu = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ las variables $x_1, x_2,$ $x_3, ..., x_n$ no son independientes sino que están relacionadas por m condiciones subsidiarias $(m < n)$.

$$\begin{gathered} f_1 = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ f_2 = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{gathered}$$

entonces, se introducen m multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ y se igualan con las derivadas de la función

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_m f_m.$$

con respecto a $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ cuando $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ son constantes.
Las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \qquad \dots\dots \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

así obtenidas, junto con las condiciones subsidiarias

$$\phi_1 = 0 \qquad \dots\dots \qquad \phi_m = 0$$

forman un sistema de $(m+n)$ ecuaciones con $(n+m)$ incógnitas. Estas ecuaciones se deben cumplir para cualquier punto extremo de f a menos que todos los jacobianos de las m funciones $\phi_1, ..., \phi_m$ con respecto a las variables $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sean iguales a cero.

2.4. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 2.1.

Obtener los puntos máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + y + 1$$

sujeta a la restricción

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Solución:

Para los puntos críticos

$$P(0, \frac{1}{2}, 0) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, -2x + z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, -2y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, x - 2z = 0 \end{cases}$$

Como puede observarse se cumple la restricción para la parte menor que

$$0 + \frac{1}{4} + 0 \leq 1$$

Ahora, para saber que tipo de punto es, se obtiene los valores característicos de la matriz hessiana.

$$0 = \begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & (-2-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow$ maximo en p $f(0, \frac{1}{2}, 0) = 1.25$ Por otra parte, considerando la restricción en la igualdad, se tiene como ecuación de Lagrange a

$$L = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + y + 1 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, -2x + z + 2x\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, -2y + 1 + 2y\lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, x - 2z + 2z\lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

de (1) y (3)

$$-\lambda = \frac{z - 2x}{2x} = \frac{x - 2z}{2z} \Rightarrow z = x \tag{5}$$

$$-\lambda = \frac{z - 2x}{2x} = \frac{x - 2z}{2z} \Rightarrow z = -x \tag{6}$$

de (1) y (2)

$$-\lambda = \frac{z-2x}{2x} = \frac{x-2y}{2y} \Rightarrow yz = x \qquad (7)$$

(5) en (5)

$$y = 1 \qquad (8)$$

(6) en (7)

$$y = -1 \qquad (9)$$

(5) y (8) en (4)

$$x^2 + 1 + x^2 - 1 = 0, \quad x = 0$$

(6) y (9) en (4)

$$x^2 + 1 + x^2 - 1 = 0, \quad x = 0$$

”x” (9) en (4)

$$z = 0$$

Por lo tanto se tienen dos puntos críticos $Q(0.1.0)$ y $R(0,-1,0)$.
Valuando la función

$$f(0,1,0) = 1, \text{ máximo}$$

$$f(0,-1,0) = 1, \text{ mínimo}$$

Finalmente, el mínimo absoluto esta en R y el máximo absoluto esta en P

Ejercicio 2.2.

Determinar las coordenadas del punto del plano

$$ax + by + cz = d; \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}$$

que queda más cerca del origen.

Solución:

Puesto que puede optimizarse la función distancia a su cuadrado, sujeta a la restricción dada , se tiene

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + xy + y + 1 - \lambda(ax + by + cz - d)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, 2x - a\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, 2y - b\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, 2z - c\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, -(ax + by + cz - d) = 0 \qquad (4)$$

de (1) y (2)

$$\lambda = \frac{2x}{a} = \frac{2y}{b}, \quad y = \frac{b}{a}x \tag{5}$$

de (1) y (3)

$$\lambda = \frac{2x}{a} = \frac{2y}{b}, \quad y = \frac{c}{a}x \tag{6}$$

(5) y (6) en (4)

$$ax + \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}x = d, \quad x = \frac{ad}{a^2+b^2+c^2}$$

”x” en (5)

$$y = \frac{bd}{a^2+b^2+c^2}$$

”x” en (6)

$$z = \frac{cd}{a^2+b^2+c^2}$$

Ejercicio 2.3.

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = 1 + x - 2y - 2z + y^2 + z^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Solución:

Para los puntos críticos

$$P(1,1,1), \quad Q(-1,1,1)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, 1 - x^2 = 0, \quad x \pm 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, -2y + 1 = 0, \quad y = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, z = 1 \end{cases}$$

Para la naturaleza

$$H|_P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\Rightarrow \text{no hay máximo ni mínimo}$$

$$H|_Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\Rightarrow \text{hay un mínimo}$$

Ejercicio 2.4.

Determinar la o las posiciones de equilibrio estable (de potencial mínimo) para el potencial $V = mqz$ (m y g son constantes) si un punto material con masa m está restringido a la esfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0; a > 0$$

Solución:
Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange

$$L = mgz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, -2\lambda x = 0 \qquad x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, -2\lambda y = 0 \qquad y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, mg - \lambda z = 0 \qquad \lambda = \frac{mg}{2z} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, -(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0 \qquad (4)$$

(1) y (2) en (4)

$$z \pm a$$

Sustituyendo en la función potencial

$$V_1 = mga > 0$$
$$V_2 = -mga < 0 \Rightarrow$$

el mínimo o posición de equilibrio está en el punto$(0, 0, -a)$

Ejercicio 2.5.

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Solución:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, -2x - 4 + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, 2y - x = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, 2z - 2 = 0 \qquad (3)$$

El sistema formado por (1), (2) y (3) es lineal y su solución es:

$$z = 1, \quad x = -\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{ El punto crítico es} P\left(1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

La matriz hessiana

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda I & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda I \end{bmatrix}$$

$$\det(H-\lambda)I = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1)(2-\lambda) = 0$$

Factorizando $(2-\lambda)$ se tiene:

$$(2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1)$$

de donde

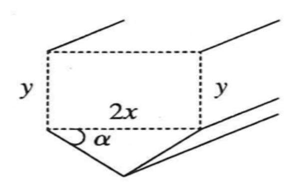
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1$$

Puesto que $\lambda_i > \quad i = 1, 2, 3$ se tiene que P es un mínimo relativo. Finalmente

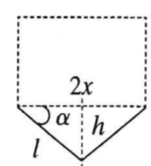
$$u\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{4}{3}$$

Ejercicio 2.6.

Se desea construir un canal en forma de un pentágono irregular por un rectángulo y un triángulo isósceles.¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que conduzca el mayor volumen, si la dimensión del perímetro de su sección recta es de 30 [cm] ?



Solución:
Como el volumen es proporcional al área de la sección



$$A = 2xy + xh \qquad\qquad P = 2y + 2l = 30$$

Puesto que

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = x\tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad l = x\tan\alpha$$

$$A = 2xy + x^2 \tan\alpha$$
$$\therefore P = 2y + 2x\sec\alpha = 30$$

de la condición $\nabla A = \lambda \nabla P$

$$2y + 2x\tan\alpha = \alpha(2\sec\alpha) \qquad (1)$$
$$2x = \lambda(2) \qquad (2)$$
$$x^2\sec^2\alpha = \lambda(2x\sec\alpha\tan\alpha) \qquad (3)$$

y de la restricción

$$2y + 2x\,\mathrm{sen}\,\alpha = 30 \qquad (4)$$

de (2) $x = \lambda$, y sustituyendo en (3)

$$\alpha = 30^o$$

Sustituyendo en (1)

$$2y + 2x\tan 30^o = 2x\sec 50^o$$

$$y = 0.27735x \qquad (5)$$

y sustituyendo $\alpha = 30^o$ y (5) en (4)

$$20.57735x + 2x\sec 30^o = 30$$

$$\therefore \text{La solución es:} \quad x = 8.66, \quad y = 5, \quad \alpha = 30^o$$

Ejercicio 2.7.

Determinar los valores extremos de la función

$$z = x^2 + y^2 - x^3 + y^3$$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, 2x - 3x^2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0, 2y + 3y^2 = 0$$

al resolver el sistema se obtiene los puntos críticos

$$P_1(0,0), \quad P_2\left(0, -\frac{2}{3}\right), \quad P_3\left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

El determinante hessiano es:

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 2-6x & 0 \\ 0 & 2+6y \end{vmatrix}$$

Para P_1

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \text{como} \frac{\partial^2}{\partial x^2} > 0 \therefore$$

en P_1 hay un minimo relativo de valor $z = 2$.

Para P_2

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \therefore \text{ en } P_2 \text{ hay un punto silla}$$

Para P_3

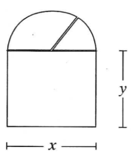
$$\nabla H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \therefore \text{ en } P_3 \text{ hay un punto silla}$$

Para P_4

$$\nabla H = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

como $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \therefore P_4$ hay un maximo relativo de valor $z = \dfrac{8}{27}$.

Ejercicio 2.8.



Se desea construir una ventana de área máxima como la mostrada en la figura. Utilizar el método de la segunda derivada para calcular las dimensiones de dicha ventada si su perímetro debe medir 20 m.

Solución:

$$A = xy + \frac{\pi y^2}{8}$$

$$P = 2x + y + \frac{\pi y}{2} = 20$$

$$x = \frac{1}{2}\left(20 - \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) y\right)$$

$$A = \frac{1}{2}(20 - (1 + y))y + \frac{\pi y^2}{8}$$

$$A = 10y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{\pi}{8}y^2$$

$$\frac{dA}{dy} = 10 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) y = 0$$

$$y = \frac{10}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{40}{4 + \pi} = 5.6 \text{ m}$$

$$x = 10 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = 10 - \left(1 - \frac{2 + \pi}{4 + \pi}\right)$$

$$x = 10 - \left(\frac{2}{4 + \pi}\right) = \left(\frac{20}{4 + \pi}\right)$$

$$x = 2.8 \text{ m}$$

Ejercicio 2.9.

Se desea diseñar una caja de cartón de forma de cilindro circular recto con tapas que tenga un volumen de 2000π cm^3. Si el m^2 de cartón cuesta 30.00. ?Cuáles deben ser las dimensiones de la caja de modo que el costo del cartón requerido para construir cada caja?

Solución:

Función objetivo: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
Función restricción: $\pi r^2 - 2000\pi = 0$

$$g = \pi r^2 h - 2000\pi = 0$$

$$\nabla A = \lambda \nabla g$$

$$4\pi r - 2\pi h = \lambda 2\pi r h \tag{1}$$

$$2\pi r = \lambda \pi r^2 \tag{2}$$

de (1)

$$2r + h = \lambda r h \tag{3}$$

de (2)

$$h = 2r$$

sustituyendo en (3) sustituyendo en la restricción

$$\pi r^2(2r) = 2000\pi$$

$$r = \left(\frac{2000\pi}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}};\, r = 10 \text{ cm} \rightarrow h = 20 \text{ cm}$$

$$A = 2\pi 10^2 + 2\pi 10(20) = 2\pi(100 + 200)$$

$$A = 600\pi \text{cm}^2$$

$$\text{costo} = 600\pi(30)\left(\frac{1}{1000}\right)$$

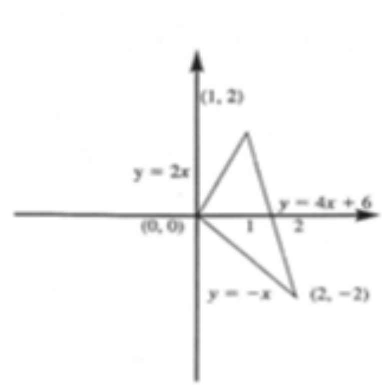
$$\text{costo} = \frac{9}{5};\ \text{costo} = \$5.65$$

Ejercicio 2.10.

Obtener los valores máximos absolutos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

localizados en la región triangular cerrada cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(1,2)$, y $C(2,-2)$.



Solución:

investigando dentro del triángulo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

$(0,0)$ se encuentra en la frontera. Investigando en las fronteras del triángulo sobre $y = 2x$

$$f_1(x) = 4x^2 - x^2 = 3x^2$$

$$f_1(x) = 3x^2; x \in [0,1]$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 6x = 0; x = 0$$

extremo del intervalo

$$f_1(0) = 0$$

$$f_1(1) = 3$$

sobre $y = -4 + 6$

$$f_2(x) = (-4x+6)^2 - x^2$$

$$f_2(x) = 15x^2 - 48x + 36; x \in [0,1]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 30x - 48 = 0; x = \frac{8}{5}$$

$$f_2(\frac{8}{5}) = -\frac{12}{5}$$

$$f_1(1) = 3$$

$$f_1(2) = 0$$

sobre $y = -x$

$f_3(x) = x^2 - x^2 = 0$ representa una recta sobre el plano XY por lo tanto el valor máximo absoluto es 3 y el mínimo absoluto es 0.

Ejercicio 2.11.

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y,x) = 2z + \frac{y^2}{2z} + 2\frac{x^2}{y} + \frac{4}{x}$$

Solución:

De la condición $\nabla f = 0$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\frac{x}{y} - \frac{4}{x^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{z} - 2\frac{x^2}{y^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 - \frac{y^2}{2z^2} = 0 \qquad (3)$$

De (2) $\dfrac{y}{z} = 2\dfrac{x^2}{y^2}$ y sustituyendo en (3) $-2 - \dfrac{1}{2}\left(2\dfrac{x^2}{y^2}\right) = 0$, de donde $x \pm y$, De (3) $4 - \dfrac{y^2}{z^2} = 0$, de donde $y \pm 2z$.

En (1) no se satisface $x = -y$, y en (2) no se satisface $y = -2z$, por lo que con $x = y$ y $y = 2z$, en (1)

$$4 - \frac{4}{x^2} = 0, \text{ de donde } x = \pm 1$$

Los puntos críticos son $P_1(1, 1, 0.5)$ y $P_2(-1, -1, -0.5)$, la matriz hessiana es:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{4}{y} + \frac{8}{x^3} & -\frac{4x}{y^2} & 0 \\ -\frac{x}{y^2} & \frac{1}{z}\frac{4x^2}{y^3} & -\frac{y}{z^2} \\ 0 & -\frac{y}{z^2} & \frac{y^2}{z^3} \end{bmatrix}$$

En el punto P_1 se tiene:

$$H|_{P_1} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Es una matriz definida positiva, por lo que en P_1 existe un mínimo relativo.

Valuando en el punto P_2

$$H|_{P_2} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Es una matriz definida negativa, por lo que en P_2 existe un máximo relativo.

Finalmente:

$$\begin{aligned} &P_1(1, 1, 0.5), \text{ mínimo relativo} \\ &P_2(-1, -1, -0.5), \text{ máximo relativo} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.12.

Sea $f(x, y) = ax^2 - by^2$ donde $a, b \in \mathbf{R}$. Establecer los valores que deben tener las constantes a y b de modo que la función f tenga en el punto $P(0, 0)$ un:

1. valor máximo

2. valor mínimo

3. punto silla

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2bxy0$$

Efectivamente, $P(0, 0,)$ es un punto crítico de $f(x, y)$.

$$H = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix}$$

Para que en $P(0, 0)$ exista un valor máximo, $a < 0$ y $b > 0$.

Para que en $P(0, 0)$ exista un valor mínimo, $a > 0$ y $b < 0$.

Para que en $P(0, 0)$ exista un punto silla, $a < 0$ y $b < 0$ o bien $a > 0$ y $b > 0$.

Ejercicio 2.13.

Calcular el vector tridimensional de componentes positivas y longitud igual a 9, tal que la suma de sus componentes sea máxima.

Solución

$$|\mathbf{a}| = 9 \to \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 9$$
$$z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$$
$$S = x + y + \sqrt{81 - x^2 - y^2}$$
$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}} = 0 \to 2x^2 + y^2 - 81 = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{y}{\sqrt{81 - x^2 - y^2}} = 0 \to 2y^2 + x^2 - 81 = 0 \qquad (2)$$

de (1), $y^2 = 81 - 2x^2$ sustituyendo en (2)

$2(81 - 2x^2) + x^2 - 81 = 0$, resolviendo $x = \pm 3\sqrt{3}$

para $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2} = \pm 3\sqrt{3}$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$
$$y = \pm 3\sqrt{3}$$
$$z = \pm 3\sqrt{3}$$

El vector usado es:

$$\mathbf{a} = 3\sqrt{3}(i,\ j,\ k)$$

Ejercicio 2.14.

Sea la función $f(x,y) = x^4 - y^2 + ax^2 + by + c$

1. Obtener los valores de a, b y $c \in \mathbf{R}$ de tal forma que la función tenga un punto crítico en $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y otro punto crítico en $Q\left(0, \frac{5}{2}\right)$ donde la función tiene el valor de $\dfrac{17}{4}$.
2. Con los valores obtenidos, determinad todos los puntos críticos de la función e indicar su respectiva naturaleza.

Solución

1. Para los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, 4x^3 + ax = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + b = 0 \tag{2}$$

Sustituyendo las coordenadas de P en (1) y (2).

$$a = -1$$

$$-2\left(\frac{5}{2}\right) + b = 0, b = 5$$

Sustituyendo en la función

$$\frac{17}{4} = (0)^4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-1)(0)^2 + 5\left(\frac{5}{2}\right) + c$$

2. A partir de $f(x,y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad 4x^3 - 2x = 0 \to x = \begin{cases} 0 \\ 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad -2y + 5 = 0 \to y = \frac{5}{2}$$

con lo que los puntos críticos son:

$$\left(0, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}\right)$$

Por su naturaleza

$$h = \begin{vmatrix} (12x^{-2}) & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 24x^2 + 4$$

$$\frac{h}{Q} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \text{ hay máximo en Q}$$

$$\frac{h}{P} = -8 \text{hay un punto silla en } P$$

$$\frac{h}{R} = -8 \text{hay un punto silla en } R$$

Ejercicio 2.15.

La suma de tres números positivos a, b, c es igual a 12. Determinar dichos valores si la raíz cubica de si producto debe ser máxima.

Solución:

La función a optimizar es $f(a,b,c) = \sqrt[3]{abc}$ y esta sujeta a la restricción $a+b+c=12$. Con lo que la ecuación de Lagrange es:

$$L = \sqrt[3]{abc} - \lambda(a+b+c-12)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0,\ \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(bc) - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0,\ \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(bc) - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = 0,\ \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(bc) - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,\ -(a+b+c-12) = 0 \tag{4}$$

de (1), (2) y (3)

$$\lambda = \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(bc) = \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(ac) = \frac{1}{3}(abc)^{-\frac{2}{3}}(ab) \to a = b = c \tag{5}$$

(5) en (4)

$$a + a + a - 12 = 0, a = 4 \to \begin{cases} b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 2.16.

Determinar la distancia mínima entre las rectas L_1 y L_2, definidas por

$$\begin{array}{lll} L_1 : x = 1 + t, & y = t, & z = -2 + t \\ L_2 : x = s, & y = 2 - s, & z = -2 + s \end{array}$$

utilizando los conceptos vistos en el capítulo anterior

Solución:

Para la distancia mínima d, también es mínima

$$D = d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$= (1 + t - s)^2 + (t - 2 + s)^2 + (t - s - 4)^2$$

$$D(t,s) = 3s^2 + 3t^2 - 2t^2 - 2st + 2s - 10t + 21$$

de donde:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \Rightarrow 6t - 2s - 10 = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial s} = 0 \Rightarrow 6s - 2t + 2 = 0$$

los valores de t y s que definen el punto crítico son:

$$t = \frac{21}{12},\ s = \frac{1}{4}$$

Por otro lado

$$h = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0 \Rightarrow \text{ es un mínimo}$$

Finalmente

$$d^2 = D\left(\frac{21}{12}, \frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{21}{12}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{21}{12}\right) +$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 10\left(\frac{21}{12}\right) + 21$$
$$= \frac{45}{12} \Rightarrow d_{min} = \sqrt{\frac{45}{12}}$$

Ejercicio 2.17.

Obtener los extremos de la función

$$f(x, y, z, w) = 4x - 7y - 5z - w + x^2 - 2y^2 + z^2 + 3w^2 + 4$$

indicando su naturaleza.

Solución:

$$P\left(-2, -\frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\text{es un punto crítico} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, 4 + 2x = 0, x = -2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, -7 - 4y = 0, y = -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, -5 + 2z = 0, z = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} = 0, -1 + 6w = 0, w = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Para su naturaleza

$$\lambda_i = \{2, -4, 2, 6\}$$

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (6-\lambda) \end{vmatrix}$$

P no es ni máximo ni mínimo.

Ejercicio 2.18.

Un comerciante obtiene una ganancia expresada por la función

$$G(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}}$$

donde x, y, z son las cantidades de tres productos diferentes de precios \$2, \$1 y \$5, respectivamente. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar cuanto debe comprar de cada producto para maximizar su ganancia, si dispone de \$120 para gastar.

Solución:

La función objetivo es

$$G(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}}$$

y la restricción es

$$2x + y + 5z = 120$$

Entonces, la función de Lagrange es

$$L = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}} - \lambda(2x + y + 5z - 120)$$

de donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\ \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}} - 2\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,\ \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}} - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0,\ \frac{1}{6} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}} - 5\lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,\ -(2x + y + 5z - 120) \tag{4}$$

dividiendo (1) entre (2)

$$\frac{3}{2} x^{-1} y = 2,\ x = \frac{3}{4} y \tag{5}$$

dividiendo (2) entre (3)

$$2y^{-1} z = \frac{1}{5},\ z = \frac{1}{10} y \tag{6}$$

(5) y (6) en (4)

$$2\left(\frac{3}{4} y\right) + y + 5\left(\frac{1}{10} y\right) = 120$$

$$y = 40 \Rightarrow x = 30,\ z = 4$$

Ejercicio 2.19.

Determinar los puntos máximos y mínimos relativos, así como los puntos silla d la función $f(x, y) = -x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

Solución

$$f(x, y) = -x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 6x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y = 0 = \tag{2}$$

de (1)

$$x^2 + 2x = 0,\ x = 0,\ x = -2$$

de (2)

$$y^2 - 2y = 0,\ y = 0,\ y = 2$$

Asi los puntos críticos son cuatro:

$$P_1(0,0), P_2(0,2), P_3(-2,0), P_4(-2,2)$$

El determinante hessiano es:

$$\nabla H = \begin{vmatrix} -6x - 6 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{vmatrix}$$

Para $P_1(0,0)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -6 < 0 \Rightarrow \text{es un máximo relativo}$$

Para $P_2(0,2)$

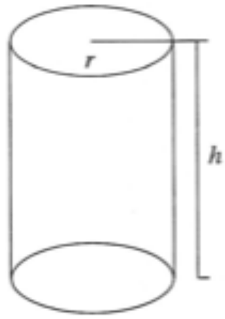
$$\nabla H = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \text{es un punto silla}$$

Para $P_3(-2,0)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \text{es un punto silla}$$

Para $P_4(-2,2)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -6 > 0 \Rightarrow \text{es un mínimo relativo}$$



Ejercicio 2.20.

Se desea construir un envase de lámina en forma de cilindro circular recto sin tapa, que tenga un volumen de 8 litros. Si el m^2 de lámina cuesta \$200.00. ?Cuáles deben ser las dimensiones del envase para que su costo sea mínimo? y ? cuál será el costo del envase?

Solución:

$$V = \pi r^2 h = 8000 \text{cm}^3$$

costo de la lámina \$200.00 por m^2 que equivale a \$0.02 por cm^2

$$S = \text{Area lateral} + \text{ Area del fondo}$$

$$S = 2\pi rh + \pi r^2$$

Por el método de los multiplicadores de Lagrange. Función objetivo: $S = 2\pi rh + \pi r^2$
Función restricción: $V = \pi r^2 h - 8000 = 0$
De la condicion $\nabla S = \lambda \nabla V$ se obtiene

$$2\pi h + 2\pi r = \lambda(2\pi rh) \quad (1)$$

$$2\pi r = \lambda(\pi r^2) \quad (2)$$

de (1)

$$h + r = \lambda rh \quad (3)$$

de (2)

$$2r = \lambda r^2 \quad (4)$$

de (4)

$$r = 0 (\text{ no tiene sentido})$$

$$\lambda = \frac{2}{r} \quad (5)$$

sustituyendo (5) en (3)

$$h + r = \frac{2}{r}(rh) \quad (6)$$

$$h + r = 2h \quad (7)$$

$$h = r \text{ la altura debe ser igual al radio} \quad (8)$$

Sustituyendo en la restricción:

$$\pi r^2(r) = 8000$$

$$r^3 = \frac{8000}{\pi}$$

$$r = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} = 13.64\text{cm}$$

$$h = 13.64\text{cm}$$

$$S = 2\pi r(r) + \pi r^2 = 4\pi r^2$$

$$costo = 4\pi(13.64)^2(0.02) = \$46.87$$

Ejercicio 2.21.

Encontrar los máximos y mínimos relativos, así como los puntos silla de la función:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 8$$

Solución:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} 3x^2 + 6x = 0 \text{ de donde } 3x(x+2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} 3y^2 + 6y = 0 \text{ de donde } 3y(y+2) = 0$$

$$\begin{cases} 3x & = 0 \\ 3y & = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0); \qquad \begin{cases} 3x & = 0 \\ y-2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,2);$$

$$\begin{cases} x+2 & = 0 \\ 3y & = 0 \end{cases} \Rightarrow (-2,0); \qquad \begin{cases} x+2 & = 0 \\ y-2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow (-2,2);$$

Por lo que los puntos críticos son:

$$P_1(0,0),\ P_2(0,2),\ P_3(-2,0),\ P_4(-2,2)$$

Calculando las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x + 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

y el determinante hessiano en

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y+6 \end{vmatrix}$$

Para $P_1(0,0)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \text{ hay un punto silla en } (0,0,8).$$

Para $P_2(0,2)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x2} = 6 < 0 \Rightarrow$$

hay un punto silla en $(0,2,-12)$.

Para $P_3(-2,0)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x2} = -6 < 0 \Rightarrow$$

hay un máximo relativo en $(-2,0,-4)$.

Para $P_4(-2,2)$

$$\nabla H = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \text{ hay un punto silla en } (-2,2,-8).$$

Ejercicio 2.22.

La temperatura en un punto (x, y) sobre una placa metálica esta dada por

$$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

Una hormiga camina sobre la placa alrededor del circulo de radio 5 con centro en el origen. ?Cuáles son las temperaturas máximas y mínimas que encuentra la hormiga?

Solución:

Función objetivo: $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$
Función restricción: $x^2 + y^2 - 25 = 0$ Función de Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 - 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

derivando

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x - 4y + 2x\lambda = 0, \lambda = \frac{2y - 4x}{x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -4x + 2y + 2y\lambda = 0, \lambda = \frac{2y - y}{y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 \tag{3}$$

igualando (1) y (2)

$$2y^2 - 4xy = 2x^2 - xy$$
$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \tag{4}$$

resolviendo el sistema formado por (3) y (4) se obtiene

$$y_1^2 = 20 \Rightarrow x_1^2 = 5 \Rightarrow y_2^2 = 5 \Rightarrow x_2^2 = 20$$

de donde se obtienen 8 puntos críticos:

$$P_1(\sqrt{5}, \sqrt{20}),\ P_2(\sqrt{5}, -\sqrt{20}),\ P_3(-\sqrt{5}, \sqrt{20}),\ P_4(-\sqrt{5}, -\sqrt{20})$$
$$P_5(\sqrt{20}, \sqrt{5}),\ P_6(\sqrt{20}, -\sqrt{5}),\ P_7(-\sqrt{20}, \sqrt{5}),\ P_8(-\sqrt{20}, -\sqrt{5})$$

valuando la función de temperatura en cada punto críticos se tiene

$$T(\sqrt{5}, \sqrt{20}) = 0$$

$$T(\sqrt{5}, -\sqrt{20}) = 80$$

$$T(-\sqrt{5}, \sqrt{20}) = 80$$

$$T(-\sqrt{5}, -\sqrt{20}) = 0$$

$$T(\sqrt{20}, \sqrt{5}) = 45$$

$$T(\sqrt{20}, -\sqrt{5}) = 125$$

$$T(-\sqrt{20}, \sqrt{5}) = 125$$

$$T(-\sqrt{20}, -\sqrt{5}) = 45$$

por lo tanto

La temperatura máxima es 125^o
La temperatura mínima es 0^o

Capítulo 3

Integrales múltiples.

En este capítulo, se introducen los conceptos necesarios para la representación de áreas, superficies alabeadas y volúmenes mediante integrales. Una vez definidas las operaciones del cálculo integral de varias variables, la forma de representación por medio de vectores emerge de forma natural. Una superficie queda representada en cada punto por un plano diferencial tangente a la superficie en dicho punto y por un vector normal a la superficie en el mismo punto. De igual manera, todo volumen queda envuelto por una superficie y toda superficie queda envuelta por una trayectoria que la rodea. Esto conducirá a los teoremas fundamentales de la integración vectorial.

No hay que perder de vista que es necesario aprender a integrar en varias variables para posteriormente poder representar las superficies y volúmenes de cuerpos en forma vectorial. Una vez logrado este objetivo, podremos relacionar los campos vectoriales con los cuerpos sobre los que actúan y habremos logrado el objetivo final del curso. La integración múltiple no es más que una generalización de la integral de una sola variable conocida por el lector. Para definir los límites de integración, se seleccionan regiones definidas en dos o tres dimensiones según el caso. La elección de las regiones se debe hacer con cuidado buscando siempre que la integral resultante sea lo más simple posible. Si la región es un círculo, se utilizarán coordenadas polares; si la región es cilíndrica, coordenadas cilíndricas, etc.

En el caso de funciones periódicas, por ejemplo $\operatorname{sen} x, \cos x$, etc., habrá que prestar particular atención a que las integrales no se vuelvan cero en los límites inicial y final; en estos casos, se utiliza la simetría del problema y se divide la región en dos o más partes.

3.1. Interpretación geométrica.

En cálculo de una sola variable $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $f \quad en \quad [a,b]$. La región es el conjunto de todos los puntos $P_n(x,y)$ tales que $a \le x \le b \quad ; \quad 0 \le y \le f(x)$.

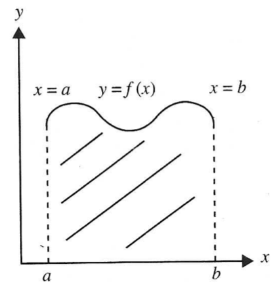


Figura 3.1.

Esto lleva a la definición de integral como un límite de sumas y también a la manera de calcular integrales por anti-diferenciación mediante el teorema fundamental del cálculo integral.

La operación de doble integración asigna a una función $f(x,y)$ definida en una región D en el plano, un número tal que representa el volumen de la región bajo la gráfica de f cuando $f(x,y) \ge 0 \forall (x,y)$ en D . Esta región es el conjunto W de puntos $P_n(x,y,z) \in R^3$ para el cual $P(x,y)$ pertenece a D y $0 \le z \le f(x,y)$.

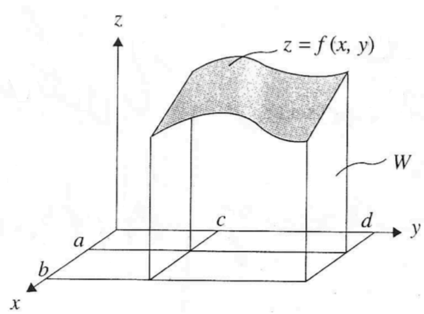


Figura 3.2.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{o bien} \quad \iint_D f(x,y)\,dA$$

Si la región D es un rectángulo donde $x : [a,b] \quad y : [c,d]$

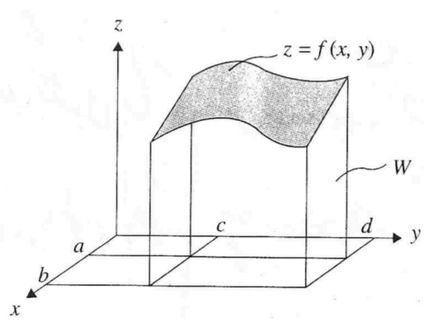


Figura 3.3.

$$D = R \text{ donde } R \text{ es el producto cartesiano de } [a,b]y[c,d]$$

$$R = [a,b] \times [c,d] \text{es decir, un área}$$

3.2. Métodos de integrales reiteradas.

Consideremos el volumen bajo una superficie $z = f(x, y)$ definida en la región $R = [a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y positiva. Se forman dos áreas, una determinada por un plano cortante $x = x_0$ que es la región plana bajo la gráfica $z = f(x, y)$ desde $y = c$ a $y = d$ y una segunda formada por el plano cortante $y = y_0$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

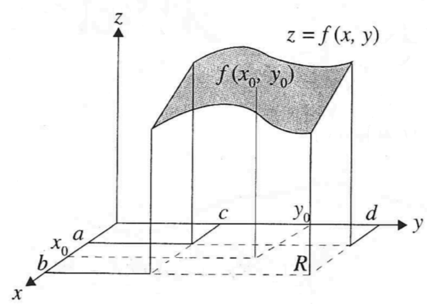


Figura 3.4.

Cuando se fija $x = x_0$, el área de sección transversal $A(x_0)$ es la integral $\int_c^d f(x_0, y)\, dy$ .Luego la función de área de sección transversal es:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

Entonces el volumen de la región, bajo $z = f(x, y)$ será:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y]\, dx\right] dy$$

Integral reiterada: Se evalúa primero lo que está dentro del paréntesis y luego se integra el resto.

Otra explicación del teorema de derivación bajo el signo de integral (Leibnitz), es:
Si $f(x, y)$ es continua y su derivada parcial con respecto a x también lo es en $a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$ entonces:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d f_x(x, y)\, dy$$

Haciendo $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y]\; dx\, dy$$

En resumen, Si f es continua en un rectángulo R

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

Igualmente

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

Ejemplo 3.2.1.

Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y sea $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Evaluar

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy.$$

Solución:

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dx\right] dy$$

En primer lugar se considera a y constante y se evalua:

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + y^2 x\bigg]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2$$

Después se integra $\dfrac{2}{3} + 2y^2$ con respecto a y, entre $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \left[\frac{2}{3} + 2y^2\right] dy = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3\bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$

Así, el volumen del sólido en $[L^3]$ es de $\dfrac{4}{3}\,[u^3]$

Ejemplo 3.2.2.

Calcular el volumen correspondiente al primer octante, definido por la intersección de las superficies: $x^2 + z^2 = 9$, $2z = y - 12$.

Solución:

$$y = 2z + 12$$

$$\text{donde} \qquad z = r \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad x = r\cos\theta$$

$$\text{región:} \quad 0 \le r \le 3 \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
V = \iint\limits_R r\, dr\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 (2r \operatorname{sen}\theta + 12)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \left(2r^2 \operatorname{sen}\theta + 12r\right)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^3}{3} \operatorname{sen}\theta + 6r^2\bigg|_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (18 \operatorname{sen}\theta + 54)\, d\theta \\
&= -18\cos\theta + 54\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -9\sqrt{2} - 9(54)\pi + 18 = (18 + 27\pi)\, u^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3. Calcular $\displaystyle\iint_S \cos x \operatorname{sen} y \, dx\, dy$ donde S es un cuadrado:

$$S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

$$\iint_S \cos x \operatorname{sen} y \, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{sen} y \, dx\right] dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx\right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \, dy = 1$$

Ejemplo 3.2.4.

Evaluar

$$\iint 4(x^2+y^2) dx\, dy$$

utilizando las variables

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

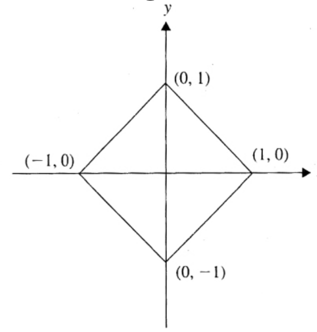
Donde la región $\mathbf{R}$ es el cuadrado con vértices

$$V_1(0,-1), \quad V_2(1,0), \quad V_3(0,1) \quad y \quad V_4(-1,0)$$

Solución:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Figura 3.5.

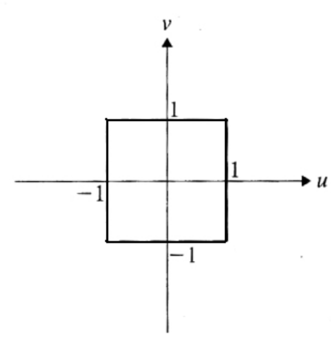


La región xy es la mostrada en la figura 3.5,

$$\begin{aligned} y &= -x+1 \Rightarrow u = 1 \\ y &= x-1 \Rightarrow v = 1 \\ y &= x+1 \Rightarrow v = -1 \\ y &= -x+1 \Rightarrow u = -1 \end{aligned}$$

La región en uv es la mostrada en la figura 3.6,

Figura 3.6.



$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) J \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} du\, dv$$

$$\iint_{R_{xy}} 4(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4\left[\frac{1}{2}(u+v)^2 + \frac{1}{2}(u-v)^2\right]\left(\frac{1}{2}\right) dv\, du$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (u^2+v^2)\, dv\, du = \int_{-1}^{1} 2\left[u^2 + \frac{1}{3}\right] du$$

$$= 2\left[\frac{u^3}{3} + \frac{u}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

3.2.1. Generalización a regiones del plano XY.

Una región es *simplemente conexa* cuando al contraer continuamente una curva cerrada hasta llegar a un punto la curva estará formada por puntos exclusivamente de la región. De lo contrario recibe el nombre de *múltiplemente conexa.*

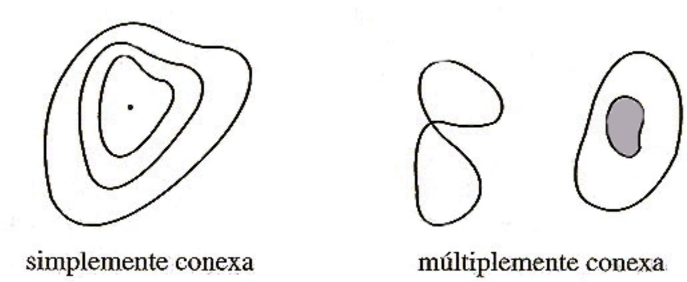


Figura 3.7.

Se llama región :$R_x = [a, b, \varphi(x), \psi(x)]$ del plano xy al conjunto de puntos de tal plano limitado por las curvas

$$\begin{array}{ll} x = a & y = \varphi(x) \\ x = b & y = \psi(x) \end{array}$$

de tal suerte que $\varphi\ (x)\ <\ \psi(\mathrm{x})$ son funciones continuas en $a \leq x \leq b$

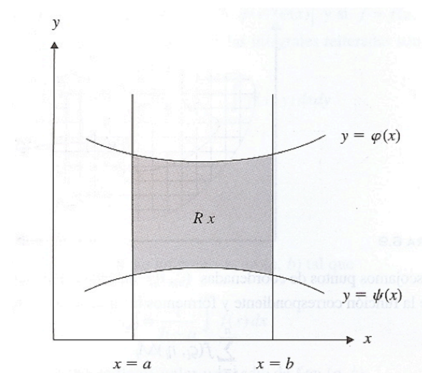


Figura 3.8.

Asimismo, se llama región: $R_y = [f(y), g(y), c, d]$ del plano xy al conjunto de puntos limitados por las curvas

$$\begin{array}{ll} x = f(y) & y = c \\ x = g(y) & y = d \end{array}$$

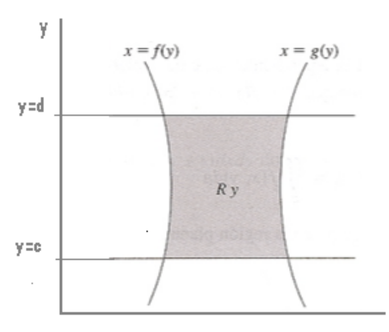


Figura 3.9.

Nota: Usaremos indistintamente R_x, R_y o D como términos de una región xy.

Definición:

Generalización de regiones planas.

Se llama ***diámetro*** de una región simplemente conexa a la longitud del máximo segmento de recta que pueda trazarse en la región formado por puntos de la misma.

Considérese una región simplemente conexa y determinemos en ella la función $f = f(x, y)$.

Tracemos dos familias de curvas que la dividan en sub-regiones formando una *red* en R. Las subregiones se llaman ***celdas*** y el diámetro de la máxima celda se llama ***norma*** de la red.

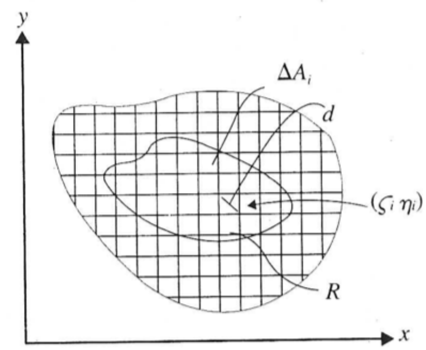


Figura 3.10.

Escojamos puntos de coordenadas (ς_i, η_i) en cada celda, hallemos los valores de la función correspondiente y formemos la suma de Riemman.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i)\, \Delta A_i$$

3.3. Integral Doble

Si existe I de tal suerte que dado $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad A > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i)\, \Delta A_i - I \right| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |\delta| < \Delta$$

para toda norma $\delta < \Delta$ trazada en R e independientemente de la elección de los puntos $P(\varsigma_i, \eta_i)$ en cada celda, se dice que $f = f(x, y)$ es *integrable* en R. El límite generalizado:

$$I = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i)\, \Delta A_i = \iint_R f(x, y)\, dA$$

se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ en la región plana R.

Propiedades:

1. $\displaystyle\iint\limits_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$

2. $\displaystyle\iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1+R_2} f(x,y)\,dA$

3. $\displaystyle\iint\limits_R (F(x,y) \pm G(x,y))\,dA = \iint\limits_R F(x,y)\,dA \pm \iint\limits_R G(x,y)\,dA$

4. $\displaystyle\left|\iint\limits_R f(x,y)\,dA\right| = \iint \left|f(x,y)\,dA\right|_R$

Teorema de la existencia:

Si $f = f(x,y)$ es acotada en R y es continua en el dominio R, es integrable en R.
La noción de diferenciación bajo el signo de integral que nos condujo a la integral reiterada se puede generalizar a cualquier región R_x y R_y.

Si $f = f(x,y)$ es continua en $R_x = [a, b, \varphi(x), \psi(x)]$ y si $f = f(x,y)$ es continua en $R_y = [f(y), g(y), c, d]$, las integrales reiteradas son:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_{x=f(y)}^{x=g(y)} f(x,y)\,dxdy$$

Si $R_x \equiv R_y$.

Teorema del valor medio:

1. *Integrales Sencillas.*

   Sea f continua en $[a,b]$. Existe un punto x_0 en (a,b) tal que:

   $$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

   donde el lado derecho se llama el valor promedio de f en (a,b).

2. *Integrales Dobles.*

   Sea $f : D \to R$ continua en la región simplemente conexa D . Existe un punto $P_0(x_0, y_0)$ en D para el cual:

   $$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A_D}\iint_D f(x,y)\,dA$$

   donde A_D es el área de D.

Ejemplo 3.3.1.

Encontrar $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ donde D es la región debajo de la parábola $y = x^2$.

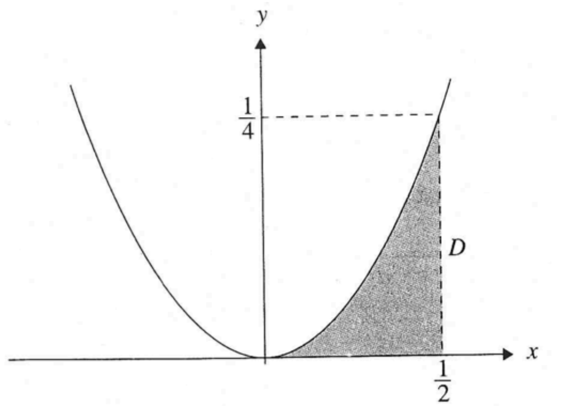


Figura 3.11.

Solución:

Se forma $\quad R_x = [a, b, \varphi(x), \psi(x)] \quad R_x = \left[0, \frac{1}{2}, 0, x^2\right] \quad \begin{array}{ll} a = 0 & \varphi(x) = 0 \\ b = \frac{1}{2} & \psi(x) = x^2 \end{array}$

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{x^2} (x+y)\,dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x\left(x^2\right) + \frac{\left(x^2\right)^2}{2} \right] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^3 + \frac{x^4}{2} \right] dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64} + \frac{1}{320} = \frac{3}{160}$$

Ejemplo 3.3.2.

Evaluar $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx \quad$ en un cuarto de circunferencia.

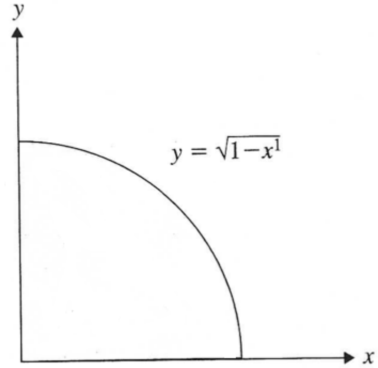


Figura 3.12.

Solución:

$$R_x = \left[0, 1, 0, \sqrt{1-x^2}\right] \quad \begin{matrix} a = 0 & \varphi(x) = 0 \\ b = 1 & \psi(x) = \sqrt{1-x^2} \end{matrix}$$

$$R_y = \left[0, \sqrt{1-y^2}, 0, 1\right] \quad \begin{matrix} f(y) = 0 & c = 0 \\ g(y) = \sqrt{1-y^2} & d = 1 \end{matrix}$$

Al resolver,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\sqrt{1-y^2}\, x \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(1-y^2\right) dy = y - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3.3.3.

Calcular la integral de $f(x,y) = (x+y)^2$ en la región comprendida entre los puntos $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(2,2)$.

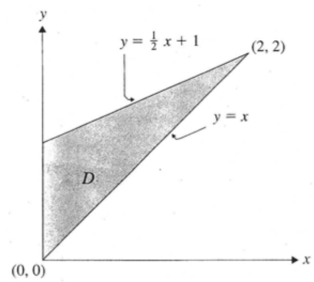


Figura 3.13.

Solución:

Se busca la región:

$$R_y = \left[0, 2, x, \frac{1}{2}x + 1\right]$$

$$\int_0^2 \int_x^{\frac{1}{2}x+1} (x+y)^2\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(x+y)^3 \Big]_{y=x}^{y=\frac{1}{2}x+1} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 \left[\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3 - (2x)^3 \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^4 \right]_0^2 - 2x^4 \Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6}\left(4^4 - 1\right) - 2.16 \right] = \frac{1}{3}\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Ejemplo 3.3.4.

Evaluar $\iint_R x^2 y\, dA$ donde R esta limitada por el eje $x'x$ y por el primer arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$.

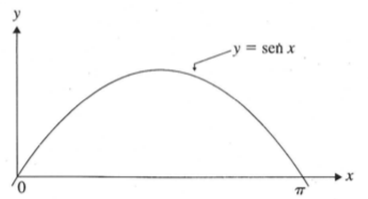


Figura 3.14.

Sea la región $R_x = [0, \pi, 0, \operatorname{sen} x]$

Así:

$$\iint_{R_x} x^2 y\, dA = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} 2x^2 - x^2 \operatorname{sen} 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{8}\int\limits_0^\pi (4x^2 - 2x \operatorname{sen} 2x) dx$$

$$u = x \qquad du = 2x dx$$

$$dv = 2x\, dx \qquad v = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

$$\iint_{R_x} x^2 y\, dA = \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi x \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$= \frac{\pi^3}{12} - \left[\frac{1}{8} x \cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{8}\int\limits_0^\pi \cos 2x\, dx$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} 2x\, dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\iint_{R_x} x^2 y\, dA = \frac{\pi^3}{12} - \frac{1}{8}\pi = \frac{\pi}{24}\left(2\pi^2 - 3\right)$$

Ejemplo 3.3.5.

Calcule el momento de inercia con respecto al eje $x'x$ del área de la región anterior.

Solución:

$$I_x = \iint_{Rx} y^2\, dA$$

$$I_x = \int\limits_0^\pi dx = \int\limits_{y=0}^{y=\operatorname{sen} x} y^2 dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)\, dx$$

$$I_x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)(-1 - 1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \quad [L^4, F^0, T^0]$$

Ejemplo 3.3.6.

Calcular el volumen de la región común a las superficies $x^2+y^2=9$ y $x^2+z^2=9$

Solución:

Se tiene

$$V=\iint_R z\,dy\,dx=\iint_R\sqrt{9-x^2}dy\,dx$$

$$=8\int_0^3\sqrt{9-x^2}\Big[y\Big]_0^{\sqrt{9-x^2}}dx=8\int_0^3\sqrt{9-x^2}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx$$

$$R=\begin{cases}-\sqrt{9-x^2}\leq y\leq\sqrt{9-x^2}\\-3\leq x\leq 3\end{cases}$$

$$V=\int_0^3\left(9-x^2\right)dx=8\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=8\,(27-9)=144u^3$$

3.3.1. Integral doble en coordenadas polares

Regiones (r,θ).

1. $R_r=[a,b,\varphi(\theta),\psi(\theta)]$

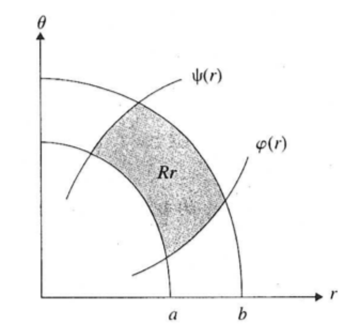


Figura 3.15.

Comprendida entre los círculos $r=a$, $r=b$ y las curvas $\theta=\varphi(r)$ $\theta=\psi(r)$,tales que $\varphi(r)<\psi(r)$ y son continuas en $a\leq r\leq b$

2. $R_\theta=[f(\theta),g(\theta),c,d]$

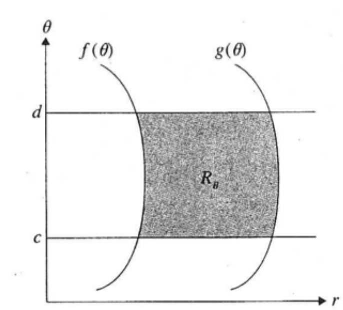


Figura 3.16.

Comprendida entre las rectas $\theta=c$ y $\theta=d$ y las curvas $r=f(\theta)$ y $r=g(\theta)$, tales que $f(\theta)<g(\theta)$ en $c\leq\theta\leq d$ y ambas son continuas.

Como dA en coordenadas polares es $dA = r\,dr\,d\theta$ tenemos:

$$\iint\limits_{Rr} f(r,\theta)\,dA = \int_a^b \int\limits_{\theta=\varphi(r)}^{\theta=\psi(r)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$\text{o bien } \iint\limits_{R\theta} f(r,\theta)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_{r=f(\theta)}^{r=g(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Obviamente

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

Ejemplo 3.3.7.

Evaluar $\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$ donde D es la región del primer cuadrante entre los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$

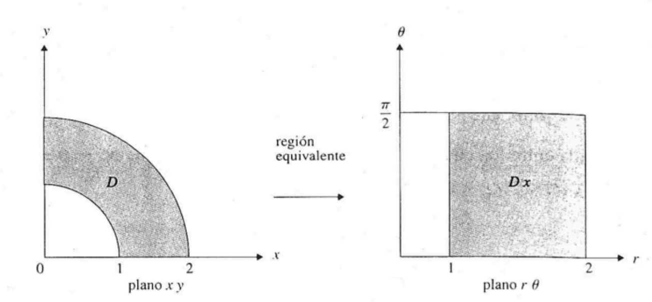


Figura 3.17.

Solución:

Cambiando a coordenadas polares (r,θ) transforma la región entre dos círculos concéntricos a un cuadrado. Así,

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Los límites serán,

$$1 \le r \le 2$$
$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

luego:

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \ln r^2 r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 2\ln r\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\left(2\ln r-1\right)\Bigg|_{r=1}^{r=2}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4\ln 2-\frac{3}{2}\right]d\theta = \frac{\pi}{2}\left[4\ln 2-\frac{3}{2}\right]$$

Ejemplo 3.3.8.

Calcular el volumen de la región limitada por las superficies

$$x = 0, \quad x = 9 - y^2 - z^2.$$

Solución:
Se debe integrar $V = \iint_{Ryz} \left(9 - y^2 - z^2\right) \, dy \, dz$

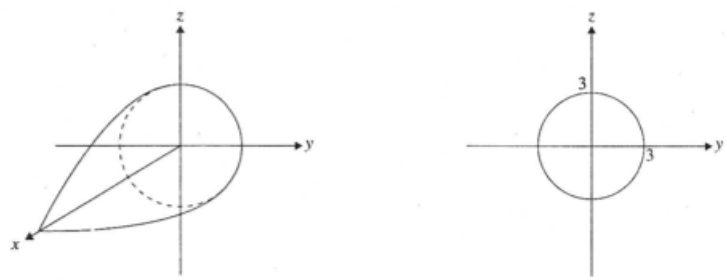


Figura 3.18.

En coordenadas cilíndricas:

$$V = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=3} \left(9 - \rho^2\right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} d\theta - \frac{81}{4}(2\pi) = \frac{162}{4}\pi = 127.23 \left[u^3\right]$$

Ejemplo 3.3.9.

Evaluar $\displaystyle\iint_{Da} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$ donde D_a es el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Solución:

En coordenadas polares $\quad x^2 + y^2 = r^2 \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta$

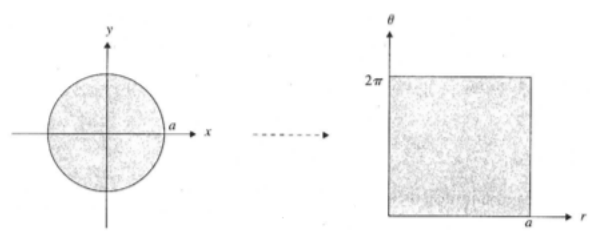


Figura 3.19.

$$\iint_{Da} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^a d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-a^2} - 1\right] d\theta = \pi \left(1 - e^{-a^2}\right)$$

Si $a \to \infty$ obtenemos: $\displaystyle\iint_{\Re^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx \, dy = \pi$

La Integral Gaussiana:

Si consideramos R^2 como $\lim\limits_{a\to\infty} R_a$ donde $R_a = [-a, a] \times [-a, a]$.

$$\lim_{a\to\infty} \iint\limits_{Ra} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy = \lim_{a\to\infty} \left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right]$$

$$= \left[\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right]^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

3.3.2. Aplicaciones de la integral doble.

1. ***Volumen bajo una superficie de ecuación*** $z = z(x, y)$

$$V = \iint\limits_{R} z(x, y)\, dA$$

2. ***Áreas planas.***

$$A = \iint\limits_{R} dA$$

3. ***Áreas Planas de Superficies Alabeadas en*** R^3**.**

Sea la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ diferenciable en una región R. Tracemos en esta, una red de norma δ formando las celdas ΔS_i $(i = 1, \ldots, n)$. Si $P(\varsigma_i, \eta_i)$ es un punto de la celda ΔS_i, a tal punto corresponde un punto de P dado por $[\varsigma_i, \eta_i, f(\varsigma_i, \eta_i)]$.

El plano tangente a S en dicho punto es:

$$f_x(x - \varsigma_i) + f_y(y - \eta_i) - (z - z_i) = 0 \qquad (1)$$

donde $z_i = f(\varsigma_i, \eta_i)$

Ahora, si ΔS_i es el elemento de área del plano (1) el cual se proyecta en el plano XY como ΔA_i, entonces:

$$\Delta A_i = \left|ec_{xy}\Delta S_i ab\right|_i |\cos\gamma_i|$$

donde γ_i es el ángulo entre las normales de los planos referidos.

Esto implica que:

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

Entonces:

$$\Delta S_i = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\Delta A_i$$

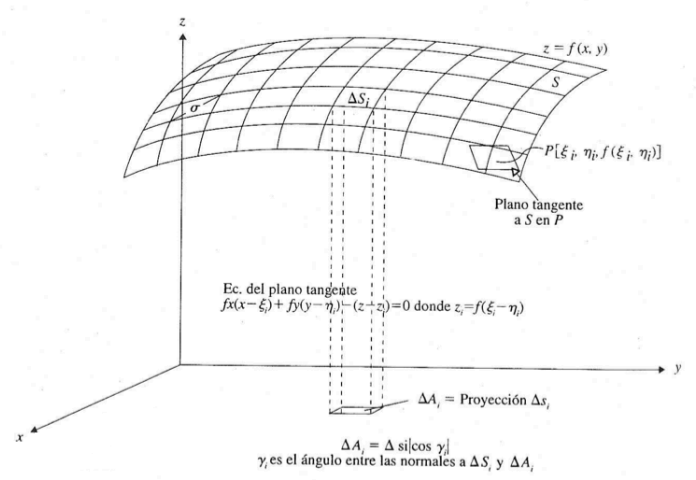


Figura 3.20.

$$|\cos y_i| = \frac{1}{\left(f_x^2 + f_y^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Al sumar todas las celdas ΔA_i obtendremos el área de la superficie alabeada como:

$$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$\Rightarrow S = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA.$$

y como $z = f(x, y)$

$$S = \iint_R \left[z_x^2 + z_y^2 + 1\right] dA. \qquad (2)$$

Si la superficie se encuentra dada a través de la ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$ y ésta es diferenciable, entonces:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad\qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

sustituyendo en (2).

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dA$$

Ejemplo 3.3.10.

Calcular el área de la cúpula en forma de paraboloide de ecuación

$$z = 36 - \frac{x^2 + y^2}{25}$$

limitada por el plano xy, donde x, y, z están en metros.

Solución:

Se tiene:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(-\frac{2x}{25}\right)^2 + \left(-\frac{2y}{25}\right)^2 + 1 = \frac{1}{625}\left(4x^2 + 4y^2 + 625\right)$$

$$= \frac{1}{625}\left(625 + 4r^2\right)$$

Ahora para la región:

$$\frac{900 - x^2 - y^2}{25} = 0; \quad x^2 + y^2 = 900; \quad R = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq 30 \end{cases}$$

de donde :

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{30} \frac{1}{625}\sqrt{625 + 4r^2}\,(r\,dr\,d\theta) = \frac{1}{25}\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(625 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{30} d\theta$$

$$= \frac{1}{300}(274625 - 15625)\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = 5425.5 \quad [m^2]$$

Ejemplo 3.3.11.

Un sólido está limitado superiormente por el paraboloide $az = x^2 + y^2$ e inferiormente por la región de XY cuyo contorno es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Calcular su volumen.

Solución:

$z = \dfrac{x^2 + y^2}{a}$ es una superficie alabeada superior.

Considerando un solo cuadrante y por simetría.

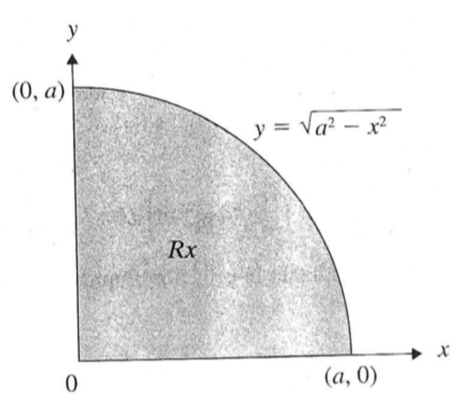


Figura 3.21.

$$V = 4\iint\limits_{Rx} z\,dA = 4\iint\limits_{Rx} \frac{1}{a}\left(x^2+y^2\right)dA$$

$$= \frac{4}{a}\iint\limits_{Rx} x^2\,dA + \frac{4}{a}\iint\limits_{Rx} y^2\,dA$$

La región elegida es:

$$R_x = \left[0, a, 0, \sqrt{a^2-x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{Rx} x^2 dA = \int\limits_0^a x^2 dx \int\limits_0^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}x^2 dx \qquad \begin{array}{c} x = a\operatorname{sen}\phi \\ dx = a\cos\phi\,d\phi \end{array}$$

$$I_1 = \frac{a_4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 2\phi\,d\phi = \frac{a_4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\phi)\,d\phi = \frac{\pi a^4}{16}$$

Ahora,

$$I_2 = \iint\limits_{Rx} y^2\,dA = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{y=\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{a^4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\phi)\,d\phi$$

Se resuelve mediante

$$\int \operatorname{sen}^m \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\phi)\,d\phi = \left.\frac{\operatorname{sen}\phi cos^3\phi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\phi)\,d\phi$$

$$= \frac{3}{8}\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi$$

Entonces:

$$\iint_R y^2 dA = \frac{\pi a^4}{16} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{a}\frac{\pi a^4}{16} + \frac{4}{a}\frac{\pi a^4}{16} = \frac{\pi a^3}{2}$$

En coordenadas polares se tiene lo siguiente:

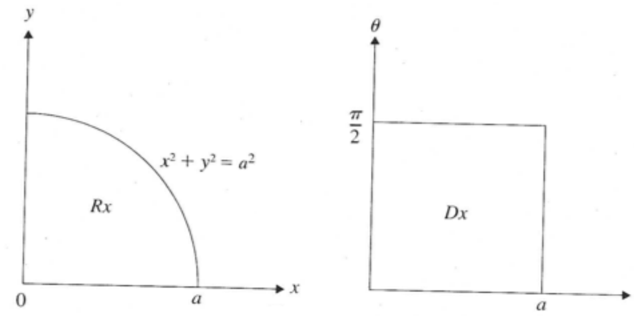


Figura 3.22.

$$V = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$V = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^3}{2}$$

y el problema es mucho más sencillo de resolver.

Ejemplo 3.3.12.

Calcular el área de la porción del cono $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, localizada en el primer octante y limitada por los planos $x = 0$ $z = 0$ y $2x + z = 8$.

Solución:

Considerando $y = f(x,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ se tiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} + 1 = 2$$

de donde :

$$R = \begin{cases} 0 \le z \le 8-2x \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$S = \iint_R \sqrt{2} dz\, dx = \int_0^4 \int_0^{8-2x} \sqrt{2}\, dz\, dx = \sqrt{2}\int_0^4 \Big[z\Big]_0^{8-2x} dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^4 (8-2x)\, dx = \sqrt{2}\left[8x - x^2\right]_0^4 = \sqrt{2}\,(32-16) = 16\sqrt{2}\,[u^2]$$

Ejercicios propuestos:

1. Calcular el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

   Solución: πab.

2. Calcular el área encerrada por el cardioide $r = a\,(1-\cos\theta)$

   Solución. $A = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

3. Calcular los momentos de inercia con respecto a $x'x$ y $y'y$ del problema anterior.

4. Calcular el área encerrada por la circunferencia $x^2+y^2=a^2$

5. Calcular el área de los dominios limitados por $r = 1-\tan\theta$; $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$

6. Calcular el área de los dominios limitados por $r = 1+\cos\theta$; $\quad r=\cos\theta$; $0\leq\theta\leq\pi$

3.4. La Integral triple

Sea$f = f(x,y,z)$ una función definida en la región V del espacio V_3. Extendiendo los conceptos de la integral doble definimos la integral triple de $f(x,y,z)$ en la región V como:

$$\iiint f(x,y,z)dV = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\Delta V_i$$

Si por ejemplo definimos la región V_{xy} :

$$V_{xy} = [R, \varphi(x,y), \psi(x,y)]$$

como el conjunto de puntos de V_3 comprendido entre las superficies $z=\varphi(x,y)$ $z=\psi(x,y)$, tales que $\varphi(x,y)<\psi(x,y)$ ambas continuas en R y por la superficie cilíndrica de generatriz paralela a $z'z$ y directriz el contorno de la región R, podemos enunciar:

$$\iiint_{Vxy} f(x,y,z)dV = \iint_R dA \int_{z=\varphi(x,y)}^{z=\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Análogamente se pueden definir V_{xz} V_{yz}.

3.4.1. Aplicaciones a Volúmenes de Sólidos

Ejemplo 3.4.1.

Evaluar la función $f(x,y,z) = (x+2y+3z)^2$ en un cubo $[0,1]\times\left[-\frac{1}{2},0\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$

Solución:

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\int_0^1 (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{1}{3}}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left.\frac{(x+2y+3z)^3}{3}\right|_{x=0}^{1}\right] dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{3}\left[(1+2y+3z)^3 - (2y+3z)^3\right] dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24}\left.\left[(1+2y+3z)^4 - (2y+3z)^4\right]\right|_{y=-\frac{1}{2}}^{y=0} dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{3}\left[(1+2y+3z)^3 - (2y+3z)^3\right] dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24}\left[(3z+1)^4 - 2(3z)^4 + (3z-1)^4\right] dz$$

$$= \frac{1}{24\cdot 15}\left.\left[(3z+1)^5 - 2(3z)^5 + (3z-1)^5\right]\right|_{z=0}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{24\cdot 15}\left(2^5 - 2\right) = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 3.4.2.

Encontrar el volumen correspondiente al primer octante, del sólido limitado por los cilindros $y^2 = ax$ $x^2 = ay$ y que se halla debajo del plano $z = x + y$

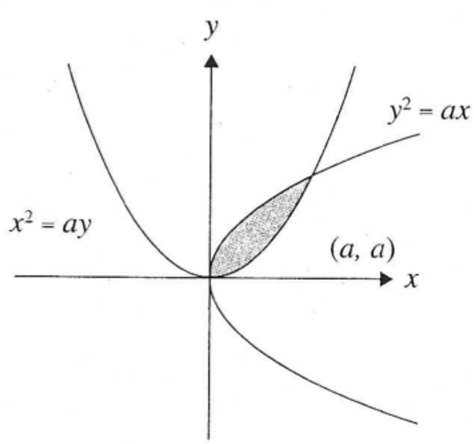


Figura 3.23.

Solución:

Sea: $\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{a} \\ \dfrac{x^4}{a^2} = ax \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = a \\ y = a \end{array}$ intersección.

La región será:

$$V_{xy} = \Big[R_x, 0, x + y \Big]$$

donde:

$$R_x = \left[0, a, \frac{x^2}{a}, \sqrt{ax} \right]$$

$$V = \iiint_V dV = \int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} dy \int_0^{x+y} dx = \int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} (x + y) dy$$

$$= \int_0^a x\sqrt{ax}\, dx - \int_0^a \frac{x_3}{a} dx + \frac{1}{2} \int_0^a ax\, dx - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{x^4}{a^2} dx$$

$$= \frac{2}{5}a^3 - \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{10}a^3$$

$$= \frac{3}{10}a^3 \left[L^3, M^0, T^0 \right]$$

NOTA: Se integra con respecto a z porque involucra x y y.

3.4.2. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.

1. *Coordenadas Cilíndricas.* (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z \qquad z = z$$

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

Dada una región Wen R^3:

$$\iiint\limits_{W_*} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{W_*} f(r, \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz$$

donde W_* es la región en (r, θ, z) correspondiente a (x, y, z).

2. *Coordenadas Esféricas.* (r, θ, ϕ)

$$x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$z = r\cos\phi \qquad \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dV = r^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Dada una región en R^3:

$$\iiint_{W_*} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W_*} f(r,\theta,\phi)\,r^2 \ \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Ejemplo 3.4.3.

Encontrar el volumen de una esfera

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

Solución:

En coordenadas esféricas:

$$\iiint_{W_*} f(r,\theta,\phi)\,r^2 \ \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Los limites de integración son:

$$R\big[0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq \phi \leq \pi; \quad 0 \leq r \leq R\big]$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \ \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \pi\, r^2 \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi \int_0^R r^2\,(-\cos\pi + \cos 0)\,dr \\
&= 4\pi \int_0^R r^2 dr \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.4.

Evaluar

$$\iiint\limits_{W} \left(z^2x^2 + z^2y^2\right) dx\, dy\, dz$$

donde W es la región cilíndrica determinada por $x^2 + y^2 \leq 1 \quad -1 \leq z \leq 1$

Solución:

En coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \quad \text{además de } -1 \leq z \leq 1$$

pero

$$z^2x^2 + z^2y^2 = z^2\left(x^2 + y^2\right) = z^2r^2 \qquad |z| = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{W} \left(z^2x^2 + z^2y^2\right) dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} z^2r^2 \cdot r\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} z^3\Big|_{-1}^{1} r^3 dr\, d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3} \int_0^1 r^3\, dr = \frac{4\pi}{4 \cdot 3} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.5.

Calcular el volumen limitado por los planos

$$4x + 2y + 2z - 18 = 0, \quad 2x + 3y + z - 3 = 0$$

y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, en el primer octante.

Solución:

Se tiene

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{3-2x-3y}^{9-2x-y} dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (6 + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (6 + 2r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 + \frac{2}{3}r^3 \operatorname{sen}\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[12 + \frac{16}{3} \operatorname{sen}\theta\right] d\theta = \left[12\theta - \frac{16}{3}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 24\pi - \frac{16}{3}(-1) = 80.73 \quad [u^3]
\end{aligned}$$

3.5. Resumen Capitulo 3. Integrales múltiples.

Integrales reiteradas.

Si $f(x,y)$ es continua y su derivada parcial con respecto a x también lo es en $a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$ entonces:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d f_x(x,y)\,dy$$

Haciendo $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$$

Si f es continua en un rectángulo $R[a,b,c,d]$.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

o bien,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

Integral doble en coordenadas cartesianas rectangulares.

Llamamos región $R_x = [a,b,\varphi(x),\psi(x)]$ del plano xy al conjunto de puntos de tal plano limitado por las curvas

$$\begin{array}{ll} x=a & y=\varphi(x) \\ x=b & y=\psi(x) \end{array}$$

de tal suerte que $\varphi\ (x)\ <\ \psi$(x) son funciones continuas en $a \leq x \leq b$

Asimismo, llamamos región $R_y = [f(y),g(y),c,d]$ del plano xy al conjunto de puntos limitados por las curvas

$$\begin{array}{ll} x=f(y) & y=c \\ x=g(y) & y=d \end{array}$$

Si $f=f(x,y)$ es continua en $R_x = [a,b,\varphi(x),\psi(x)]$ y si $f=f(x,y)$ es continua en $R_y = [f(y),g(y),c,d]$, las integrales reiteradas son si $R_x \equiv R_y$:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_{x=f(y)}^{x=g(y)} f(x,y)\,dxdy$$

Integral doble en coordenadas polares.

Regiones (r,θ).

1. $R_r = [a, b, \varphi(\theta), \psi(\theta)]$ comprendida entre los círculos $r = a$, $r = b$ y las curvas $\theta = \varphi(r)$ $\theta = \psi(r)$, tales que $\varphi(r) < \psi(r)$ y son continuas en $a \leq r \leq b$.

2. $R_\theta = [f(\theta), g(\theta), c, d]$ comprendida entre las rectas $\theta = c$ $\theta = d$ y las curvas $r = f(\theta)$ $r = g(\theta)$, tales que $f(\theta) < g(\theta)$ *en* $c \leq \theta \leq d$ y ambas son continuas.

Como dA en coordenadas polares es $dA = r\,dr\,d\theta$ tenemos:

$$\iint\limits_{Rr} f(r,\theta)\,dA = \int_a^b \int_{\theta=\varphi(r)}^{\theta=\psi(r)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \textit{o bien}$$

$$\iint\limits_{R\theta} f(r,\theta)\,dA = \int_c^d \int_{r=f(\theta)}^{r=g(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Obviamente:

$$\iint_D f(x,y)\;dx\,dy \equiv \iint_{D*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Aplicaciones de la integral doble.

1. Volumen bajo una superficie de ecuación $z = z(x,y)$

$$V = \iint\limits_R z(x,y)\,dA$$

2. Áreas planas.

$$A = \iint\limits_R dA$$

3. Áreas Planas de Superficies Alabeadas en R^3.

$$S = \iint\limits_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$$

y como $z = f(x,y)$

$$S = \iint\limits_R \left[z_x^2 + z_y^2 + 1\right] dA$$

Si la superficie se encuentra dada a través de la ecuación implícita $F(x,y,z) = 0$ y ésta es diferenciable, entonces:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

sustituyendo tenemos:

$$S = \iint\limits_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\,dA$$

La integral triple.

Sea$f = f(x,y,z)$ una función definida en la región V del espacio V_3. Extendiendo los conceptos de la integral doble definimos la integral triple de $f(x,y,z)$ en la región V como:

$$\iiint f(x,y,z)dV = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\Delta V_i$$

Si por ejemplo definimos la región V_{xy} :

$$V_{xy} = [R, \varphi(x,y), \psi(x,y)]$$

como el conjunto de puntos de V_3 comprendido entre las superficies $z = \varphi(x,y)$ $z = \psi(x,y)$, tales que $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$ ambas continuas en R y por la superficie cilíndrica de generatriz paralela a z'z y directriz el contorno de la región R, podemos enunciar:

$$\iiint_{Vxy} f(x,y,z)dV = \iint_R dA \int_{z=\varphi(x,y)}^{z=\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Análogamente se pueden definir las regiones V_{xz} V_{yz}.

3.6. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 3.1.

Calcular el volumen de la región limitada por los planos

$$z = x + y, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \text{y} \quad x + y = 2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
V = \int\int_R z\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{2-x} z\,dy\,dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{2-x} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx \\
&= \int_0^2 \left[x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[2x - x^2 + \frac{4 - 4x + x^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[2x - x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2}{2}\right] dx = \left[2x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2 \\
&= 4 - \frac{1}{6}8 = \frac{12}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,[u^3]
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.2.

Calcular el valor de $\displaystyle\int\int_R e^{x^2+y^2}\,dA$ donde R es la región del plano xy localizada entre las circunferencias de ecuaciones: $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Solución:

Definiendo la región R en coordenadas polares

$$R' = \{\,(\rho,\theta) | \quad 1 \le \rho \le 3; \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_R e^{x^2+y^2}\,dA &= \int\int_{R'} \rho\, e^{\rho^2}\,dA' \\
&= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \rho\, e^{\rho^2}\,d\theta d\rho \\
&= 2\pi \int_1^3 \rho e^{\rho^2}\,d\rho = 2\pi \left[\frac{e^{\rho^2}}{2}\right]_1^3 \\
&= \pi\left(e^9 - e\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.3.

Calcular la masa de una lamina de espesor unitario, cuya densidad esta dada por $\rho = (x, y) = k(a-x)x$ donde k es constante y si dicha lamina tiene la forma de la región limitada por las curvas de ecuaciones $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = 0$.

Solución:

$$m = \int\int_R \rho(x,y)\,dx\,dy = \int\int_R k\left(ax - x^2\right)\,dx\,dy$$

$$R = \left\{(\rho,\theta)|\,0 \leq \rho \leq a; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$m = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\left(a\rho\cos\theta - p^2\cos^2\theta\right) d\theta\rho p$$

$$= \int_0^a ka\rho^2 \operatorname{sen}\theta = -k\rho^3\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \int_0^a ka\rho^2(1+1) - k\rho^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) d\rho$$

$$= 2ka\frac{\rho^3}{3} - \frac{k\pi}{2}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^4$$

$$= \frac{2ka}{3}\left(a^3\right) - \frac{k\pi}{8}\left(a^4\right)$$

$$= ka^4\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\right)$$

Ejercicio 3.4.

Utilizar integrales dobles para calcular el volumen de la región localizada entre las superficies de ecuaciones,

$$z = 0, \quad x = 4, \quad y = 2, \quad x = 4 - 2y, \quad x + 6y + 4z - 4 = 0$$

Solución:
Al proyectar la región en el espacio sobre el plano xy, se obtiene la región plana$R = \{(x,y)|\,0 \leq y \leq 2; 4 - 2y \leq x \leq 4\}$ además, como el plano $x + 6y + 4z - 4 = \theta$ para los puntos de la región R queda por debajo del plano, el volumen de la región del espacio esta dado por,

$$V = \int_0^2 \int_{4-2y}^4 \frac{-4 + x + 6y}{4}\,dx\,dy$$

$$V = \int_0^2 -x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\,y\bigg|_{4-2y}^4 dx$$

$$V = \int_0^2 \frac{5}{2}y^2 dy = \frac{5}{2}\frac{y^3}{3}\bigg|_0^2 = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{20}{3}\left[u^3\right]$$

Ejercicio 3.5.

Calcular el área de la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=16$ localizada dentro del cilindro $y^2+z^2=4$.

Solución:

Unas ecuaciones paramétricas de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ son

$$
\begin{aligned}
x &= 4\cos\phi \\
y &= 4\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\
z &= 4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi
\end{aligned}
$$

y sustituyendo en $y^2+z^2=4$.

$$16\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi+16\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi=4$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\phi &= \frac{4}{16} \\
\phi &= \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{4}=\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

$$\text{de donde } R=\left\{(\theta,\phi)|\, 0\le\phi\le\frac{\pi}{6}; 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

$$dS=\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\times\frac{d\mathbf{r}}{d\phi}\right|d\theta\,d\phi$$

$$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta\theta}\times\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta\phi}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \theta & -4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & 4\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ -4\operatorname{sen}\phi & 4\cos\theta\cos\phi & 4\operatorname{sen}\theta\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$\left|\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta\theta}\times\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta\phi}\right|=16\operatorname{sen}\phi$$

$$dS=16\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi$$

Sustituyendo e integrando se obtiene

$$
\begin{aligned}
S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}16\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi &= 16\int_0^{2\pi}(-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta \\
&= 16\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\right]d\theta \\
&= 16\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= 16\left(2-\sqrt{3}\right)\pi\left[u^2\right]
\end{aligned}
$$

Finalmente, como dentro del cilindro existen dos casquetes como el considerando, el área total; de esfera dentro del cilindro es de $32\left(2-\sqrt{3}\right)\pi\left[u^2\right]$.

Ejercicio 3.6.

Calcular el volumen de la región limitada superiormente por la superficie de ecuación e inferiormente por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25e$ inferiormente por la superficie $y + \sqrt{3}z = 0$.

Solución:

Dado que la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 con centro en el origen y el plano $y + \sqrt{3}z = 0$ pasa por el origen, es obvio que el plano corta por la mitad a la esfera, por lo tanto se puede concluir que el valor del volumen pedido es:

$$V = \frac{4}{3}\pi(5)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{250}{3}\left[u^3\right]$$

Ejercicio 3.7.

Utilizar integración triple para calcular el volumen de la región interior a los cilindros

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad\qquad x^2 + z^2 = a^2.$$

Solución:

$$R = \left\{(\rho, \theta, z)|\, 0 \le \rho \le a; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le z \le \sqrt{a^2 - \rho^2\cos^2\theta}\right\}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2\rho^2\cos^2\theta}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{a^2 - \rho^2\cos^2\theta}\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\left(\rho^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{3\cos^2\theta}\Bigg|_0^a \rho\, d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sec^2\theta + \operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\right] d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tan\theta - \cos\theta - \sec\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^3}{3}\left[\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\theta - \cos\theta - \sec\theta\right) - (-1-1)\right] \\
&= \frac{a^3}{3}\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \left(\sec^2\theta + \operatorname{sen}\theta - \sec\theta\tan\theta\right) d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left[\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\alpha - \cos\alpha - \sec\alpha\right) - (-1-1)\right] \\
&= \frac{a^3}{3}(2) = \frac{2}{3}a^3
\end{aligned}$$

$$V_{TOTAL} = 8V = \frac{16a^3}{3}\left[u^3\right]$$

Ejercicio 3.8.

Calcular el volumen de la región interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y limitada por los planos $z = 4 + \frac{1}{2}xy, z = 0$

Solución:

La región en coordenadas cartesianas es

$$R = \left\{ (x, y) | -3 \leq x \leq 3; -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \right\}$$

En coordenadas polares

$$R' = \{ (\rho, \theta) | \, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \, 0 \leq \rho \leq 3 \}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_R 4 + \frac{x}{2} dA = \int\int_R \left[4 + \frac{\rho \cos\theta}{2} \right] \rho \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 4\rho + \frac{\rho^2 \cos\theta}{2} d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\rho^2 + \frac{\rho^3 \cos\theta}{6} \bigg|_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 18 + \frac{9}{2} \cos\theta \, d\theta \\
&= 18\,\theta + \frac{9}{2} \operatorname{sen}\theta \bigg|_0^{2\pi} = 18\,(2\pi) + \frac{9}{2}\,(0) = 36 \left[u^2 \right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.9.

Calcular el área de la porción $4x - y + 2z = 16$ del plano localizado en el primer octante e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Solución:

$$R' = \left\{ (\rho, \theta) | \, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

$$S = \int\int_R \left| \frac{\nabla F}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right| dA \quad \text{donde} \quad F = 4x - y + 2z - 16 = 0$$

$$\begin{aligned}
S &= \int\int_R \frac{\sqrt{16 - 1 + 4}}{2} dA \\
&= \frac{\sqrt{21}}{2} \int\int_R dA = \frac{\sqrt{21}}{2} \int\int_{R'} \rho \, dA \\
&= \frac{\sqrt{21}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho \, d\rho \, d\theta \\
&= \frac{\sqrt{21}}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{21} \frac{\pi}{2} \left[u^2 \right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10.

Calcular por integrales triples, el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ y los planos $y = \frac{3}{4}x, z = 0, z = x$.

Solución:

$$R = \left\{ (x, y, z)| \quad 0 \leq x \leq 4; \quad \frac{3\pi}{4} \leq y \leq \sqrt{25}; \quad 0 \leq z \leq x \right\}$$

En coordenadas cilíndricas

$$R' = \left\{ (\rho, \theta, z)| \quad 0 \leq \rho \leq 5; \quad \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq z \leq \rho\cos\theta \right\}$$

$$V = \int\limits_{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{5} \int\limits_{0}^{\rho\cos\theta} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$V = \int\limits_{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{5} \rho^2 \cos\theta d\rho\, d\theta$$

$$= \int\limits_{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^2 \cos\theta\right)\Big|_0^5 d\theta$$

$$= \int\limits_{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{125}{3}\rho^2 \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{125}{3} \operatorname{sen}\theta \Big|_{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{como } \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5} = \frac{125}{3}\operatorname{sen}\theta\Big|_{\arctan\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{125}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{50}{3}$$

Ejercicio 3.11.

Utilizar integrales dobles para calcular el volumen de la región localizada entre las superficies de ecuaciones, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$, $y = 4-2x$, $6x+y+4z-4 = 0$.

Solución:

$$R = \{\, (x, y)|\, 0 \leq x \leq 2; 4 - 2x \leq y \leq 4\}$$

Además, como el plano $6x + y + 4z - 4 = 0$ para puntos de la región R queda por debajo del plano $z = 0$, el volumen de la región del espacio esta dado por,

$$V = \int_0^2 \int_{4-2X}^4 \frac{-4 + 6x + y}{4}\, dy\, dx$$

$$V = \int_0^2 -y + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{8}y^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \frac{5}{2}x^2 dx = \frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{20}{3}\,[u^3]$$

Ejercicio 3.12.

Calcular el área de la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=36$ localizada dentro del cilindro $x^2+z^2=9$.

Solución:
Unas ecuaciones paramétricas de la esfera $x^2+y^2+z^2=36$ son:

$$\begin{aligned} x &= 6\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ y &= 6\cos\phi \\ z &= 6\cos\theta\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

Sustituyendo en $x^2+z^2=9$; $\quad 36\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi+36\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi=9$

$$\operatorname{sen}\phi^2=\frac{9}{36} \qquad\qquad \phi=\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{6}=\frac{\pi}{6}$$

de donde

$$R'=\left\{(\theta,\phi)|\,0\le\phi\le\frac{\pi}{6};0\le\theta\le2\pi\right\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}\times\frac{\partial r}{\partial\phi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 6\cos\theta\operatorname{sen}\phi & 0 & -6\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\ 6\operatorname{sen}\theta\cos\phi & -6\operatorname{sen}\phi & 6\cos\theta\cos\phi\end{vmatrix}=36\operatorname{sen}\phi$$

$$dS=36\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi$$

Sustituyendo e integrando se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}36\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta \\ S &= 36\int_0^{2\pi}-\cos\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta \\ S &= 36\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\right]d\theta=36\left[1--\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\theta\Big|_0^{2\pi} \\ &= 36\left(2-\sqrt{3}\right)\pi\left[u^3\right] \end{aligned}$$

Finalmente, como dentro del cilindro existen dos casquetes como el considerando, el área total de esfera dentro del cilindro es de $72\left(2-\sqrt{3}\right)\pi\left[u^3\right]$.

Ejercicio 3.13.

Calcular volumen de la región limitada superiormente por la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente por la superficie $\sqrt{3}x+z=0$.

Solución:

Dado que la superficie $x^2+y^2+z^2=16$ es una esfera de radio 4 con centro en el origen y el plano $\sqrt{3}x+z=0$pasa por el origen, es obvio que el plano corta por la mitad a la esfera, por tanto se puede concluir que el valor de volumen pedido es,

$$V=\frac{4}{3}\pi(4)^3\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$V=\frac{128}{3}\pi\left[u^3\right]$$

Ejercicio 3.14.

En una fábrica se requiere construir un tanque de almacenamiento de agua con la forma de una superficie que tiene por ecuación $z + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ con $z \geq 0$ donde x, y, z están en metros.

1. ¿Cuál debe ser el valor de la constante $a > 0$ de modo que el tanque tenga un volumen $V = 128\pi \left[m^3\right]$?

2. Si el espesor de la pintura que debe cubrir el tanque es de 0.2mm. ¿Cuántos litros se necesitan para cubrir la parte exterior del tanque?

Solución:

1. $z = a^2 - x^2 - y^2$ Si $z = 0$

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad R = \{\, (\rho, \theta) |\, 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \left(a^2 - \rho^2\right)\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2 a^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right|_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} - 0 \right) d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi a^4}{2} = 128\pi$$

$$\Rightarrow a^4 = 256 \rightarrow a = 4$$

2.

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1\, dA}$$

$$dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1 dA}$$

$$S = \int \int_R \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1\, dx\, dy}$$

En coordenadas polares:

$$S = \int \int_R \sqrt{4\rho^2 + 1}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{4\rho^2 + 1}\, d\theta\, d\rho$$

$$S = 2\pi \int_0^4 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho = 2\pi \left. \left(\frac{1}{12} \left(4\rho^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}} \right) \right|_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6} \left((64 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{6} \left(65\sqrt{65} - 1 \right)$$

$$= 273.86 m^3$$

Pintura = 273.86(0.2) = 54.77 litros

Capítulo 4

Funciones vectoriales.

En el Capítulo I se establecieron las bases para el cálculo diferencial de funciones escalares de varias variables. Ahora se extenderán dichas bases, de forma natural a las funciones vectoriales. Dado que un vector queda representado por sus componentes escalares, cualquier operación diferencial tendrá que ser efectuada sobre dichas componentes, es decir, sobre campos escalares. Los conceptos de límite, derivada, continuidad, etc, no necesitan de definiciones adicionales y se pueden aplicar de inmediato a vectores.

Una vez definido un campo vectorial como aquel cuyos elementos son vectores (los cuales a su vez están definidos sobre campos escalares mediante sus componentes), veremos el cálculo diferencial de los mismos. Es decir, veremos como un vector tangente a una curva en un punto, puede desplazarse a lo largo de la curva siempre en dirección tangencial a la misma, describiendo una trayectoria que corresponde de forma única a cada curva en el espacio. Si a cada punto sobre la curva le corresponde un vector posición con respecto a un sistema de coordenadas seleccionado de antemano, tendremos que para cada punto de la curva, le podemos asignar un vector tangente a la misma. Ese vector, puede hacerse unitario dividiéndolo entre su tamaño o módulo. Una vez definido el vector tangente en cada punto, podemos definir, mediante el producto escalar de vectores, otro vector perpendicular al vector tangente en cada punto de la curva (vector normal); así mismo, un tercer vector aparece de forma natural al considerar el producto vectorial entre los vectores definidos anteriormente. Este último vector será perpendicular a los dos anteriores en el punto considerado (vector bi-normal).

Así, toda curva en el espacio podrá ser representada y recorrida por tres vectores que se desplazan a lo largo de la curva: un vector tangente, un vector normal y un vector bi-normal. La curva en el espacio quedará representada por lo tanto en forma vectorial y los cambios de dirección en la curva (trayectoria de una partícula) quedarán registrados por cambios en los tres vectores definidos para cada punto. Veremos además, que la trayectoria a lo largo de una curva espacial, podrá ser representada como la trayectoria de un punto que se desplaza sobre dicha curva o como un número de puntos distintos colocados a lo largo de la curva (longitud de arco). Ambas descripciones son equivalentes. Por último, se aplicaran los conceptos a la cinemática de la partícula.

4.1. Funciones vectoriales.

Definición.

Una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ asigna a cada escalar t en un intervalo o dominio, un vector $\mathbf{f}(t)$ llamado el valor de $\mathbf{f}$ en t.
Así,

$$\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)] = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$$

f_1, f_2, f_3 reciben el nombre de componentes.

Definición.

Límite de una función vectorial. Sea $\mathbf{f}\,(t)$ una función vectorial definida $\forall t$ en una vecindad del punto t_0, excepto posiblemente en el punto mismo. Se dice que el vector $\mathbf{a}$ es el límite de la función $\mathbf{f}\,(t)$ cuando $t \to t_0$ si:

$$\lim_{t\to t_0} \mathrm{f}\,(t) = \mathbf{a}$$

si y sólo si dado $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que:

$$|\mathrm{f}\,(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |t - t_0| < \delta$$

Continuidad.

La función vectorial $\mathbf{f}\,(t)$ es continua en $t = t_0$ si está definida en un entorno t_0 y además:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}\,(t) = \mathbf{f}\,(t_0)$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que:

$$|\mathbf{f}\,(t) - \mathbf{f}\,(t_0)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |t - t_0| < \delta$$

Ejercicios propuestos.

1. Demostrar usando definición de límites que:

   a) $\lim\limits_{t\to t_0} [\mathbf{f}\,(t) + \mathbf{g}\,(t)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ donde $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}\,(t) = \mathrm{a} \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{g}\,(t) = \mathbf{b}$

   b) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}\,(t) = \mathbf{a}$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \phi\,(t) = \mathbf{c}$ demostrar $\lim\limits_{t\to t_0} \phi\,(t)\ \mathbf{f}\,(t) = \mathbf{ca}$

2. Demostrar que una función vectorial

$$\mathbf{f}\,(t) = f_1\,(t)\,\mathbf{i} + f_2\,(t)\,\mathbf{j} + f_3\,(t)\,\mathbf{k}$$

   es continua en t_0 si cada función escalar f_1, f_2 y f_3 es continua en t_0.

4.2. Diferenciación de vectores.

4.2.1. Derivada de una función vectorial.

La derivada $\mathbf{f}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ es:

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

Definición.

Una trayectoria en R^n es un mapeo $\mathbf{c} : [a, b] \to R^n$. Si $n = 2$ es una trayectoria plana. Si $n = 3$ es una trayectoria en el espacio. La colección de puntos $\mathbf{c}(t)$ con $a \leq t \leq b$ es una curva, $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son los extremos. Se dice que la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ parametriza la curva.

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria en R^3, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde $x(t), y(t), z(t)$ son las funciones componentes de $\mathbf{c}$.

Si la función vectorial está en componentes $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}$ la derivada existe si y sólo si la derivada de las componentes escalares existen.

$$f_i'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_i(t + \Delta t) - f_i(t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j}$$

De igual manera se calcula:

$$\mathbf{f}''(t) = \frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right]$$

4.2.2. Reglas de derivación de funciones vectoriales.

Todas las reglas de derivación para funciones vectoriales son iguales a las de funciones escalares con una excepción: *Para diferenciar el producto vectorial de funciones vectoriales, el orden de los factores debe preservarse, ya que el producto vectorial es no conmutativo.*

Reglas:

1. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}$

2. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}$

3. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathrm{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}'$

4. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u}' \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] + \mathbf{u} \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{w}] + \mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}']$

Si $t = g(s)$ es diferenciable:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{u}[g(s)]}{ds} = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}\frac{dg(s)}{ds}$$

utilizando la regla de la cadena.

Consideremos el campo vectorial:

$$\mathbf{u} = \alpha\,(x, y, z, t)\,\mathbf{i} + \beta\,(x, y, z, t)\,\mathbf{j} + \gamma\,(x, y, z, t)\,\mathbf{k}$$

En cualquier punto $P\,(x, y, z)$ y para cualquier instante t, el campo define un vector. Si mantenemos P fijo, $\mathbf{u}$ puede cambiar debido a t y si mantenemos t fijo el vector en P será diferente al vector en $Q\,(x + dx, y + dy, z + dz)$. Es decir, para que cambie $\mathbf{u}$ en la dirección x deberá cambiar α y lo mismo para y y z.

$$d\mathbf{u} = d\alpha\mathbf{i} + d\beta\mathbf{j} + d\gamma\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = &\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}dz + \frac{\partial\alpha}{\partial t}dt\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}dz + \frac{\partial\beta}{\partial t}dt\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}dx + \frac{\partial\gamma}{\partial y}dy + \frac{\partial\gamma}{\partial z}dz + \frac{\partial\gamma}{\partial t}dt\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.1.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector posición de una partícula en R^3 entonces,

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k} \quad \textit{velocidad}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \quad \textit{aceleración}$$

Ejemplo 4.2.2.

Sea $\mathbf{u}\,(t)$ un vector de magnitud constante, luego $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$.

Diferenciando:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

luego $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$,entonces $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$, lo cual es de notable importancia.

Nótese que en todos los casos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$ donde u es la longitud de $\mathbf{u}$, la diferenciación resulta:

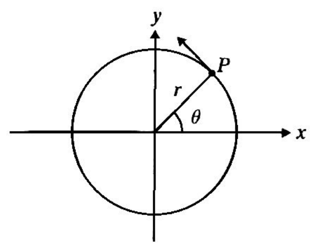
$$2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2u\frac{du}{dt}$$

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = u\frac{du}{dt}$$

Ejemplo 4.2.3.

Sea la partícula P que se mueve sobre un círculo de radio 1 con una velocidad angular constante $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Figura 4.1.



$$\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta\,\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-r\cos\theta\,\mathbf{i} - r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

luego,

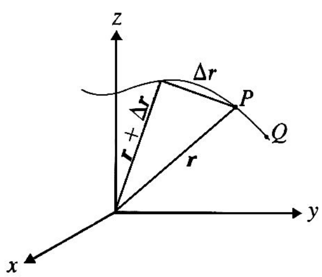
$$\mathrm{a} = -\omega^2\mathbf{r}.$$

El punto P tiene una aceleración hacia el origen de magnitud constante $\omega^2 r$ (aceleración centrípeta).

Ejemplo 4.2.4.

Sea P un punto cualquiera sobre una curva espacial.

Figura 4.2.



$$x = x(s)$$
$$y = y(s)$$
$$z = z(s)$$

donde S es la longitud de arco medida desde algún punto.
Ahora:

$$\mathbf{r} = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} \tag{1}$$

luego:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds} \equiv 1$$

Luego $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ es un vector unitario. Cuando $\Delta s \to 0$, la posición de $\dfrac{\Delta \mathrm{r}}{\Delta s}$ se acerca a la línea tangente en P. Luego (2) representa un vector tangente unitario a la curva espacial (1).

4.2.3. Repaso.

Curvas en el espacio.

Llamamos curva al conjunto de valores de una función que mapea un intervalo en R al plano R^2 o al espacio R^3. Llamaremos a ese mapeo la trayectoria C. Usaremos t como variable independiente, luego $\mathbf{c}(t)$ es la posición de una partícula en el instante t.

Superficies en el espacio.

Curva en el espacio: $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$.

La representación paramétrica es: $x = x(t)\,, y = y(t)\,, z = z(t)$

Superficie en el espacio: $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$

La representación paramétrica es: $x = x(u,v)\,, y = y(u,v)\,, z = z(u,v)$ donde u, v son parámetros. Si $v = cte$, describe una curva en el espacio donde u varía. Para cada valor de $v = c$ existe una curva en el espacio. Similarmente v varía a lo largo de la curva $u = k$. El lugar geométrico de todas las curvas $v = c$ y $u = k$ definen una superficie S. Los parámetros u, v se llaman coordenadas curvilíneas y las curvas u y v son las curvas paramétricas.

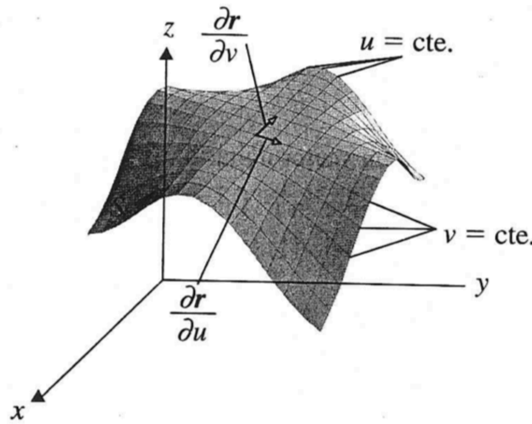


Figura 4.3.

El vector unitario está $\mathbf{n}$ definido por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

donde:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

son normales a la superficie S representada por $\mathbf{r}(u,v)$ siempre y cuando $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$.

Demostración.

Como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

es tangente a $v = c$ en P.

y como

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

es tangente a $u = k$ en P.

Entonces $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es perpendicular a S en P y $\mathbf{n}$ es unitario.

Si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 0$ el punto se llama *singular.* Los planos tangentes sólo existen en puntos no singulares.

Longitud de arco.

La longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

Ejemplo 4.2.5.

Encontrar la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ entre $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$$

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-rsent)^2 + (r\cos t)^2}dt$$

$$\mathbf{c}(t) = 2\pi r$$

Si hubiera sido entre $0 \leq t \leq 4\pi$ hubiéramos obtenido $4\pi r$, etc.

Ejemplo 4.2.6.

Encontrar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2\right), 0 \leq t \leq \pi$. Ahora es en R^3.

Solución.

$\mathbf{c}(t) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2\right)$ tiene como vector velocidad $\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$.

Ahora como:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

la longitud de arco es:

$$s = \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

Evaluando la integral.

$$\int \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[x\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} + a^2 \ln\left(x + \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] + c$$

sustituyendo valores:

$$s = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right) \doteq 10.63$$

Diferencial de longitud de arco.

Un desplazamiento infinitesimal de una partícula sobre una trayectoria

$$\mathbf{c}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j} + z\left(t\right)\mathbf{k}$$

es:

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right)dt$$

y su longitud:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

será la diferencial de longitud de arco.

Así la longitud de arco es:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} ds$$

Generalizando a R^n:

Si $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to R^n$ es una trayectoria. Su longitud se define como:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left|\mathbf{c}'\left(t\right)\right| dt$$

donde, si:

$$\mathbf{c}\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right)$$

$$\Rightarrow s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'_1\left(t\right)\right)^2 + \left(x'_2\left(t\right)\right)^2 + \ldots + \left(x'_n\left(t\right)\right)^2}dt$$

Relación entre la representación de una curva como la trayectoria de una partícula (t) y como la longitud de arco (s).

Imaginemos un ejemplo sencillo pero ilustrativo: Consideremos una carrera de automóviles en un circuito cerrado. La carrera se puede observar desde dos puntos de vista; el primero es montado como piloto en uno de los autos y el otro, como espectador sentado en un punto fijo del circuito(digamos en la meta). El piloto del automóvil puede leer su velocidad y cambiarla por medio del acelerador. Sin embargo, no sabe su posición respecto a los otros autos ni cuanto camino ha recorrido. Esta es la descripción utilizando una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria, utilizando t (digamos el tiempo con un cronómetro) como parámetro; partícula fija, posición variable (descripción de Lagrange). Por otro lado, un espectador en un punto fijo puede ver la trayectoria completa y analizar el movimiento de cada automóvil cuando pasa por el punto donde se encuentra el espectador, utilizando s, la posición o longitud como parámetro; posición fija, partícula variable (descripción de Euler).Obviamente, la carrera es la misma al igual que las velocidades y aceleraciones de cada vehículo, ya que estas son independientes del sistema de análisis.

Fórmulas de Frenet-Serret.

Triedro.

La curva C en el espacio se representa por el lugar geométrico del punto extremo del vector posición $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}$ donde t es un parámetro escalar. Se supone que $x(t), y(t)$ y $z(t)$ tienen derivadas continuas y pueden expanderse en series de Taylor en la vecindad de cualquier punto de la curva.

El vector tangente unitario a la curva en cualquier punto es:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{[\mathbf{r}'(t)]} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} \qquad\qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq 0$$

Si usamos como parámetro la longitud de arco S, entonces:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}$$

y el vector tangente unitario será:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Ahora, $\mathbf{T}$ es un vector unitario tal que su derivada $\mathbf{T}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{T}$. Además $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ nos dice que tan rápido está cambiando de dirección el vector unitario tangente al moverse a lo largo de la curva.

La normal principal a la curva se define por la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

donde $k = \left|\dfrac{d\mathrm{T}}{ds}\right|$ se llama la *curvatura* de c en cualquier punto. Su inversa recibe el nombre de *radio de curvatura*,

$$\rho = \frac{1}{k} \qquad k \neq 0$$

La ecuación de la normal principal define tanto a k como a $\mathbf{N}$ siendo k la longitud de $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ y $\mathbf{N}$ es el vector unitario paralelo a $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$.

Si se define un tercer vector perpendicular a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{N}$, tomaremos un sistema de coordenadas en P.

Así:

Vector Binormal,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Así mismo:

$$\mathbf{B} \quad \perp \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds}$$

Todos los vectores asociados con la curva en el punto P pueden escribirse como una combinación lineal de $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$.

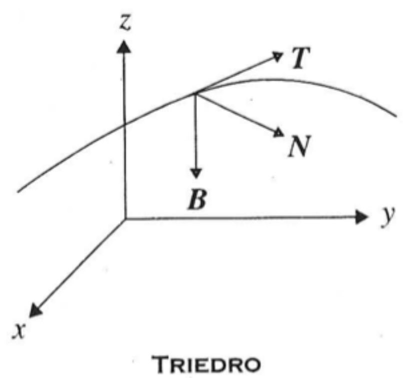


Figura 4.4.

Así, se evalúa:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{n}$$

Que es la normal principal a la curva, donde k es la magnitud de $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ y se llama curvatura. El reciproco $\rho = \frac{1}{k}$ es el *radio de curvatura.* El plano formado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se llama *plano osculador*.

k— longitud de $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$

$\mathbf{N}$— vector unitario paralelo a $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$

Definamos la torsión τ de una curva C en cualquier punto como:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \quad \text{donde } \frac{1}{\tau} = \sigma \text{ el radio de torsión .}$$

Así, el vector tangente unitario $\mathbf{T}$, el vector normal unitario $\mathbf{N}$ y el vector unitario binormal $\mathbf{B}$ forman un triedro en todo punto de C.

Triedro:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \qquad \mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B}$$

Ahora, al evaluar, $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ es obvio que $\frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{B}$

Por lo tanto , las fórmulas de Frenet-Serret son:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = k\mathbf{T} - \tau\mathbf{B}$$

Es obvio que,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$$

luego

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} + k\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$$

ó bien

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0$$

luego $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$, es decir es paralelo a $\mathbf{N}$.

Entonces,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau \mathbf{N}$$

donde τ es la magnitud de $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$

Sabiendo que: $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ se tiene :

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} = \mathbf{B} \times k\mathbf{N} + \tau \mathbf{N} \times \mathbf{T} = -k\mathbf{T} - \tau \mathbf{B}$$

Ejercicios propuestos.

1. Demostrar que:

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \qquad\qquad T = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}$$

2. Demostrar que las fórmulas de Frenet-Serret se pueden escribir como:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T} \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}$$

   donde $\omega = \tau \mathbf{T} + k\mathbf{B}$ es el vector paradoux de la curva C.

3. Mostrar que:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -k\tau \qquad \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau \qquad \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k$$

   Nótese que:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = N^2 = 1 \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = 1 \qquad \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = T^2 = 1$$

   y que:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0 \qquad\qquad \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = 0$$

4.3. Geometria diferencial.

4.3.1. Fórmulas de Frenet-Serret: método alternativo.

Hemos visto que si un punto P sobre una curva espacial dada por:

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s)$$

donde s es la longitud de arco medida desde algún punto Q, el vector de posición de dicho punto P es:

$$\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

de tal manera que:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

es un vector tangente unitario a dicha curva en el punto P .

Recordemos además que:

$$d\mathbf{s} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt$$

y que

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

es la diferencial de longitud de arco.

Así, utilizando como parámetro la longitud de arco s, el vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Asimismo, el vector $\mathbf{T}'(s)$ será perpendicular al vector $\mathbf{T}$.

Además $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ indica que tan rápido esta cambiando de dirección el vector unitario tangente $\mathbf{T}$ al moverse a lo largo de la curva.

Nótese que por otro lado, la curva C en el espacio es el lugar geométrico del punto extremo del vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

donde t es un parámetro escalar no necesariamente la longitud de arco s.

Las ecuaciones paramétricas de C serán entonces:

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s)$$

O sea, que a una función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

le corresponde, en cada punto, un vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

y de igual manera el punto P a lo largo de la función describe un curva C con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

Ahora el vector tangente a la curva en cada punto será $\mathbf{f}'(t)$ y el vector unitario tangente será:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}\prime(t)}{|\mathbf{r}\prime(t\ )|} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}$$

siempre y cuando

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq 0$$

Así, la curva espacial C puede quedar representada por $\mathbf{r}(s)$ ó $\mathbf{r}(t)$ donde:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad a \leq t \leq b$$

o bien

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \qquad 0 \leq s \leq l$$

donde la longitud de arco es

$$s = \int\limits_C ds = \int\limits_a^b |f'(t)|\, dt = \int\limits_a^b [f'(t) \cdot f'(t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

y el elemento de longitud de arco es:

$$ds = |\mathbf{f}'(t)|\, dt$$

Entonces la longitud de arco de una curva espacial $s(t)$ es una función de la variable escalar t :

$$s(t) = \int\limits_a^t |\mathbf{f}'(t)|\, dt$$

Ejemplo 4.3.1. Una curva C esta dada por la función vectorial:

$$\mathbf{f}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Representar la curva mediante una función vectorial con la longitud de arco S como parámetro.
Solución:

Sabemos que la longitud de arco es:

$$s = \int\limits_0^t |\mathbf{f}'(t)|\, dy = \int\limits_0^t adt = at \Rightarrow s = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

ya que :

$$\mathbf{f}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{f}'(t)| = \left((a^2\,\mathrm{sen}^2\,t) + (a^2\cos^2 t)\right)^{\frac{1}{2}} = a$$

luego la función vectorial que representa $\mathbf{f}(t)$ en función de s será:

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}\left(\frac{s}{a}\right) = \left(a\cos\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(a\operatorname{sen}\frac{s}{a}\right)\mathbf{j} \qquad 0 \leq s \leq 2\pi a$$

Ejemplo 4.3.2.

Cuando una curva S esta representada por una función vectorial $\mathbf{g}(s)$ donde s es la longitud de arco, demostrar que:

$$\frac{dg(s)}{ds} = g'(s) = \mathbf{T}$$

Solución:

Sabemos que si C esta representada por $\mathbf{f}(t)$, entonces el vector unitario tangente es:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}$$

Ahora como $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(q(s))$ donde $t = q(s)$, usando la regla de la cadena

$$\frac{dg(s)}{ds} = \mathbf{g}'(s) = \mathbf{f}'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g}(s) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \mathbf{T}$$

4.3.2. Formulas de Frenet-Serret (revisitadas).

Tangente, Curvatura y Torsión.

A partir de $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ donde $|\mathbf{r}'(t) \neq 0|$ ó si el parámetro t se reemplaza por la longitud de arco:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{r}'(s) \text{ y además } \mathbf{T}'(s) = \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \text{ es } \perp \text{ a } \mathbf{T}.$$

Definición.

La normal principal unitaria $\mathbf{N}$ se define a partir de $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$ donde $k = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ se llama la curvatura de C en cualquier punto.

Su inversa $\rho = \dfrac{1}{k}$ es el radio de curvatura.

Nótese que k es la longitud de $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ y $\mathbf{N}$ es el vector unitario paralelo a $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$.

Si se define un tercer vector perpendicular $(\perp)$ a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{N}$, tendremos un sistema local de coordenadas en P.

Definición.

El vector unitario binormal es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Igualmente tenemos que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es $\perp$ a $\mathbf{B}$ y que $|\mathbf{B}| \equiv 1$ ya que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ son unitarios.

La *torsión* τ de una curva C en cualquier punto se define como:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau\mathbf{N} \text{ donde } \tau = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right|$$

$\dfrac{1}{\tau} = \sigma$ se le llama *radio de torsión.*

Nota: Se puede definir $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau\mathbf{N}$ ya que la definición es arbitraria.

Hemos formado un triedro:

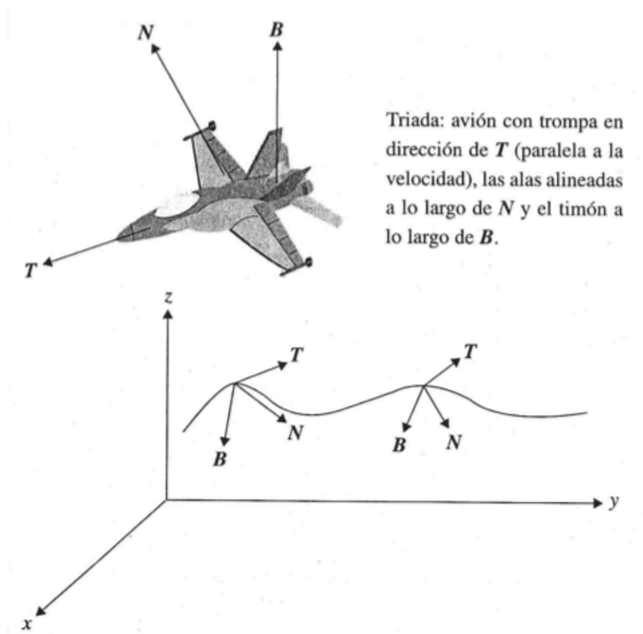


Figura 4.5.

Triedro:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}; \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}; \qquad \mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B}$$

Para evaluar $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ y $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds}$ se parte de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$ Se aplica la diferencial con respecto a s.

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

o bien ,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{B} \cdot k\mathbf{N}$$

pero $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es $\perp$ a $\mathbf{T}$ luego como $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ son perpendiculares , $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es paralela a $\mathbf{N}$.

Entonces,

$$\frac{d\mathrm{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

o bien,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau\mathbf{N}$$

Ahora bien de $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ &= -\tau\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times (k\mathbf{N}) \\ &= -\tau(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) - k(\mathbf{N} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T}$$

Finalmente,

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -(k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

Fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N} \\ &\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \\ &\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T} \quad \text{o bien,} \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -(k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.3.

Si una curva C es representada por $\mathbf{r}(t)$ y ésta es una función diferenciable al menos 2 veces, la curvatura C en cualquier punto se puede escribir como:

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Solución:

Sea $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ donde S es la longitud de arco. Entonces,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{dS}{dt} \tag{1}$$

y como $|\mathbf{T}| = 1$,entonces,

$$|\mathbf{r}'(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \tag{2}$$

Ahora, al usar la fórmula de Frenet-Serret se tiene,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = k\mathbf{N}\frac{ds}{dt} \tag{3}$$

Si se diferencia (1) y se usa (3), se obtiene,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}'(t) = \mathbf{T}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\mathbf{N} \tag{4}$$

Y al combinar resultados de (1) y (4):

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \left[\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right]\times\left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\mathbf{N}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k\mathbf{T}\times\mathbf{N} \tag{5}$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k\mathbf{B} \text{ pero } |\mathbf{B}| = 1$$

Entonces,

$$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k = |\mathbf{r}'(t)|^3 k \Rightarrow k = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Para aclarar lo anterior, demostrar que la torsión

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)\mathbf{r}'''(t)]^2}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|} \qquad [\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)\mathbf{r}'''(t)] = \mathbf{r}'''\cdot[\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'']$$

Igualmente :

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}; \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}; \qquad \mathbf{N} = \frac{[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)]\times\mathbf{r}'(t)}{|[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)]\times\mathbf{r}'(t)|}$$

Ejemplo 4.3.4.

Si la posición de una partícula está dada por la función

$$\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}$$

Determinar el instante para el cual su radio de torsión es mínimo.

Solución:
Se tiene :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \left(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\right)\\
\mathbf{r}'' &= (-6t, 6, 6t)\\
\mathbf{r}''' &= (-6, 0, 6)\\
\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' &= \left(18t^2 - 18, -36t, 18t^2 + 18\right)\\
|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|^2 &= (18)^2\,(2)\left(t^2+1\right)^2\\
\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}''' &= (18)(12) = 216
\end{aligned}$$

de donde el radio de torsión es

$$\sigma = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'''} = \frac{(18)^2\,(2)\left(t^2+1\right)^2}{(18)\,(12)} = 3\left(t^2+1\right)^2$$

el cual es mínimo para

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow 6(t^2+1)(2t) = 0, t = 0$$

.

Ejemplo 4.3.5.

Obtener la ecuación de un plano tangente y de la recta normal a la superficie,

$$x^2yz + 3xy^2 = 2xz - 8z \text{ en el punto } P\left(1, 2, -\frac{3}{2}\right).$$

Solución: Sea

$$F(x,y,z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz + 8z = 0$$

un vector normal a la superficie es

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(2xyz - 2z, x^2z + 6y, x^2y - 2x + 8\right)$$

$$\mathbf{v}|_p = \left(-3, \frac{21}{2}, 8\right)$$

un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{v} = (-6, 21, 16)$$

sustituyendo los datos en la ecuación del plano

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0$$

$$-6\,(x-1) + 21\,(y-2) + 16\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$-6x + 21y + 16z - 12 = 0$$

y sustituyendo en las ecuaciones de la recta,

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

$$\frac{\mathbf{x} - 1}{-6} = \frac{\mathrm{y} - 2}{21} = \frac{\mathrm{z} + \frac{3}{2}}{16}$$

Ejemplo 4.3.6.

Dada la superficie de ecuación,

$$\mathbf{r} = (3\cos s \sec t)\mathbf{i} + (3\,\mathrm{sen}\, s \sec t)\mathbf{j} + (3\tan t)\mathbf{k}$$

a) Obtener su respectiva ecuación cartesiana e indicar a que superficie corresponde.

b) Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente y las ecuaciones en forma simétrica de la recta normal, en el punto en que $s = \frac{p}{4}; \quad t = \frac{p}{4}$

Solución:

a) Del enunciado

$$x = 3\cos s \sec t \tag{1}$$

$$y = 3\,\mathrm{sen}\, s \sec t \tag{2}$$

$$z = 3\tan t \tag{3}$$

de (1) y (2)

$$x^2 + y^2 = 9\sec^2 t \tag{4}$$

de (3) y (4)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 9 \quad \textit{Hiperboloide de revolución de un manto}$$

b) Se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (-3\,\text{sen}\, s \sec t, 3\cos s \sec t, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (3\cos s \sec t \tan t, 3\,\text{sen}\, s \sec t \tan t, 3\text{sec}^2 s)$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{s=\frac{\pi}{4}, t=\frac{\pi}{4}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (18, 18, -18)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = (3, 3, 3)$$

$$(x-3, y-3, z-3)\cdot(1, 1, -1) = 0$$

$$x + y - z - 3 = 0 \qquad \textit{Plano tangente.}$$

$$x - 3 = y - 3 = 3 - z \qquad \textit{Recta normal.}$$

Ejemplo 4.3.7.

Sea la curva de ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (3-2t)\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}$$

Determinar:

a) Si la curva $\mathbf{r}(t)$ se encuentra contenida en un plano.

b) La ecuación del plano osculador de $\mathbf{r}(t)$.

c) La curvatura en el plano dado por t=2.

d) El radio de torsión en cualquier punto.

Solución:

a) Se tiene

$$\mathbf{r}' = (-2, 2t-4, 2) \qquad \mathbf{r}'' = (0, 2, 0) \qquad \mathbf{r}''' = (0, 0, 0)$$

de donde

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = 0 \Rightarrow \tau = 0 \therefore \text{ si está en un plano}$$

b)

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (-4, 0, 4) \| \mathbf{B} \qquad \mathbf{p} = \mathbf{r}(0) = (3, 0, -1)$$

con lo que la ecuación del plano osculador es:

$$(x-3, y, z+1)\cdot(1, 0, 1) = 0 \qquad \Rightarrow x + z - 2 = 0$$

c)

$$\mathbf{r}'(2) = (-2, 0, 2) \qquad |\mathbf{r}'(2)| = 2\sqrt{2}$$

$$k = \frac{|(-4, 0, -4)|}{\left(2\sqrt{2}^3\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

d)

$$\sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0} \Rightarrow \sigma \to \infty$$

4.3.3. Aplicaciones a mecánica (Cinemática).

Aceleración y curvatura.

En el movimiento a lo largo de una curva general donde $\mathbf{v}$ cambia de dirección y magnitud, el vector aceleración es la suma de dos vectores ortogonales; uno da la razón de la velocidad y el otro da la aceleración centrípeta instantánea correspondiente a una trayectoria circular relacionada con ella.

Así:

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{T} + a_n \mathbf{N} \tag{1}$$

Sea el vector posición:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

La rapidez será:

$$u = |\mathbf{u}(t)| = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

Recordando que:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \qquad \rho = \frac{1}{k} \qquad \mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} \qquad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

($\mathbf{T}$ gira en la dirección $\mathbf{N}$ a una razón de k).

Entonces de la ecuación de aceleración tenemos :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k}$$

y como:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}$$

entonces:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathbf{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}$$

Es decir:

$$\mathbf{a} = a_T\,\mathbf{T} + a_n\,\mathbf{N}$$

luego:

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad a_n = kv^2 \qquad \Rightarrow a^2 = {a_t}^2 + {a_n}^2$$

Resumen de fórmulas:

Parametrización:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{o bien} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

Velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Longitud de arco:

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{v}|\, dt$$

Aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\,\mathbf{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}$$

$$= \frac{d\,|\mathbf{v}|}{dt}\,\mathbf{T} + k|\mathbf{v}|^2\,\mathbf{N}$$

Curvatura:

$$k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|; \text{ radio de curvatura: } \rho = \frac{1}{k}$$

Tangente:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Normal:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

Binormal:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Torsión:

$$\tau = -\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \pm\left(\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right)$$

Formulas de Frenet Serret:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T} \quad \text{o bien} \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\left(k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\right)$$

Regla de la cadena:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\frac{d}{dt}$$

Ejemplo 4.3.8.

Un esquiador se desliza con una rapidez constante de $5\sqrt{17}\left[\frac{m}{s}\right]$ a lo largo de una trayectoria definida por la curva de ecuación $x = \frac{1}{200}y^3$ determinar su velocidad y su aceleración en el instante en que llega al punto $A(40, 20)$ despreciar las dimensiones del esquiador.

Solución:

Se considera :

$$\mathbf{v} = -\frac{dx}{dt}\mathbf{i} - \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

donde

$$x = \frac{1}{200}y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3}{200}y^2\,\frac{dy}{dt},\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_A = 6\,\frac{dy}{dt}$$

ahora

$$|\mathbf{v}| = 5\sqrt{17} \Rightarrow \frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{3}{200}y^2\right)^2 + 1} = \sqrt{85}$$

con lo que

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{85}{37}} \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = 6\sqrt{\frac{85}{37}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = -\sqrt{\frac{85}{37}}\,(6\,\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -9.09\,\mathbf{i} - 1.52\,\mathbf{j}$$

para la aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{100}y\,\frac{dy}{dt} + \frac{3}{200}\,y^2\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

donde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{\frac{9y^4}{40\,000} + 1}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\sqrt{85}}{2}\left(\frac{9y^4}{40\,000} + 1\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{9y^3}{10\,000}\,\frac{dy}{dt}\\ &= -\frac{\sqrt{85}}{2}(37)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{36}{5}\right)\sqrt{\frac{85}{37}}\\ &= -0.22\end{aligned}$$

con lo que,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{100}(20)\sqrt{\frac{85}{37}} + \frac{3}{200}(20)^2(-0.22) = -0.41$$

Finalmente :

$$\mathbf{a} = -\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} - \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = 0.41\,\mathbf{i} + 0.22\,\mathbf{j}$$

4.4. Resumen **Capítulo 4. Funciones vectoriales.**

Longitud de arco.

La longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \le t \le t_1$ es:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Diferencial de longitud de arco.

Un desplazamiento infinitesimal de una partícula sobre una trayectoria $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es,

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt$$

y su longitud:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

será la diferencial de longitud de arco. Así la longitud de arco es:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} ds$$

Generalizando a R^n:
Si $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to R^n$ es una trayectoria. Su longitud se define como:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{c}\prime(t)| \, dt$$

donde, si:

$$\mathrm{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

$$\Rightarrow \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \ldots + (x'_n(t))^2} dt$$

Fórmulas:

Parametrización:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \text{ o bien } \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

Velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Longitud de arco:

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{v}| \, dt$$

Aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

$$= \frac{d\,|\mathbf{v}|}{dt}\mathbf{T} + k|\mathbf{v}|^2\mathbf{N}$$

Curvatura:

$$k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|;\ \text{radio de curvatura: } \rho = \frac{1}{k}$$

Tangente:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Normal:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

Binormal:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Torsión:

$$\tau = -\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \pm\left(\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right)$$

Curvatura:

$$k = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

$$\text{radio de curvatura } \rho = \frac{1}{k}$$

Vector Tangente:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}; \qquad \mathbf{T} = \frac{u}{v}; \qquad \mathbf{T} = \mathbf{r}'(t)$$

Vector Normal :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

$$\mathbf{N} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| \times \mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| \times \mathbf{r}'(t)|}$$

Vector Binormal :

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}$$

Torsión :

$$\tau = -\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds}$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)\mathbf{r}'''(t)]}{|\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)|^2}$$

donde: $\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)\mathbf{r}'''(t) = \mathbf{r}'''(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$ es el triple producto escalar

Fórmulas de Frenet Serret:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T} \text{ o bien } \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\left(k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\right)$$

Relaciones de Frenet-Serret:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -k\tau$$

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau$$

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k$$

Aplicaciones a cinemática.

Vector desplazamiento:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Vector velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

Rapidez:

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

Vector aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

Aceleración centrípeta: Puesto que,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

Es decir:

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_n\mathbf{N}$$

Donde a_T es la componente escalar de la aceleración tangencial y a_N es la componente escalar de la aceleración normal o aceleración centrípeta. Así:

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad |a| = \left[a_N^2 + a_T^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k|v|^2$$

Obsérvese que:

$$k = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|v|^3}; \quad \tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}$$

4.5. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 4.1.

Una trayectoria está dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}\,(s) = \left(a\cos\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(a\operatorname{sen}\frac{s}{a}\right)\mathbf{j} + (bs)\,\mathbf{k}; \quad a, b \ni R$$

donde s es la longitud de arco

a) Obtener el triedro $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$.

b) Calcular la curvatura y la torsión.

Solución:

a) Como s es la longitud de arco, se debe cumplir

$$\left|\frac{dr}{ds}\right|^2 = 1, \quad \left(-sen\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\cos\frac{s}{a}\right)^2 + (b)^2 = 1, \quad b = 0$$

Así entonces

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(-sen\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} = \left(-\cos\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(-sen\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = 0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

b)

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{a}\sqrt{\left(-\cos\frac{s}{a}\right)^2 + \left(-sen\frac{s}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}$$

$$\tau = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right| = |0| = 0$$

Ejercicio 4.2.

Si la trayectoria de una partícula esta dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left(3t - t^3\right)\ \mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \left(3t + t^3\right)\ \mathbf{k}$$

determinar el valor de t para el cual el radio de torsión es mínimo.

Solución:

Se tiene

$$\mathbf{r}' = \left(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\right) = 3\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right)$$

$$\mathbf{r}'' = (-6t, 6, 6t) = 6\,(-t, 1, t)$$

$$\mathbf{r}''' = (-6, 0, 6) = 6\,(-1, 0, 1)$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = 18\left(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1\right)$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = 18\sqrt{\left((t^4 - 2t^2 + 1) + (4t^2) + (t^4 + 2t^2 + 1)\right)}$$

$$= 18\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)$$

de donde

$$\sigma = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''} = \frac{(18)^2\,(2)\left(t^2+1\right)^2}{(18)\,(6)\,(-t^2 + 1 + 0 + t^2 + 1)}$$

$$= 3\left(t^2 + 1\right)^2$$

Ahora para que sea mínimo

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0; \quad 6\left(t^2 + 1\right)(2t) = 0; \quad \Rightarrow t = 0$$

Ejercicio 4.3.

Un objeto que se desplaza en el espacio está sujeto al campo de velocidades

$$\mathbf{v} = (xz + 2y)\,\mathbf{i} + \left(xz + y^2\right)\mathbf{j} + \left(xz + y^2\right)\mathbf{k}$$

Si en cierto momento el objeto se encuentra en el punto $P(1, 1, 1)$, determinar las componentes y de la familia de vectores $\mathbf{u} = (a, 1, b)$, en las que debe moverse el objeto para que la razón instantánea de cambio del campo $\mathbf{v}$ sea nula.

Solución:

Se tiene

$$\frac{dv}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z & 2y & x \\ z & 2y & x \\ z & 2y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valuando en el punto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = t \\ b = -t - 2 \end{matrix} \quad ; t \ni R$$

Ejercicio 4.4.

Sea la curva de ecuación,

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + e^t \cos t\, \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$$

Determinar en el punto

$$t = 0.$$

a) Los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$.

b) La curvatura.

Solución:

Se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \left(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t\right) \mathbf{i} + \left(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t\right) \mathbf{j} + e^t\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = \left(2e^t \cos t\right) \mathbf{i} + \left(-2e^t sent\right) \mathbf{j} + e^t\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'''(t) = \left(2e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t\right) \mathbf{i} + \left(-2e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t\right) \mathbf{j} + e^t\, \mathbf{k}$$

evaluando $t = 0$

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'''(0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{6}$$

$$|\mathbf{r}'''| = \sqrt{3}$$

de donde

a)

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

b)

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ejercicio 4.5.

Determinar las componentes (escalares) tangente y normal de la aceleración, considerando como ley de desplazamientos

$$\mathbf{r}(t) = [\operatorname{sen} t - t\cos t]\,\mathbf{i} + [\cos t + t \operatorname{sen} t]\,\mathbf{j} + \left[t^2\right]\mathbf{k}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}' = (t\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (t\cos t)\,\mathbf{j} + (2t)\,\mathbf{k}\\
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{r}'' = (t\cos t + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (\cos t - t\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + (2)\,\mathbf{k}\\
|\mathbf{v}| &= \sqrt{s}t\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} &= st\\
\mathbf{v}\times\mathbf{a} &= \left(-2t^2\operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} + \left(-2t^2\cos t\right)\mathbf{j} + \left(t^2\right)\mathbf{k}\\
|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| &= \sqrt{5}t^2\\
a_T &= \sqrt{5}\\
a_N &= t
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.6.

Dada la superficie de ecuación

$$\mathbf{u}(s,t) = (2a\cos s\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (a\cos t)\,\mathbf{j} + (2a\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t)\,\mathbf{k}$$

Determinar el valor de a, de tal forma que el plano tangente a la superficie en el punto $P\,(2a,0,0)$, sea paralelo al plano $x=4$.

Solución:

$$P = \begin{cases} x = 2a\cos s\operatorname{sen} t = 2a & \cos s = 1 \quad s = 0\\ y = a\cos t = 0 & t = \dfrac{\pi}{2}\\ z = 2a\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t = 0 & \operatorname{sen} s = 0 \quad s = 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{u}}{ds} &= (-2a\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (2a\cos s\operatorname{sen} t)\,\mathbf{k}\\
\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= (2a\cos s\cos t)\,\mathbf{i} + (-asent)\,\mathbf{j} + (2a\operatorname{sen} s\cos t)\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

de donde la normal al plano tangente a la superficie, está dada por

$$\mathbf{N} = \left.\left(\frac{d\mathbf{u}}{ds}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\right|_P = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & 2a\\ 0 & -a & 0\end{vmatrix} = 2a^2\mathbf{i}$$

con lo que el plano tangente tiene por ecuación,

$$\begin{aligned}
&\left(2a^2,0,0\right)\cdot(x-2a,y,z) = 0\\
&2a^2\,(x-2a) = 0\\
&x = 2a
\end{aligned}$$

y del enunciado $x=4$, se tiene que $a=2$.

Ejercicio 4.7.

Calcular las coordenadas del punto P de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (1-2t)\,\mathbf{i} + \left(t^2\right)\mathbf{j} + \left(2e^{2(t-1)}\right)\mathbf{k}$$

en el que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es paralelo a $\mathbf{r}(t)$.

Solución:

$$\mathbf{r}(t) = (1-2t)\,\mathbf{i} + \left(t^2\right)\mathbf{j} + \left(2e^{2(t-1)}\right)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'(t) = (-2)\,\mathbf{i} + (2t)\,\mathbf{j} + \left(4e^{2(t-1)}\right)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}(t)\mathbf{r}'$$

si

$$\mathbf{r}(t) = \alpha\mathbf{r}'(t)$$

por lo tanto

$$(1-2t) = -2\alpha$$
$$t^2 = 2\alpha t$$
$$2e^{2(t-1)} = 4\alpha e^{2(t-1)}$$

Se obtiene

$$1 = 2\alpha \quad ; \quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

Sustituyendo

$$1 - 2t = -2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$t = 1$$

por lo tanto el vector de posición del punto pedido es,

$$\mathbf{r}(1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad P(-1, 1, 2)$$

Ejercicio 4.8.

Una partícula se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$x = t - 1, \quad y = 2t - t^2$$

Encontrar la aceleración de la partícula, su rapidez y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Solución:

$$\mathbf{r}(t) = (t-1)\,\mathbf{i} + \left(2t - t^2\right)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = r'(t) = \mathbf{i} + (2-2t)\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a} = r''(t) = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4(1-t)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t + 5}$$
$$a_T = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{4t-4}{\sqrt{4t^2-8t+5}}$$
$$a_N = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}$$

o bien

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - a^2{}_T} = \frac{2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}$$

Ejercicio 4.9.

En la curva

$$\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$$

calcular el valor de la curvatura en cualquier punto.

Solución:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} + \left(e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t\right)\mathbf{j} + \left(e^t\right)\mathbf{k}\\
\mathbf{r}''(t) &= \left(-2e^t \operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} + \left(2e^t \cos t\right)\mathbf{j} + \left(e^t\right)\mathbf{k}\\
\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \left(-e^{2t} \cos t + e^{2t} \operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} + \left(-e^{2t} \cos t + e^{2t} \operatorname{sen} t\right)\mathbf{j} + \left(2e^{2t}\right)\mathbf{k}\\
|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| &= \sqrt{6}e^{2t}\\
|\mathbf{r}'| &= \sqrt{3}e^{t}\\
\kappa &= \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{\left(\sqrt{3}e^{2t}\right)^3} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}}\\
\kappa &= \frac{\sqrt{2}}{3e^t}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.10.

Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta tangente , en el punto $P(2,0,0)$, a la curva de intersección entre las superficies,

$$\begin{aligned}
S_1 &: \mathbf{u} = (2\cos t \operatorname{sen} s)\,\mathbf{i} + (\cos s)\,\mathbf{j} + (2\operatorname{sen} t \operatorname{sen} s)\,\mathbf{k}\\
S_2 &: \mathbf{v} = (2\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\beta)\,\mathbf{j} + (2\operatorname{sen}\alpha)\,\mathbf{k};
\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} &= (-2\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (2\cos t\cos s)\,\mathbf{k}\\
\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta s} &= (2\cos s\cos t)\,\mathbf{i} + (-\operatorname{sen} s)\,\mathbf{j} + (2\cos s \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k}\\
\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \alpha} &= (-2\operatorname{sen}\alpha)\,\mathbf{i} + (2\cos\alpha)\,\mathbf{k}\\
\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \beta} &= \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Valuando en $P(2,0,0)$

$$\left.\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t}\right|_P = 2\mathbf{k} \qquad \left.\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \alpha}\right|_P = 2\mathbf{k}$$

$$\left.\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta s}\right|_P = \mathbf{j} \qquad \left.\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \beta}\right|_P = \mathbf{j}$$

La dirección de la recta tangente es

$$\mathbf{T} = \left(\left.\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t}\right|_P \times \left.\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta s}\right|_P\right) \times \left(\left.\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \alpha}\right|_P \times \left.\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta \beta}\right|_P\right) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Las superficies son tangentes en P, por lo que no existe curva de intersección.

Ejercicio 4.11.

Una partícula se mueve en el espacio con una aceleración,

$$\mathbf{a}(t) = (2\operatorname{sen} 3t)\,\mathbf{i} + (2\cos 3t)\,\mathbf{j} + \left(3t^2\right)\mathbf{k}$$

siendo el parámetro t el tiempo. Encontrar la velocidad y la posición de la partícula para cualquier tiempo t, a partir de que ,

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Solución:

$$\mathbf{v}\,(t) = \int \mathbf{a}(t)dt = \left(-\frac{2}{3}\cos 3t + C_1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}sen3t + C_2\right)\mathbf{j} - \left(t^3 + C_3\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3} + C_2\right)\mathbf{j} - \left(\frac{\pi}{8}^3 + C_3\right)\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}\,(t) = \left(-\frac{2}{3}\cos 3t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}sen3t - \frac{1}{3}\right)\mathbf{j} - \left(t^3 + \frac{\pi^3}{8}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}\,(t) = \int \mathbf{v}(t)dt = \left(-\frac{2}{9}sen3t + t + C_4\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{9}\cos 3t + \frac{t}{3} + C_5\right)\mathbf{j}$$
$$- \left(\frac{t^4}{4} - \left(1 - \frac{\pi^3}{8}\right)t + C_6\right)\mathbf{k}$$

y puesto que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

$$\mathbf{r}\,(t) = \left(-\frac{2}{9}\operatorname{sen} 3t + t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{9}\cos 3t + \frac{t}{3} + \frac{7}{9}\right)\mathbf{j}$$
$$- \left(\frac{t^4}{4} - \left(1 - \frac{\pi^3}{8}\right)t - 1\right)\mathbf{k}$$

Ejercicio 4.12.

Sea la curva de ecuación $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ para la cual $|\mathbf{r}\,(t)|$ es igual a una constante. Demostrar que el vector de posición de cualquier punto de la curva es perpendicular a su respectiva recta tangente.

Solución:

Como $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathrm{r(t)}| = cte.$ se tiene al derivar,

$$\mathbf{r}(t)\mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t)\mathbf{r}(t) = 0$$

$$2\mathbf{r}(t)\mathbf{r}'(t) = 0$$

$$\mathbf{r}(t)\mathbf{r}'(t) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{r}(t) \quad \perp \quad \mathbf{r}'(t)$$

Ejercicio 4.13.

La posición de una partícula en movimiento está dada por

$$\mathbf{r}\,(t) = \int \mathbf{v}(t)dt = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$$

donde t es el tiempo. Obtener para el instante $t = 0.25$ segundos.

a) El vector velocidad de la partícula.

b) El vector tangente unitario a la trayectoria de la partícula.

c) El vector aceleración tangencial de la partícula.

d) El vector aceleración normal de la partícula.

Solución:

$$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j} + \frac{3}{2}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 0\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Para $t = \dfrac{1}{4}$

a) $\mathbf{v} = r'(t) = 2\,\mathbf{i} + -\frac{3}{2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

b) $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \dfrac{1}{\frac{5}{2}}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \dfrac{4}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\mathbf{j}$

c) $\mathbf{a_T} = compvect\,\mathbf{r}'' = \dfrac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\mathbf{r}'$

$$\mathbf{a_T} = \frac{9}{4 + \frac{9}{4}}\left(2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{a_T} = \frac{36}{25}\left(2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{a_T} = \frac{72}{25}\mathbf{i} - \frac{54}{25}\mathbf{j}$$

d)

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T = \mathbf{r}'' - \mathbf{a}_T = 6\mathbf{j} - \left(\frac{72}{25}\mathbf{i} - \frac{54}{25}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{a}_N = \frac{72}{25}\mathbf{i} - \frac{96}{25}\mathbf{j}$$

Ejercicio 4.14.

Una partícula se mueve a lo largo de la curva C, descrita por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde x, y, z están en metros y t en segundos.

Si la rapidez de la partícula es constante e igual de $10\,[m/s]$ y el vector binormal $\mathbf{B}$ es paralelo al vector $\left(1, 0, t^2\right)$.

a) Determinar el valor absoluto de la torsión de la curva C como función de t.

b) Obtener una ecuación del plano oscilador a la curva C en el punto donde $\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solución:

a)

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 10$$

$$\mathbf{B}\left(1, 0, t^2\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + th^4}}\left(1, 0, t^2\right)$$

$$\mathbf{B}\,(t) = \left(\left(1 + t^4\right)^{\frac{1}{2}}, 0, t^2\left(1 + t^4\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

derivando el vector $\mathbf{B}\,(t)$ con respecto a t, se tiene

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\left(-2t^3, 0, 2t\right)}{(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

y con respecto a s ;

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\left(-2t^3, 0, 2t\right)}{(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

como

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\tau\mathbf{N}$$

$$|\tau| = \frac{1}{10(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}}\left(4t^6 + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\tau| = \left|\frac{1}{5\,(1 + t^4)}\right|$$

b) como $\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ un vector normal al plano $\left(1, 0, t^2\right)\Big|_{t=1} = (1, 0, 1)$ en el punto $P\,(3, -1, 2)$, así una ecuación del plano oscilador es ,

$$(x - 3, y + 1, z - 2) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$x + z = 5$$

Ejercicio 4.15.

Una trayectoria está dada por la función vectorial.

$$\mathbf{r}(s) = (s - \arctan s)\,\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(s^2+1\right)\right)\mathbf{j} + (\arctan s)\,\mathbf{k}$$

a) Determinar si el parámetro s es la longitud de arco.

b) Calcular la curvatura y la torsión.

Solución:

a)

$$\mathbf{r}(s) = \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{s^2}{s^2+1}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}s}{s^2+1}\mathbf{j} + \frac{1}{s^2+1}\mathbf{k}$$

de donde

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dx}\right| = \frac{1}{s^2+1}\sqrt{\left(s^2\right)^2 + \left(\sqrt{2}s\right)^2 + (1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\sqrt{(s^2+1)} = 1$$

el parámetro s si es longitud de arco.

b) Se tiene

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \frac{s^2}{s^2+1}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}s}{s^2+1}\mathbf{j} + \frac{1}{s^2+1}\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{j} + \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{k} \Rightarrow \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{2}}{s^2+1}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} = \frac{\sqrt{2}s}{s^2+1}\mathbf{i} + \frac{1-s^2}{s^2+1}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{2}s}{s^2+1}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = -\frac{1}{s^2+1}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}s}{s^2+1}\mathbf{j} - \frac{s^2}{s^2+1}\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{j} - \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\mathbf{k} \Rightarrow \tau = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{2}}{s^2+1}$$

Ejercicio 4.16.

Obtener la curvatura y el radio de torsión de la curva de ecuación.

$$\mathbf{r} = (4\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (4\cos t)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$$

Solución:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

$$\sigma = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'''}$$

Calculando y evaluando en el punto A.

$$\mathbf{r}' = (4\cos t)\,\mathbf{i} + (-4\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'' = (-4\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (-4\cos t)\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}''' = (-4\cos t)\,\mathbf{i} + (4\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$$

$$4\operatorname{sen} t = 2\sqrt{2}$$
$$4\cos t = 2\sqrt{2} \quad t = \frac{\pi}{4}$$

Luego,

$$\mathbf{r}'|_{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}''|_{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''| = 5 \times 4 = 20$$
$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{8+8+4} = 5$$
$$|\mathbf{r}''| = \sqrt{8+8} = 4$$

Entonces $\kappa = \dfrac{20}{125} = \dfrac{4}{25}$, ahora σ,

$$\mathbf{r}'''|_{\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3 \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 6\sqrt{2}\mathbf{i} - 6\sqrt{2}\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$
$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = \left(6\sqrt{2}\mathbf{i} - 6\sqrt{2}\mathbf{j} - 16\mathbf{k}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}\right)$$
$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = -24 - 24 = -48$$

Finalmente

$$\sigma = \frac{20}{-48} = -\frac{5}{12}$$

Ejercicio 4.17.

Sea la curva de ecuación $\mathbf{r} = (t - \cos t)\,\mathbf{i} + (1 + \cos t)\,\mathbf{j} + \left(\sqrt{2} sent\right)\mathbf{k}$. Determinar las coordenadas de los puntos de la curva en los que la recta tangente sea perpendicular al vector posición.

Solución:

El vector tangente a $\mathbf{r}$ es,

$$\mathbf{r}' = (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (-\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + \left(\sqrt{2}\cos t\right)\mathbf{k}$$

Para que sea perpendicular tenemos que

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} = (t - \cos t)(\operatorname{sen} t) + (1 + \cos t)(-\operatorname{sen} t) + \left(\sqrt{2}\operatorname{sen} t\right)\left(\sqrt{2}\cos t\right) = 0$$
$$\operatorname{sen} t - \cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t + 2\operatorname{sen} t \cos t = 0$$

para cualquier valor de t siempre $\mathbf{r} \perp \mathbf{r}'$

Ejercicio 4.18.

Sea la curva C de ecuación. Calcular $\lim_{t\to 0} \kappa$, siendo κ la curvatura de C.

Solución:

Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= a\left(3-3t^2\right)\mathbf{i} + 6at\mathbf{j} + a\left(3+3t^2\right)\mathbf{k} \\
\mathbf{r}''(t) &= a\left(-6t\right)\mathbf{i} + 6a\mathbf{j} + a\left(6t\right)\mathbf{k} \\
|\mathbf{r}'| &= 3a\sqrt{2}\left(t^2+1\right) \\
\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' &= 18a^2\left(t^2-1,-2t,t^2+1\right) \\
|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''| &= 18\sqrt{2}a^2\left(t^2+1\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{3a(t^2+1)^2} \\
\Rightarrow \lim_{t\to 0}\kappa &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{3a(t^2+1)^2} = \frac{1}{3a}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.19.

Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie de ecuación.

$$\mathbf{u}(s,t) = s\cos t\,\mathbf{i} + s\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \text{ en el punto } P\left(0,2,\frac{\pi}{2}\right)$$

Solución:

$$P\begin{cases} x = 0 = s\cos t \\ y = 2 = s\operatorname{sen} t = s, \Rightarrow s = 2 \\ z = \dfrac{\pi}{2} = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} &= \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} \\
\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} &= -s\operatorname{sen} t\mathbf{i} + +s\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
\mathbf{N} = \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)_P &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$R_N\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{N} = (1,0,2) \\ P\left(0,2,\frac{\pi}{2}\right) \\ x = t \\ y = 2 \\ z = \dfrac{\pi}{2} + 2t \end{cases}$$

Ejercicio 4.20.

Obtener los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ de la curva de ecuación.

$$\mathbf{r} = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j} + \left(4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)\mathbf{k} \text{ en el punto } A\,(\pi, 2, 4)\,.$$

Solución:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'' = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

$$A \begin{cases} x = \pi = t - \operatorname{sen} t \\ y = 2 = 1 - \cos t, \Rightarrow t = \pi \\ z = 4 = 4 \operatorname{sen} \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

entonces, valuando para $t = \pi$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= 2\mathbf{i}, & |\mathbf{r}'| &= 2 \\ \mathbf{r}'' &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} & & \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, & |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Capítulo 5

Campos Vectoriales.

En capítulos anteriores, definimos las funciones vectoriales, su diferenciación y sus aplicaciones a geometría diferencial. En este capítulo veremos que un conjunto de funciones vectoriales definen un campo vectorial. Los campos vectoriales representan campos existentes en la naturaleza (campos magnéticos, eléctricos, de fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.) de los cuales es necesario estudiar sus propiedades y sus características para poder, más adelante, entender como actúan sobre los cuerpos geométricos en la misma naturaleza (áreas, volúmenes, etc.). Así, veremos que los campos vectoriales tienen propiedades las cuales los clasifican y hacen su estudio práctico mucho más comprensible. Todo campo vectorial tendrá una dirección en la cual su cambio sea máximo; esta propiedad recibe el nombre de gradiente del campo vectorial. Así mismo, el campo vectorial al actuar sobre un cuerpo, provocará en este último, deformaciones, alargamientos y giros, los cuales definen a su vez conceptos como la divergencia y el rotacional. Cada concepto es distinto al otro, aunque estén relacionados entre sí. Cada propiedad tiene un significado físico el cual es importante entender. El lector debe hacer un esfuerzo por comprender cada significado físico y no limitarse a clasificar las propiedades como simples operaciones vectoriales. Por último, el sistema de coordenadas utilizado para resolver un problema físico, dependerá de la geometría del sistema (forma del cuerpo). Así, al tratarse de un cilindro, se utilizarán coordenadas cilíndricas; de igual manera, si se trata de una esfera, se usarán coordenadas esféricas. Esto introduce el concepto de coordenadas curvilíneas y su transformación a coordenadas cartesianas rectangulares. Obviamente, las operaciones vectoriales se vuelven más complicadas pero la solución del problema es, así mismo, más sencilla.

5.1. Definición de un campo vectorial.

Un campo vectorial en R^n es un mapeo $\mathbf{F}: A \subset R^n \to R^n$ que asigna a cada punto x en un dominio A, un vector $\mathbf{F}(x)$. Si $n = 2$, $\mathbf{F}$ es un espacio vectorial en el plano. Si $n = 3$, $\mathbf{F}$ es un espacio vectorial en el espacio.

Ejemplo 5.1.1.

Sea la temperatura un campo escalar de posición $T(x, y, z)$. El flujo de calor es un campo vectorial dado por $\mathbf{q} = -k\nabla T$ donde $k > 0$ es la conductividad térmica y ∇T es el gradiente de temperatura. El signo (-) es porque el calor viaja de regiones calientes a regiones frías. -∇T apunta en la dirección de disminución de T.

Ejemplo 5.1.2.

Campo Gravitacional de fuerzas. Describe la fuerza de atracción de la tierra sobre una masa m. Considerando un sistema de coordenadas en el centro de una esfera (tierra).

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z)$ es el vector posición y $r = |\mathbf{r}|$ es mayor que el radio de la tierra. M es la masa de la tierra.

Ya vimos que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ donde $\phi = -\dfrac{mMG}{r}$

Así:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{mMG}{r^3}x, -\frac{mMG}{r^3}y, -\frac{mMG}{r^3}z\right)$$

Ejemplo 5.1.3.

Ley de Coulomb. La fuerza actuando sobre una carga q en la posición $\mathbf{r}$ con respecto a otra carga Q situada en el origen es:

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon Qq}{r^3}\mathbf{r} = -\nabla\phi$$

donde $\phi = \dfrac{\varepsilon Qq}{r}$ y ε es una constante que depende del sistema de unidades. Si $Qq > 0$ la fuerza es repulsiva (cargas iguales) y para $Qq < 0$ es atractiva (cargas opuestas). Las superficies $\phi = cte.$ son superficies equipotenciales. Un campo para el cual $V = -\nabla\phi$ se llama conservativo. El campo de fuerza es ortogonal a la superficie equipotencial (esfera concéntrica).

NOTA:

No todo el campo vectorial se puede representar como el gradiente de un escalar. Por ejemplo, sea el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y)$ dado por $\mathbf{V}(x, y) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$.

Si fuera conservativo sería

$$\mathbf{V} = -\nabla f = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

y entonces también

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \quad \text{pero} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

lo que viola el teorema mixto; luego no existe f tal que $\mathbf{V} = -\nabla f$.

5.2. Divergencia.

Dado el **campo vectorial** $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$ la divergencia de $\mathbf{F}$ es el **campo escalar**:

$$div\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Ejemplo 5.2.1.

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición, encontrar $\nabla \cdot \mathbf{r}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \end{aligned}$$

La divergencia tiene importantes interpretaciones físicas. Si $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$ representa el campo de velocidades de un fluido, entonces $div(p\mathbf{V})$ representa la razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del fluido a través de un volumen considerado. Por tanto, si:

$\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) < 0$	el fluido se esta comprimiendo
$\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) > 0$	el fluido se esta expandiendo
$\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$	el fluido es incompresible $\Rightarrow\ \nabla \cdot \mathbf{V}$

5.3. Líneas de Flujo

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, la trayectoria $\mathbf{c}\,(t)$ tal que $\mathbf{c}'\,(t) = \mathbf{F}\,(\mathbf{c}\,(t))$ es una línea de flujo. Entonces, $\mathbf{F}$ representa el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}\,(t)$.

Es decir, la línea de flujo (línea de corriente) es tangente al vector velocidad en cada punto (o viceversa).

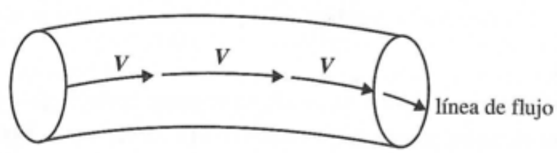


Figura 5.1.

Además, una línea de flujo es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Si $\mathbf{c}'\,(t) = \mathbf{F}\,(\mathbf{c}\,(t))$ esta dada por:

$$\mathbf{x}'\,(t) = P\,(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$$

$$\mathbf{y}'\,(t) = Q\,(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$$

$$\mathbf{z}'\,(t) = R\,(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$$

entonces $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es una diferencial total.

Ejemplo 5.3.1.

Consideremos el campo $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Las líneas de flujo son rectas dirigiéndose hacia afuera del origen.

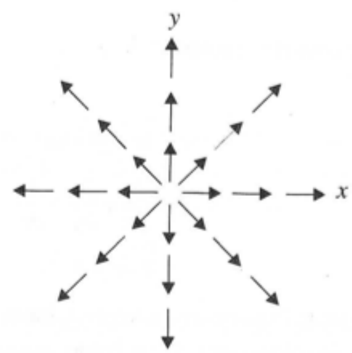


Figura 5.2.

Si las línea de flujo son de un fluido que se está expandiendo, esperamos que $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$. Así

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y = 2 > 0$$

Ejemplo 5.3.2.

Sea $\mathbf{F} = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ Aquí las líneas van hacia el origen, luego, se espera que $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$. Al calcular, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -2 < 0$$

Ejemplo 5.3.3.

Si $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ las líneas de flujo son círculos concéntricos al origen en sentido contrario a las manecillas del reloj. Parece que no habrá ni compresión ni expansión. En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(+x) = 0$$

5.4. Gradiente.

Dada una función *escalar* $f(x, y, z)$, su gradiente es el *vector*

$$\nabla f = grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

donde el *operador diferencial vectorial* ∇ (del, nabla, etc.) se define, en el caso de coordenadas cartesianas, como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Recordemos que como:

$$d\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición del punto $P(x, y, z)$, entonces

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$d\,f = d\mathbf{r} \cdot \nabla f$$

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición correspondiente al punto $P(x, y, z)$, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{f}$$

La interpretación geométrica de ∇f es tal, que si nos movemos sobre una superficie $f = cte$. Entonces $df = 0$ y

$$d\mathbf{r} \cdot \nabla f = 0.$$

Luego,∇f es perpendicular a $d\mathbf{r}$. Es decir, ∇f es normal a todas las tangentes posibles a la superficie en P y es normal por lo tanto a la superficie $f = cte$.

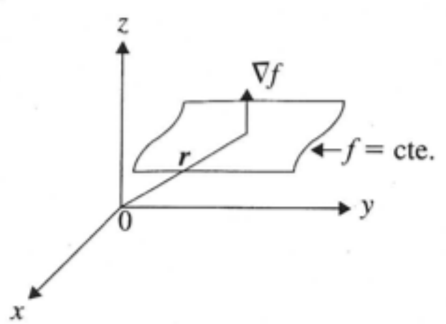


Figura 5.3.

Cuando se utiliza $df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f$, el vector ∇f tiene un valor fijo en el punto P de tal manera que df (el cambio en f) dependerá de $d\mathbf{r}$.

Ciertamente, df es un máximo cuando $d\mathbf{r}$ sea paralelo a ∇f puesto que $d\mathbf{r} \cdot \nabla f = |d\mathbf{r}|\,|\nabla f| \cos\theta$ es máximo cuando $\theta = 0$. Luego ∇f se encuentra en la dirección de mayor aumento de f.

Ahora si $\mathbf{T}$ es un vector unitario en la dirección $d\mathbf{r}$ y $|d\mathbf{r}| = ds$, entonces

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{T} \cdot \nabla f$$

El cambio de f en cualquier dirección es la proyección de ∇f sobre el vector unitario en dicha dirección, es decir, su derivada direccional.

El vector normal unitario a f en un punto P será:

$$\mathbf{N} = \frac{|\nabla f|_P}{|\nabla f|_P}$$

Notas Adicionales.

Derivada direccional y Gradiente.

Sea en R^3 el campo escalar $f = f(x,y,z)$ diferenciable; sea, además el vector unitario $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Considerando un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ del campo, se define la semirrecta:

$$\begin{array}{l} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \qquad t > 0 \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{array}$$

Para todo punto $P(x,y,z)$ de la región f a una función compuesta de t.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}$$
$$\frac{df}{dt} = f_x\cos\alpha + f_y\cos\beta + f_z\cos\gamma$$

Variación del campo f en la dirección de la semirrecta.

Definición.

El gradiente del campo escalar f es el vector ,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Donde $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}$, obviamente

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{e} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{e}}\nabla f = |\nabla f|\,|\mathbf{e}|\cos(\mathbf{e}, \nabla f)$$

Si el vector $\mathbf{e}$ coincide con el vector $\mathbf{a} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ entonces

$$\cos(\mathbf{e}, \nabla f) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{df}{dt} = |\nabla f|$$

La magnitud de ∇f es el tamaño máximo de la derivada direccional.

Si un vector (campo) se puede representar como el gradiente de un escalar, el campo se llama ***conservativo*** y la función escalar $f(x,y,z)$ se llama el ***potencial del campo vectorial***.

Ejemplo 5.4.1.

Encontrar un vector unitario perpendicular a la superficie $x^2 + y^2 - z = 1$ en $P(1,1,1)$.

Solución:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \qquad \nabla f = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\nabla f|_{(1,1,1)} = 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k} \qquad \mathbf{N} = \frac{2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3}$$

5.5. Rotacional de un campo vectorial.

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$ Se define el rotacional de $\mathbf{F}$ como el campo vectorial $rot\,\mathbf{F}, (\nabla \times \mathbf{F})$.

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ el campo $\mathbf{F}$ se llama ***irrotacional.***

Ejemplo 5.5.1.

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Encontrar $rot\,\mathbf{F}$

Solución:

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)\,\mathbf{i} - (0-0)\,\mathbf{j} + (y-0)\,\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = y\,\mathbf{k}$$

Ejemplo 5.5.2.

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición correspondiente al punto $P(x, y, z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$
$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$
$$\mathbf{F} \cdot \nabla\mathbf{r} = \mathbf{F}$$

Ejercicios propuestos

1. Demostrar que para movimiento circular uniforme $\nabla \times \mathbf{V} = 2\Omega$

2. Demostrar que el rotacional de un gradiente es cero $[\nabla \times (\nabla f)] = 0$

3. Demostrar que la divergencia de un rotacional es cero $[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f})] = 0$

5.6. Divergencia de un gradiente *(Laplaciano).*

Sea el campo escalar f. Se define el operador laplaciano ∇^2 como la divergencia del gradiente de f.

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{operador de Laplace.}$$

La ecuación de Laplace $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = 0$ tiene una importancia enorme en la física. Su solución será indudablemente estudiada por el lector en muchas materias de ciencias de la ingeniería. Toda función que satisface la ecuación de Laplace se llama ***armónica***.

Ejemplo 5.6.1.

Verificar que la función $z = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ satisface la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
z =& e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \\
\frac{\partial z}{\partial x} =& 2e^{x^2-y^2}\left[x\cos(2xy) - y\,\mathrm{sen}(2xy)\right] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =& 2e^{x^2-y^2}\left[-2xy\,\mathrm{sen}(2xy) + \cos(2xy) - 2y^2\cos(2xy)\right] \\
&+ 4xe^{x^2-y^2}\left[x\cos(2xy) - y\,\mathrm{sen}(2xy)\right] \\
\frac{\partial z}{\partial y} =& -2e^{x^2-y^2}\left[x\,\mathrm{sen}(2xy) - y\cos(2xy)\right] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =& -2e^{x^2-y^2}\left[2x^2\cos(2xy) - 2xy\,\mathrm{sen}(2xy) + \cos(2xy)\right] \\
&+ 4ye^{x^2-y^2}\left[x\,\mathrm{sen}(2xy) - y\cos(2xy)\right]
\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación de Laplace se tiene que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

5.7. Generalización del concepto de gradiente y divergencia de campos vectoriales

En muchas aplicaciones de ingeniería aparece el concepto de tensor; principalmente en tres dimensiones. Una manera fácil de introducir este concepto es considerando el gradiente de un campo vectorial mediante un ejemplo práctico.

Imaginemos un paracaidista esquiador a punto de aterrizar en una montaña. Su campo de velocidades estará dado por el campo vectorial:

$$\mathbf{V} = u\,(x,y,z)\,\mathbf{i} + v\,(x,y,z)\,\mathbf{j} + w\,(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

Al tocar la montaña, el esquiador estará sujeto a la pendiente de la misma, es decir a un gradiente; así, su campo de velocidades en sus tres componentes, tenderá a cambiar en tres direcciones. Por definición el gradiente de **V** estará formado por nueve componentes:

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{V} &= \left(\frac{d}{dx}\,\mathbf{i} + \frac{d}{dy}\,\mathbf{j} + \frac{d}{dz}\,\mathbf{k}\right)(u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}) \\
&= u_x\,\mathbf{ii} + u_y\,\mathbf{ji} + u_z k\,\mathbf{ki} + v_x\,\mathbf{ij} + v_y\,\mathbf{jj} + v_z\,\mathbf{kj} + w_x\,\mathbf{ik} + w_y\,\mathbf{jk} + w_z\,\mathbf{kk}
\end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

El gradiente de $\mathbf{V}$ recibe el nombre de *tensor de segundo orden* . [Un tensor de tercer orden tendría 27 componentes y un *tensor de primer orden* tendría tres componentes (*vector*); *un tensor de orden cero es un escalar.*

Si $\nabla\mathbf{V}$ se proyecta en dirección normal a una superficie, el resultado es el vector $\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{V}$. En el caso del esquiador, el vector normal tiene la misma dirección de la gravedad. Si el esquiador quiere ir en otra dirección para no caer, proyectará su gradiente en dicha dirección *(derivada direccional)* y provocará un giro a sus esquís equivalente a una rotación pura *(rotacional).*

Un tensor de segundo orden, al ser representado por una matriz cuadrada, usando el Teorema de Cayley-Hamilton dará por resultado la aparición de tres invariantes escalares:

1. traza de $\nabla\mathbf{V}$, $tr(\nabla\mathbf{V}) = u_x + u_y + u_z$
2. $\det \nabla\mathbf{V} = |\nabla\mathbf{V}| = u_x\, v_y\, w_z$
3. $\dfrac{1}{2}\left[tr^2 \nabla\mathbf{V} - tr\,(\nabla\mathbf{V})^2\right] = u_x\, v_y + v_y\, w_z + u_x\, w_z$

El significado de estos tres invariantes son:

1. El primer invariante escalar tiene importante significado físico porque

$$tr(\nabla\mathbf{V}) = u_x + \mathrm{u}_y + \mathrm{u}_z = div\,\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

   Si $\nabla \cdot \mathbf{V} > 0$ hay una creación del campo $\mathbf{V}$ equivalente a una expansión.

   Si $\nabla \cdot \mathbf{V} < 0$ hay una absorción del campo $\mathbf{V}$ equivalente a una compresión. En el caso del esquiador, este se considerará incompresible y, por lo tanto, su divergencia es cero.

2. El segundo invariante escalar $\det \nabla\mathbf{V} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es equivalente al jacobiano,

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right)$$

   cuyo significado ya conoce el lector. Representa el volumen formado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ que son vectores ortogonales y por lo tanto $JJ^{-1} = 1$, siempre y cuando $J \neq 0$.

3. *El tercer invariante no tiene un significado físico.*

Ahora bien si separamos el tensor $\nabla\mathbf{V}$ en una parte simétrica y otra antisimétrica:

$$\nabla\mathbf{V} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T\right)$$

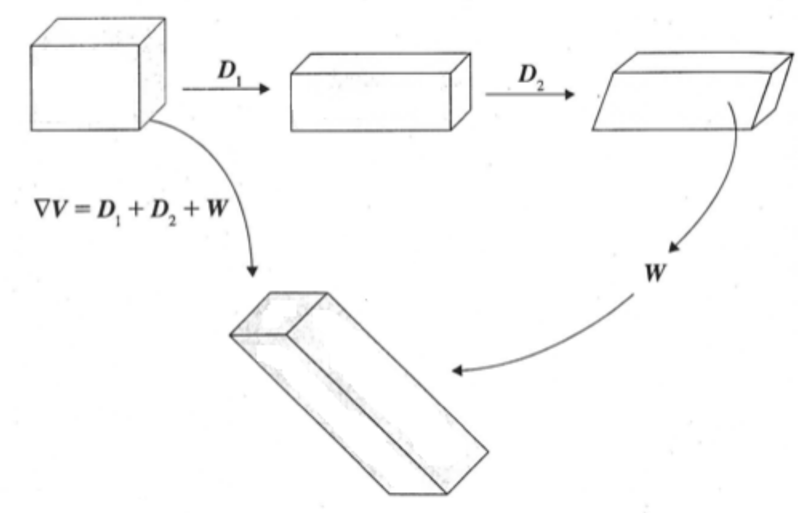
Es decir, $\nabla\mathbf{V} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, donde: $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{D}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{D}_2$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u_x & 0 & 0 \\ 0 & 2v_y & 0 \\ 0 & 0 & 2w_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & v_x + u_y & w_x + u_z \\ v_x + u_y & 0 & w_y + v_z \\ w_x + u_z & w_y + v_z & 0 \end{pmatrix}$$

El tensor $\mathbf{D}$ recibe el nombre de tensor de rapidez de deformaciones y significa un alargamiento a lo largo de las direcciones principales dado por $u_x + v_y + w_z = div\mathbf{V}$ y una deformación angular simétrica dada por los términos $u_y + v_x$, $u_z + w_x$ y $v_z + w_y$; y el tensor $\mathbf{W}$, que es un tensor de rotaciones en direcciones perpendiculares a $\nabla\mathbf{V}$ dado por $\nabla(\nabla\mathbf{V})$ y que no provoca deformaciones sino giros.

Por ejemplo, la deformación de un cubo bajo un tensor rapidez de deformación $\nabla\mathbf{V}$ podría representarse esquemáticamente:

Figura 5.4.



En mecánica de medios continuos, la relación que existe entre el tensor de esfuerzos $\mathbf{T}$ y el tensor de deformación (para un sólido elástico) o el tensor rapidez de deformaciones (para un fluido), recibe el nombre de *ecuación constitutiva.* Por ejemplo:

Para un sólido elástico,

- *Ley de Hooke*; $\mathbf{T} = \mathrm{E}\boldsymbol{\gamma}$

  donde $\boldsymbol{\gamma}$ es el tensor de deformación.
  y E es la constante de proporcionalidad ó modulo de Young.

- *Ley de viscosidad de Newton*; $\mathbf{T} = \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}$

  donde $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathbf{D}$ es el tensor rapidez de deformaciones y μ es la viscosidad del fluido.

En resumen:

- El **gradiente** de un **campo escalar** es un **vector**.
  El **gradiente** de un **campo vectorial** es un **tensor de segundo orden**.
  El **gradiente** de un **tensor de segundo orden** es un **tensor de tercer orden**.

- La **divergencia** de un **campo escalar** es **siempre nula**.
  La **divergencia** de un **campo vectorial** es un **escalar**.
  La **divergencia** de un **tensor de segundo orden** es un **vector**.

- El **rotacional** de un **campo escalar** es **siempre cero**.
  El **rotacional** de un **campo vectorial** es un **vector**.
  El **rotacional** de un **campo tensorial** es un **tensor del mismo orden**.

- El **laplaciano** de un **campo escalar** es un **escalar**.
  El **laplaciano** de un **campo vectorial** es un **vector**.

Algunas identidades vectoriales:

1. $\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla (cf) = c\nabla f$
3. $\nabla (fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(g\nabla\ f + f\nabla g)}{g^2}$ para $g\,(\mathrm{x}) \neq 0$
5. $\nabla \cdot (\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{g}$
6. $\nabla \times (\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \times \mathbf{g}$
7. $\nabla \cdot (f\mathbf{f}) = f\nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla f$
8. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$
9. $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$
10. $\nabla \times (f\mathbf{f}) = f\nabla \times \mathbf{f} + \nabla f \times \mathbf{f}$
11. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
12. $\nabla^2 (fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\,(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
15. $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}\,(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}\,(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\,\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\,\mathbf{g}$
16. $\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$
17. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$

5.8. Coordenadas curvilíneas.

El estudiante de ingeniería acostumbra a entender los conceptos tridimensionales en coordenadas cartesianas rectangulares puesto que esto simplifica el análisis matemático y los conceptos del álgebra vectorial. Desafortunadamente, el mundo no es cúbico y las coordenadas rectangulares no son, en la mayoría de los casos, las más apropiadas para resolver un problema práctico. Por ejemplo, si se trata del flujo en un conducto cilíndrico, se deberán utilizar coordenadas cilíndricas; igualmente, si hay que resolver un problema sobre la superficie de la tierra, las coordenadas más indicadas serán las esféricas. Es decir, la geometría del cuerpo en cuestión, definirá el tipo de coordenadas a emplear. Obviamente a un vector(por ejemplo, la gravedad) no le afecta el sistema de coordenadas en el cual sea analizado y, por lo tanto sus propiedades son independientes del sistema en el cual se represente. Sin embargo, dichas propiedades tendrán que ser expresadas en el sistema apropiado de coordenadas; por consiguiente, el gradiente, la divergencia y el rotacional tienen diferentes representaciones de acuerdo con el sistema de coordenadas empleado para su descripción. A continuación, procederemos a establecer la relación entre los distintos sistemas de coordenadas. Intuitivamente se sabe que cada sistema de coordenadas queda representado por sus vectores unitarios los cuales forman un sistema linealmente independiente. Así, los tres vectores unitarios rectangulares cartesianos, definen un cubo de volumen unitario. Al emplear un sistema curvilíneo, el cubo se transforma en otra forma geométrica de volumen unitario en el sistema empleado (por ejemplo, un cilindro en coordenadas cilíndricas o una esfera en coordenadas esféricas). El volumen unitario en el sistema considerado esta dado por el jacobiano del sistema, el cual tiene que ser distinto de cero para que exista el cambio de coordenadas. Una vez transformados los vectores unitarios de un sistema al otro, todas las propiedades quedarán definidas.

El determinante:

$$\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

se llama el Jacobiano de (u, v, w) con respecto a (x, y, z).

$$J\left[\frac{(u,v,w)}{(x,y,z)}\right] = J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = \frac{\partial\,(u,v,w)}{\partial\,(x,y,z)}$$

Teorema:

Sean las funciones $u = u\,(x, y, z)$, $v = v\,(x, y, z)$ y $w = w\,(x, y, z)$. La condición necesaria y suficiente para que (u, v, w) satisfagan la ecuación funcional $f\,(u, v, w) = 0$ es que el Jacobiano sea distinto de cero en todos los puntos de la región.

Es decir, para que las ecuaciones $u = u\,(x, y, z)$, $v = v\,(x, y, z)$ y $w = w\,(x, y, z)$ se puedan resolver para x, y, z como funciones continuas y derivables de u, v, w es necesario y suficiente que $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w \neq 0$ en la región considerada.

Considérese un cambio de coordenadas de un sistema x, y, z a otro u_1, u_2, u_3 según las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, y, z) \\ u_2 &= u_2(x, y, z) \\ u_3 &= u_3(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

Se supone que el jacobiano $J\left[\dfrac{(u_1, u_2, u_3)}{(x, y, z)}\right] \neq 0$, por lo que transformación (1) representa una correspondencia uno a uno en la vecindad de un punto. Un punto en el espacio queda determinado cuando x, y, z y, por lo tanto, u_1, u_2, u_3 son conocidas.

Si se considera $u_1(x, y, z) = C_1$, $u_2(x, y, z) = C_2$, $u_3(x, y, z) = C_3$ se obtiene una familia de superficies. A través de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pasaran las tres superficies:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_1(x_0, y_0, z_0) \\ u_2(x, y, z) &= u_2(x_0, y_0, z_0) \\ u_3(x, y, z) &= u_3(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \tag{2}$$

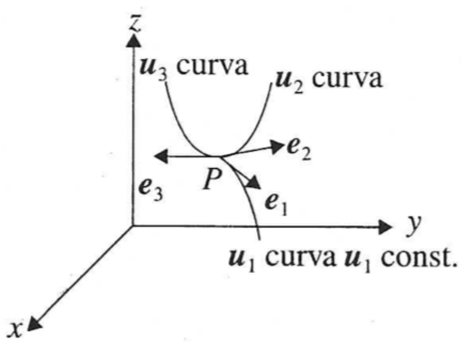


Figura 5.5.

Las superficies se intersecan ortogonalmente con lo que se generan tres curvas en $P_0(x_0, y_0, z_0)$. A la curva de intersección de las superficies $u_1 = C_1$ y $u_2 = C_2$ la llamaremos u_3 y a lo largo de esta curva solo puede cambiar la variable u_3.

Sean $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ y $\mathbf{e}_3$ tres vectores unitarios que salen de P tangentes a las curvas u_1, u_2, u_3 respectivamente.

Entonces ∇u_3 es perpendicular a la superficie $u_3(x, y, z) = u_3(x_0, y_0, z_0)$ de tal manera que ∇u_3 es paralela al vector unitario e_3.

Es decir ,

$$\mathbf{e}_3 = h_3 \nabla u_3 \tag{3}$$

donde h_3 es el valor escalar de proporcionalidad entre $\mathbf{e}_3$ y ∇u_3; h_3 recibe el nombre de factor de escala.

Ahora sea $d\mathbf{r}_3$ un vector tangente a lo largo de la curva $|d\mathbf{r_3}| = ds_3$.

Es obvio que

$$d\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = ds_3$$

$$d\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = d\mathbf{r}_3 \cdot h_3 \nabla u_3 \tag{4}$$

y según la definición de gradiente $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi$, entonces

$$ds_3 = h_3\, du_3 \tag{5}$$

De donde se observa que h_3 es aquella cantidad por la que debe multiplicarse la diferencial de la coordenada du_3 para que resulte la longitud de arco. Por ejemplo, en coordenadas polares $ds = r\, d\theta$ si nos movemos a lo largo de la curva θ, de tal manera que $r = h_2$. Análogamente,

$$\mathbf{e}_1 = h_1 \nabla u_1 \quad \mathbf{e}_2 = h_2 \nabla u_2$$

de tal suerte que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = h_2\, h_3\, \nabla u_2 \times \nabla u_3 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = h_3\, h_1\, \nabla u_3 \times \nabla u_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = h_1\, h_2\, \nabla u_1 \times \nabla u_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces:

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = (h_1\, h_2\, h_3)^{-1} \tag{7}$$

Obsérvese que la diferencial de volumen esta dada por

$$dV = ds_1\, ds_2\, ds_3 = h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3$$

Utilizando (7) y la definición del jacobiano, se tiene

$$dV = J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) du_1\, du_2\, du_3 \tag{8}$$

Nótese que:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right) = 1$$

es decir:

$$J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right) = \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

y entonces:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y}{\partial u_2} & \dfrac{\partial y}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u_1} & \dfrac{\partial z}{\partial u_2} & \dfrac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

forman un sistema ortogonal.

5.8.1. Coordenadas cilíndricas.

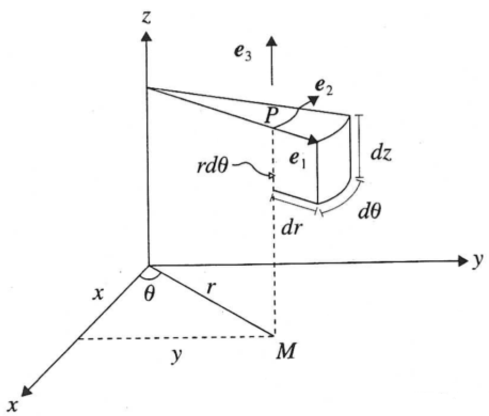


Figura 5.6.

M : proyección de $P(x, y, z)$ en el plano xy de coordenadas (r, θ, z)
la variable: $u_1 = r$ $u_2 = \theta$ $u_3 = z$ son las coordenadas cilíndricas de P.

Las ecuaciones de transformación son,

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

Las superficies coordenadas $r = cte.$ $\theta = cte.$ $z = cte.$ son cilindros de eje OZ, planos que pasan por OZ y planos perpendiculares a OZ. Las superficies se cortan en ángulos rectos y las coordenadas son ortogonales. Los vectores unitarios e_1 $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ se indican en la figura.

Los elementos de arco son; $ds_1 = dr$ $ds_2 = r\,d\theta$ $ds_3 = z$

Las cantidades h_1 h_2 h_3 son entonces; $h_1 = 1$ $h_2 = r$ $h_3 = 1$

y el elemento de volumen es; $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

5.8.2. Coordenadas esféricas.

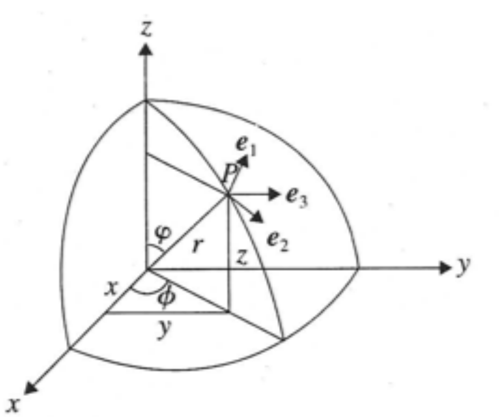


Figura 5.7.

r - distancia OP al origen.
θ - formado por OP y el eje $z'z$
ϕ - formado en el plano XY por el plano XZ y el plano OPZ.

Las ecuaciones de transformación son,

$$x = r\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi$$
$$y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi$$
$$z = r\,\cos\phi$$

Las superficies son esferas concéntricas de centro O con radios $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Planos meridianos que pasan por el eje $z'z$ para valores diversos de ϕ . Conos de revolución de eje Z correspondientes a diversos valores de θ.

Sean $\quad u_1 = r \quad u_2 = \theta \quad u_3 = \phi$

Elementos de arco: $\; ds_1 = dr \quad ds_2 = r\,d\theta \quad ds_3 = r\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi$

Luego, $\; h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\,\operatorname{sen}\phi$

Elementos de volumen: $\quad dV = r^2\,\operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$

5.8.3. Operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas.

Dado $f = f(u_1, u_2, u_3)$, obtener

1. ***El gradiente:***

   Si
   $$\nabla u_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \quad \nabla u_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \quad \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}$$
   y como:
   $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\nabla u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\nabla u_3$$
   $$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$
   Lo anterior se puede representar de la siguiente manera:

   a) En *coordenadas cilíndricas*: $\; h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$
   $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$$
   b) En coordenadas esféricas: $\; h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\,\operatorname{sen}\phi$
   $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\,\operatorname{sen}\phi}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$$

2. ***La divergencia:***

   $$\mathbf{F} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$$
   $$\mathbf{F} = f_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 + f_2 h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 + f_3 h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$
   Entonces,
   $$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{f} &= \nabla\left(f_1\,h_2\,h_3\right)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 + f_1\,h_2\,h_3\nabla\cdot\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)\\ &+ \nabla\left(f_2\,h_3\,h_1\right)\cdot\nabla u_3\times\nabla u_1 + f_2\,h_3\,h_1\nabla\cdot\left(\nabla u_3\times\nabla u_1\right)\\ &+ \nabla\left(f_3\,h_1\,h_2\right)\cdot\nabla u_1\times\nabla u_2 + f_3\,h_1\,h_2\nabla\cdot\left(\nabla u_1\times\nabla u_2\right)\end{aligned}$$

ahora:

$$\nabla\left(f_1\, h_2\, h_3\right)\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3=\frac{\partial\left(f_1\, h_2\, h_3\right)}{\partial u_1}\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3$$

y:

$$\nabla\cdot\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)=0$$

Finalmente:

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\left[\frac{\partial\left(h_2\, h_3\, f_1\right)}{\partial u_1}+\frac{\partial\left(h_3\, h_1\, f_2\right)}{\partial u_2}+\frac{\partial\left(h_1\, h_2\, f_3\right)}{\partial u_3}\right]$$

3. ***El Laplaciano:***

   Se calcula como sigue, $\partial f=\nabla\cdot\nabla f$

   Cuando se aplica la forma anterior al vector ∇f dado por

$$\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

   se obtiene

$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

4. ***El Rotacional:***

   Sea

$$\mathbf{F}=f_1\,\mathbf{u}_1+f_2\,\mathbf{u}_2+f_3\,\mathbf{u}_3=f_1\,h_1\,\nabla u_1+f_2\,h_2\nabla u_2+f_3\,h_3\,\nabla u_3$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\nabla\left(f_1\,h_1\right)\times\nabla u_1+\nabla\left(f_2\,h_2\right)\times\nabla u_2+\nabla\left(f_3\,h_3\right)\times\nabla u_3$$

   dado que

$$\nabla\times\left(\nabla u_1\right)=\nabla\times\left(\nabla u_2\right)=\nabla\times\left(\nabla u_3\right)=0$$

   Ahora:

$$\nabla\,\left(f_1\,h_1\right)\times\nabla u_1=\frac{\partial\left(f_1\,h_1\right)}{\partial u_1}\nabla u_1\times\nabla u_1+\frac{\partial\left(f_1\,h_1\right)}{\partial u_2}\nabla u_2\times\nabla u_1+\frac{\partial\left(f_1\,h_1\right)}{\partial u_3}\nabla u_3\times\nabla u_1$$

   igual para $\nabla\left(f_2h_2\right)\times\nabla u_2$, $\nabla\left(f_3h_3\right)\times\nabla u_3$ pero: $\nabla u_2\times\nabla u_1=-\dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}$ etc.

$$\Rightarrow\nabla\times\mathbf{F}=\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3f_3\right)}{\partial u_2}-\frac{\partial\left(h_2f_2\right)}{\partial u_3}\right]+\frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial\left(h_1f_1\right)}{\partial u_3}-\frac{\partial\left(h_3f_3\right)}{\partial u_1}\right]+\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2f_2\right)}{\partial u_1}-\frac{\partial\left(h_1f_1\right)}{\partial u_2}\right]$$

   Como ejercicio para el lector ,obtenga el gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas cilíndricas y esféricas para el campo vectorial **V**.

En resumen.

Dado un cambio de sistemas de coordenadas

$$\begin{array}{rcl} u = u(x,y,z) & & x = x(u,v,w) \\ v = v(x,y,z) & \Leftrightarrow & y = y(u,v,w) \\ w = w(x,y,z) & & z = z(u,v,w) \end{array}$$

El vector de posición de un punto será,

$$\mathbf{r} = u\,\mathbf{e}_u + v\,\mathbf{e}_v + w\,\mathbf{e}_w \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \quad J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

Los factores de escala se calculan como,

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|, \quad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \text{ y } h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$$

Nótese que, en general $h_u \neq h_v \neq h_w \neq 1$.

Los factores de escala multiplicados por los coeficientes diferenciales du, dv, dw dan como resultado las longitudes de arco.

$$ds_u = h_u\,du; \quad ds_v = h_v\,dv; \quad ds_w = h_w\,dw$$

$$dV = h_u\,h_v\,h_w\,du\,dv\,dw$$

Los vectores tangentes a las curvas $u = c$, $v = c$, $w = c$ son:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Los vectores unitarios en el sistema $(u,\, v,\, w)$ son:

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}; \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}; \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Son vectores tangentes en el punto P a las curvas $u = c$, $v = c$, $w = c$.
Si el sistema de coordenadas es ortogonal

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_e \cdot \mathbf{e}_u = 0$$

Otro sistema de vectores unitarios son los *vectores normales* en el punto P a las curvas $u = c$, $v = c$, $w = c$.

Estos son

$$\widehat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{H_u}\nabla u; \quad \widehat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{H_v}\nabla v; \quad \widehat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{H_w}\nabla w$$

donde

$$H_u = |\nabla u|\,, \quad H_v = |\nabla v|\,, \quad H_w = |\nabla w|$$

Si el sistema es ortogonal:

$$\widehat{\mathbf{e}}_u = \mathbf{e}_u; \quad \widehat{\mathbf{e}}_v = \mathbf{e}_v; \quad \widehat{\mathbf{e}}_w = \mathbf{e}_w$$

Es decir,

$$h_u = \frac{1}{H_u}; \quad h_v = \frac{1}{H_v}; \quad h_w = \frac{1}{H_w}$$

$$\mathbf{e}_u = h_u \nabla u; \quad \mathbf{e}_v = h_v \nabla v; \quad \mathbf{e}_w = h_w \nabla w$$

Y el jacobiano:

$$J = \left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) = \nabla u \,\cdot\, \nabla v \times \nabla w = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = H_u\, H_v\, H_w = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}.$$

De igual manera, el jacobiano:

$$J = \left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = h_u\, h_v\, h_w = \frac{1}{H_u\, H_v\, H_w}.$$

De tal suerte que para sistemas ortogonales:

$$J = \left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) J = \left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = 1, \text{ o bien } JJ^{-1} = 1.$$

Sistemas especiales de coordenadas.

1. Cartesianas rectangulares (x, y, z)

$$\begin{aligned} u = x \quad h_u = h_x = 1 \quad \mathbf{e}_u = \mathbf{i} \\ v = y \quad \text{entonces,} \quad h_v = h_y = 1 \quad \Rightarrow \mathbf{e}_v = \mathbf{j} \Rightarrow J = 1 \\ w = z \quad h_w = h_z = 1 \quad \mathbf{e}_w = \mathbf{k} \end{aligned}$$

2. Coordenadas cilíndricas (r, θ, z); $\quad u = r \quad v = \theta \quad w = z$

$$\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u \operatorname{sen} v \\ z &= w \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ v &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ w &= z \end{aligned}$$

Factores de escala y vectores unitarios:

$$h_u,\, h_v,\, h_w; \mathbf{e}_u,\, \mathbf{e}_v,\, \mathbf{e}_w$$

El vector posición es

$$\mathbf{r} = u\cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + w\, \mathbf{k}$$

luego,

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = [\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v]^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = [(u \operatorname{sen} v)^2 + (u \cos v)^2]^{\frac{1}{2}} = u$$

$$h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = 1$$

Los vectores base son,

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos v\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{k}$$

Es obvio que

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_e \cdot \mathbf{e}_u = 0$$

el jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v & u \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u$$

La transformación inversa esta dada por las ecuaciones:

$$u = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$v = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$w = z$$

el jacobiano

$$J = \frac{(x,y,z)}{(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{u}$$

Nótese que

$$J = \frac{(x,y,z)}{(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ \frac{1}{u}\operatorname{sen} v & \frac{1}{u}\cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

De tal suerte que

$$JJ^{-1} = u \cdot \frac{1}{u} = 1$$

Así, los vectores unitarios en ambos sistemas están relacionados por medio de

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \cos v\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} \quad &;& \quad \mathbf{i} = \cos v\,\mathbf{e}_u - \operatorname{sen} v\,\mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_v &= -\operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos v\,\mathbf{j} \quad &;& \quad \mathbf{j} = \operatorname{sen} v\,\mathbf{e}_u + \cos v\,\mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_w &= \mathbf{k} \quad &;& \quad \mathbf{k} = \cos v\,\mathbf{e}_w \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_u \\ \mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -\operatorname{sen} v & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -\operatorname{sen} v & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_u \\ \mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_w \end{vmatrix}$$

Nótese que $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ y $\mathbf{e}_w$ cambian de dirección en cada punto.

3. Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad & r &\geq 0 \\ y &= r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad & 0 &\leq \theta \leq 2\phi \\ z &= r\cos\phi \qquad & 0 &\leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\phi = \cos^{-1}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)} = \tan^{-1}\frac{\mathbf{r}}{z}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\mathbf{r} = r\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + r\cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial r}{\partial r}\right|; \quad h_\theta = \left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|; \quad h_\phi = \left|\frac{\partial r}{\partial \phi}\right|$$

Los factores de escala son,

$$h_r = 1; \quad h_\theta = r \operatorname{sen} \phi; \quad h_\phi = r$$

Los vectores base son,

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = -\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial e}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_{r\phi}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{k}$$

El jacobiano

$$J = \frac{(x,y,z)}{(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\ \theta \\ \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \operatorname{sen}\phi$$

Obsérvese que

$$J\,dr\,d\theta d\phi = h_r\,h_\theta\,h_\phi\,dr\,d\theta\,d\phi = r^2\ \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

La transformación de vectores base entre **i**, **j**, **k** y $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ está dada por:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\phi \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & -\operatorname{sen} \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{vmatrix}$$

5.9. Resumen. Capítulo 5. Campos Vectoriales.

Gradiente

Dada una función **escalar** $f(x, y, z)$, su gradiente es el **vector**

$$\nabla f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

donde el **operador diferencial vectorial** ∇ se define, en el caso de coordenadas cartesianas, como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Ahora si $\mathbf{T}$ es un vector unitario en la dirección $d\mathbf{r}$ y $|d\mathbf{r}| = ds$ entonces:

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{T} \cdot \nabla f$$

El cambio de f en cualquier dirección es la protección de ∇f sobre el vector unitario en dicha dirección, es decir, su derivada direccional.

El vector normal unitario a f en un punto P será:

$$\mathbf{N} = \frac{|\nabla f|_P}{|\nabla f|_P}$$

Divergencia

Dado el **campo vectorial** $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$ la divergencia de $\mathbf{F}$ es el **campo escalar**:

$$div\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Rotacional

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$. Se define el rotacional de $\mathbf{F}$ como el **campo vectorial.**

$$f = rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Laplaciano

Sea el **campo escalar** f. Se define el operador laplaciano ∇^2 como la divergencia del gradiente de f.

$$f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \textbf{Operador de Laplace}$$

El gradiente de un campo escalar es un vector.
El gradiente de un campo vectorial es un tensor de segundo orden.
El gradiente de un tensor de segundo orden es un tensor de tercer orden, etcétera.

La divergencia de un campo escalar es siempre nula.
La divergencia de un campo vectorial es un escalar.
La divergencia de un tensor de segundo orden es un vector.

El rotacional de un campo escalar es siempre cero.
El rotacional de un campo vectorial es un vector.
El rotacional de un campo tensorial es un tensor del mismo orden.

El laplaciano de un campo escalar es un escalar.
El laplaciano de un campo vectorial es un vector.

Resumen de coordenadas curvilíneas.

Dado dos sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z) & \qquad x &= x(u,v,w) \\ v &= v(x,y,z) & \qquad y &= y(u,v,w) \\ w &= w(x,y,z) & \qquad z &= z(u,v,w) \end{aligned}$$

El vector posición de un punto será

$$\mathbf{r} = u\,\mathbf{e}_u + v\,\mathbf{e}_v + w\,\mathbf{e}_w \qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Para que exista una transformación de coordenadas entre los dos sistemas, el jacobiano del sistema

$$J = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \quad o \quad J = \frac{\partial(x,y,z)}{(u,v,w)}$$

debe ser distinto de cero.

Los factores de escala son

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|; \quad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|; \quad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|;$$

Nótese que en general $h_u \neq h_v \neq h_w \neq 1$.

Los factores de escala multiplicados por los coeficientes diferenciales du, dv, dw dan como resultado las longitudes de arco.

$$ds_u = h_u\,du; \quad ds_v = h_v\,dv; \quad ds_w = h_w\,dw$$

y la diferencia del volumen.

$$dV = h_u\,h_v\,h_w\,du\,dv\,dw$$

Los vectores tangentes a las curvas $u = cte$, $v = cte$, $w = cte$ son:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Los vectores unitarios en el sistema (u, v, w) son:

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}; \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}; \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Son vectores tangentes en el punto P a las curvas $u = c$, $v = c$, $w = c$.

Si el sistema de coordenadas es ortogonal,

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_u = 0$$

Otro sistema de vectores unitarios son los vectores *vectores normales* en el punto P a las curvas $u = c$, $v = c$, $w = c$.

Estos son:

$$\widehat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{H_u}\nabla u; \quad \widehat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{H_v}\nabla v; \quad \widehat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{H_w}\nabla w$$

donde

$$H_u = |\nabla u|\,, \;\; H_v = |\nabla v|\,, \;\; H_w = |\nabla w|$$

Si el sistema es ortogonal:

$$\widehat{\mathbf{e}}_u = \mathbf{e}_u; \quad \widehat{\mathbf{e}}_v = \mathbf{e}_v; \quad \widehat{\mathbf{e}}_w = \mathbf{e}_w$$

Es decir,

$$h_u = \frac{1}{H_u}; \quad h_v = \frac{1}{H_v}; \quad h_w = \frac{1}{H_w}$$

$$\mathbf{e}_u = h_u \nabla u; \quad \mathbf{e}_v = h_v \nabla v; \quad \mathbf{e}_w = h_w \nabla w$$

Y el jacobiano:

$$J = \left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) = \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = H_u\, H_v\, H_w = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}.$$

De igual manera, el jacobiano:

$$J = \left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = h_u\, h_v\, h_w = \frac{1}{H_u\, H_v\, H_w}.$$

De tal suerte que para sistemas ortogonales:

$$J = \left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) J = \left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = 1, \;\text{ o bien } JJ^{-1} = 1.$$

Operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas.

1. **Gradiente**

   De:
   $$\nabla u_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \quad \nabla u_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \quad \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}$$
   y como:
   $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\nabla u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\nabla u_3$$
   $$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

2. **Divergencia**

   Dado el campo
   $$\mathbf{F} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$$
   $$\mathbf{F} = f_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 + f_2 h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 + f_3 h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$
   Su divergencia es:
   $$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial\left(h_2 h_3 f_1\right)}{\partial u_1} + \frac{\partial\left(h_3 h_1 f_2\right)}{\partial u_2} + \frac{\partial\left(h_1 h_2 f_3\right)}{\partial u_3}\right]$$

3. **Laplaciano**

   Aplicando la forma anterior al vector ∇f dado por:
   $$\nabla f = \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial f}{\partial u_1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\,\frac{\partial f}{\partial u_2}\,\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\,\frac{\partial f}{\partial u_3}\,\mathbf{e}_3$$
   obtenemos:
   $$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

4. **Rotacional**

   Dado el campo
   $$\begin{aligned}\mathbf{F} &= f_1\mathbf{u}_1 + f_2\mathbf{u}_2 + f_3\mathbf{u}_3 \\ &= f_1 h_1 \nabla u_1 + f_2 h_2 \nabla u_2 + f_3 h_3 \nabla u_3\end{aligned}$$
   su rotacional será
   $$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3 f_3\right)}{\partial u_2} - \frac{\partial\left(h_2 f_2\right)}{\partial u_3}\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial\left(h_1 f_1\right)}{\partial u_3} - \frac{\partial\left(h_3 f_3\right)}{\partial u_1}\right] \\ + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2 f_2\right)}{\partial u_1} - \frac{\partial\left(h_1 f_1\right)}{\partial u_2}\right]\end{aligned}$$

5.10. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 5.1.

Sean las ecuaciones de transformación $x = u\cos v \operatorname{sen} w$, $y = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w$ $z = u\cos w$ y S la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Determinar el vector normal unitario a S, referido al sistema curvilíneo (u, v, w).

Solución:

Dado que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= u\cos v \operatorname{sen} w \\ y &= u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \\ z &= u\cos w \end{aligned}$$

Corresponden a las ecuaciones de transformación del sistema esférico y la ecuación de la superficie S es la de una esfera con centro en el origen, el vector normal unitario a S corresponde al vector $\mathbf{e}_u$.

Ejercicio 5.2.

Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2z^3 - yx^3)\,\mathbf{i} + (x^3z^2 - y^2)\,\mathbf{j} + (4y + xz^2)\,\mathbf{k}.$$

Calcular el valor de $\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

Solución:

Dado que $\nabla\cdot\mathbf{F}$ corresponde a la divergencia de $\mathbf{F}$ que es un escalar y como $\nabla\times\nabla\phi$ es siempre $\mathbf{0}$, con ϕ escalar, entonces $\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

Desarrollando,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= (x^2z^3 - yx^3)\,\mathbf{i} + (x^3z^2 - y^2)\,\mathbf{j} + (4y + xz^2)\,\mathbf{k}. \\ \nabla\cdot\mathbf{F} &= 2xz^2 - 3x^2y - 2y + 2xz \\ \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) &= (2z^3 - 6xy + 2z)\,\mathbf{i} + (-3x^2 - 2)\,\mathbf{j} + (6x^2 + 2x)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z^3 - 6xy + 2z & -3x^2 - 2 & 6x^2 + 2x \end{vmatrix} \\ &= (0)\,\mathbf{i} + (6z^2 + 2 - 6z^2 - 2)\,\mathbf{j} + (-6x + 6x)\,\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.

Dado el campo vectorial en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{F} = a \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_\rho + 2p \cos \theta \, \mathbf{e}_\theta + 3z \, \mathbf{e}_z.$$

Determinar el valor de a de tal forma que el campo $\mathbf{F}$ sea conservativo.

Solución:

El campo

$$\mathbf{F} = a \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_\rho + 2p \cos \theta \, \mathbf{e}_\theta + 3z \, \mathbf{e}_z.$$

será conservativo si $\mathbf{F} = \nabla \phi$ por tanto, como el gradiente de una función ϕ en coordenadas cilíndricas está dado por la expresión,

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

de modo que igualando la componente a componente y derivando se llega a,

$$4\rho \cos \theta - \frac{\partial a}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta - a \cos \theta = 0$$

$$(4\rho - a) \cos \theta - \frac{\partial a}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\therefore a = 4\rho$$

Otra forma de resolverlos es: el campo $\mathbf{F}$ es conservativo si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ por lo que al calcular $rot \, \mathbf{F}$ se obtiene:

$$\nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a \operatorname{sen} \theta & 2\rho^2 \cos \theta & 3z \end{vmatrix} = \left(4\rho \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (a \operatorname{sen} \theta) \right) \mathbf{e}_z = 0$$

$$4\rho \cos \theta - \frac{\partial a}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta - a \cos \theta = 0$$

$$(4\rho - a) \cos \theta - \frac{\partial a}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\therefore a = 4\rho$$

como las funciones $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$ son linealmente independientes la combinación lineal anterior será nula sólo si,

$$4\rho - a = 0 \qquad \frac{\partial a}{\partial \theta} = 0 \qquad \therefore a = 4\rho$$

Ejercicio 5.4.

Sea el sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z).

1. Obtener los vectores unitarios.
2. Comprobar que el sistema es ortogonal.
3. Verificar que $J^(-1) = 1/J$, siendo J el jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

Solución:

1. Se tiene

$$\mathbf{P} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = (\rho\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

de donde:

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\rho} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}; \qquad \left|\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\rho}\right| = 1$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta} = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \rho\cos\theta\mathbf{j}; \qquad \left|\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta}\right| = \rho$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial z} = \mathbf{k}; \qquad \left|\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial z}\right| = 1$$

Finalmente,

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial\rho}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial\rho}\right|} = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} \qquad \mathbf{e}_\theta = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta}\right|} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial z}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial z}\right|} = \mathbf{k}$$

2. Se comprueba

$$\mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_z = 0 \text{ y el sistema es ortogonal.}$$

3. Por un lado

$$J\left(\frac{x,y,z}{\rho,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$xy = 1 \quad \Rightarrow u = 1 \qquad\qquad xy = 4 \quad \Rightarrow u = 4$$

$$y = 2x, \quad \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow v = 2 \qquad\qquad y = 3x, \quad \frac{y}{x} = 3 \Rightarrow v = 3$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

Ejercicio 5.5.

Una región R del plano xy está limitada por las curvas

$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad y = 2x, \quad y = 3x$$

Determinar la región R' en la cual se modifica R bajo la transformación

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

Solución:
Se tiene

$$xy = 1 \quad \Rightarrow u = 1 \qquad\qquad xy = 4 \quad \Rightarrow u = 4$$

$$y = 2x, \quad \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow v = 2 \qquad\qquad y = 3x, \quad \frac{y}{x} = 3 \Rightarrow v = 3$$

Por tanto, R' está limitada por $u = 1, u = 4, v = 2, v = 3$

Ejercicio 5.6.

Dado el campo conservativo

$$\mathbf{V} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

Determinar si la función potencial del campo es una función armónica; o sea que su laplaciano sea igual a cero.

Solución:
Se tiene

$$\nabla\phi = \mathbf{V} \quad \phi : \text{función potencial}$$

con lo que

$$\begin{aligned} lap\,\phi = \nabla^2\phi = \nabla(\nabla\phi) = \nabla\mathbf{V} \\ = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}x = 0 \\ \Rightarrow \phi \text{ sí es armónica} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.7.

Calcular la derivada direccional de la función vectorial

$$\mathbf{V} = (x^2 - yz^2)\,\mathbf{i} + (xy^2)\,\mathbf{j} + (xyz - 3xz)\,\mathbf{k}$$

En el punto $P(1, 0, 3)$, en la dirección del vector $\mathbf{P_1P_2}$, siendo $P_2(0, 0, 0)$.

Solución:
Se tiene

$$\frac{d\mathbf{V}}{ds} = (\nabla\mathbf{V}) \cdot \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2x & -z^2 & -2yz \\ y^2 & 2yz & 0 \\ (yz - 3z) & xz & (xy - 3x) \end{bmatrix} \frac{\mathbf{P_1P_2}}{|\mathbf{P_1P_2}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.8.

Para el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales,

$$x = 2u + v; \quad y = u - 2v; \quad z = w^2.$$

1. Obtener en el sistema curvilíneo (u, v, w), donde, $f(u, v, w) = uv^2 + w^2$.

2. Expresar$f$ en términos de las coordenadas cartesianas (x, y, z) y calcular su gradiente en dichas coordenadas.

3. Transformar y referir el gradiente obtenido en el inciso b a las coordenadas (u, v, w).

Solución:

1.

$$f(u, v, w) = uv^2 + w^2$$
$$\mathbf{r}(x, y, z) = (2u + v, y = u - 2v, z = w^2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 2w\mathbf{j}$$

como
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0$$

El sistema curvilíneo es ortogonal, donde

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad h_u = \sqrt{5}$$
$$e_v = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \qquad h_v = \sqrt{5}$$
$$e_w = \mathbf{k} \qquad h_w = 2w$$

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{2w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w$$

Así

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{5}}(v^2)\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{5}}(2uv)\mathbf{e}_v + \mathbf{e}_w$$

2. de

$$x = 2u + v; \qquad 2x + y = 5u; \qquad u = \frac{(2x + y)}{5}$$
$$y = u - 2v; \qquad x - 2y = 5v; \qquad v = \frac{(x - 2y)}{5}$$
$$z = w^2; \qquad w = \sqrt{z}$$

Sustituyendo en f.

$$f(x,y,z) = \frac{(2x+y)(x-2y)^2}{125} + z$$

derivando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-2y}{125}(6x-2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-2y}{5}(-7x-6y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\nabla f = \frac{(x-2y)(6x-2y)}{125}\mathbf{i} + \frac{(x-2y)(-7x-6y)}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

3.

$$\frac{(x-2y)(6x-2y)}{125} = \frac{2uv+2v^2}{5}$$
$$\frac{(x-2y)(-7x-6y)}{5} = \frac{v^2-4uv}{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}; \qquad \mathbf{e}_u = \frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}; \qquad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 2w\mathbf{k} \qquad \mathbf{e}_w = \mathbf{k}$$

al cambiar el sistema de referencia se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2uv+2v^2}{5} \\ \frac{v^2-4uv}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v^2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2uv}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\nabla f = \left(\frac{v^2}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{e}_u + \frac{2uv}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_v + \mathbf{e}_w$$

que es igual al resultado obtenido en el inciso a)

Ejercicio 5.9.

Sea S la superficie de ecuación $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

1. Obtener una ecuación vectorial de S.
2. Con la ecuación obtenida en a, obtener una ecuación del plano tangente a S en el punto $P(1, -1, 1)$.

Solución:

$$x^2 + z^2 = 1 + y^2 = r^2 \qquad\qquad r = \sqrt{1+y^2}$$

1.

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad x = \sqrt{1+t^2}\cos\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad y = \sqrt{1+t^2}\operatorname{sen}\theta$$

Entonces

$$\mathbf{r}(t,\theta) = \sqrt{1+t^2}\cos\theta\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \sqrt{1+t^2}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

2. Si $y = -1 \quad \Rightarrow t = -1$

$$x = \sqrt{2}\cos\theta = 1; \quad y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = 1 \quad \Rightarrow \theta = 4$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{t\cos\theta}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{t\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \sqrt{1+t^2}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \sqrt{1+t^2}\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Evaluando para $t = -1$ y $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| = \frac{(-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{(-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = -\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Entonces la ecuación del plano tangente es

$$(x-1) + (y+1) + (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 1$$

Ejercicio 5.10.

El sistema de coordenadas parabólicas está definido por las ecuaciones de transformación,

$$x = uv\cos w \qquad y = uv\,\mathrm{sen}\,w \qquad z = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$$

1. Determinar que este sistema coordenado es ortogonal.
2. Determinar los factores de escala de la transformación.
3. Calcular $J\left(\dfrac{(u,v,w)}{(x,y,z)}\right)$.

Solución:

A partir de $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\cos w\,\mathbf{i} + v\,\mathrm{sen}\,w\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = u\cos w\,\mathbf{i} + u\,\mathrm{sen}\,w\,\mathbf{j} - v\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial w} = uv\,\mathrm{sen}\,w\,\mathbf{i} + uv\cos w\,\mathbf{j}$$

de donde

1. $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

   $$\Rightarrow \text{el sistema es ortogonal}$$

2. $$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = \sqrt{u^2+v^2} \qquad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{u^2+v^2}$$

   $$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = uv$$

3. $$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = h_u h_v h_w = (u^2+v^2)uv$$

   $$\Rightarrow J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \frac{1}{J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,w}\right)} = \frac{1}{(u^2+v^2)uv}$$

Ejercicio 5.11.

El campo vectorial de velocidades de un fluido está dado por

$$\mathbf{u} = 2yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + 2xy\,\mathbf{k}$$

Demostrar que:

1. El fluido es incompresible.
2. El campo es irrotacional.
3. La función potencial de velocidades es armónica.

Solución:

1. $$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x}(2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2xy) = 0 \quad \Rightarrow \text{ Es incompresible}$$

2. $$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = (2x - 2x)\mathbf{i} + (2y - 2y)\mathbf{j} + (2z - 2z)\mathbf{k}$$
$$= 0 \therefore \text{El campo } u \text{ es irrotacional}$$

3. Como u es irrotacional, existe ϕ tal que $u = \nabla\phi$ de donde, el laplaciano de ϕ está dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \nabla \cdot \nabla\phi \\ &= \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= 0 \quad \text{del inciso a, La función es armónica} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.12.

Para la función $f(x, y, z) = \cos x \operatorname{senh} y$

1. Obtener $div(grad(f))$.
2. Determinar si la función f es armónica.

Solución:

$$f(x, y, z) = \cos x \operatorname{senh} y$$

Una función es armónica si $\nabla^2 f = 0$,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos x \operatorname{senh} y + \cos x \operatorname{senh} y = 0$$

$\therefore$ Sí es armónica

Ejercicio 5.13.

Sea la función $f(u,v) = 3u^2e^{-v}$ definida en el sistema de coordenadas dado por,

$$x = u - v$$
$$y = u + v$$

Determinar:

1. ∇f, referido a la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.
2. El laplaciano de f.

Solución:

Sustituyendo en $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, se tiene,

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = |\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2} \qquad h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = |-\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$$

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}); \qquad e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

de donde

1.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(6ue^{-v})\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-3u^2e^{-v})\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\
&= \left(3ue^{-v} + \frac{3}{2}u^2e^{-v}\right)\mathbf{i} + \left(3ue^{-v} - \frac{3}{2}u^2e^{-v}\right)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}[(6e^{-v}) + (3u^2e^{-v})] = 3e^{-v} + \frac{3}{2}u^2e^{-v}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.14.

Sea $\mathbf{G}(x,y,z)$ un campo vectorial tal que $div\mathbf{G} = 0$. Determinar las características del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.

Solución:

Como $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ y $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$

Sustituyendo se llega a $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

Expresión que corresponde a una propiedad que tiene todo campo vectorial $\mathbf{F}$ derivable.

Ejercicio 5.15.

Determinar si la función en coordenadas esféricas $f(\rho,\theta,\phi) = \dfrac{3}{\rho}+2\theta$ es armónica.

Solución:

Una función f es armónica si $\nabla^2 f = 0$ así, en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi \frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right)$$

Para $f(\rho,\theta,\phi) = \dfrac{3}{\rho} + 2\theta$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi \frac{-3}{\rho^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}(2)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi} = 0$$

$\therefore$ por tanto f es armónica.

Ejercicio 5.16.

Sea la función $f(u,v,w) = 2u^2v^3e^v$ definida en el sistema de coordenadas dado por

$$x = u + v \qquad y = u - v \qquad z = w^2$$

1. Demostrar que el sistema de coordenadas (u,v,w) es ortogonal
2. Determinar ∇f, referido a la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$.

Solución:

1. A partir de $r = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + w^2\,\mathbf{k}$ se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}-\mathbf{j} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 2w\,\mathbf{k}$$

con lo que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0 \quad \text{y} \quad (u,v,w) \quad \text{es ortogonal}$$

2. Se tiene

$$h_u = h_v = \sqrt{2} \qquad h_w = 2w$$

de donde $$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{2}}(4uv^3\,\mathbf{e}^v)\,\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{2}}(6u^2v^2\,\mathbf{e}^v)\,\mathbf{e}_v + \frac{1}{2w}(0)\,\mathbf{e}_w$$

Ejercicio 5.17.

Para la transformación

$$x = u - v, \quad y = u + v$$

1. Dibujar la región R' del plano uv en la cual se transforma la región R del plano xy limitada por $y = x+1, y = x-2, y = 2+x, y = -x$.

2. Calcular $J\left|\dfrac{x,y}{u,v}\right|$

3. Determinar, usando el resultado del inciso anterior, el área de la región R.

Solución:

1.

$$\begin{aligned}
y &= x+1 && \rightarrow u+v = u-v+1 \\
y &= x-2 && \rightarrow u+v = u-v-2 \\
y &= 2-x && \rightarrow u+v = 2-u+v \\
y &= -x && \rightarrow u+v = -u+v && \rightarrow u = 0
\end{aligned}$$

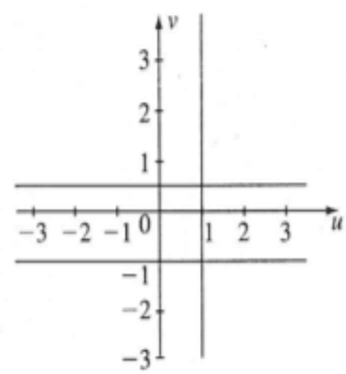


Figura 5.8.

2.

$$J\left|\frac{x,y}{u,v}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

3. Como el jacobiano es constante, la expresión

$$dA = \left|J\left|\frac{x,y}{u,v}\right|\right| dA' \quad \text{puede extenderse a} \qquad A = \left|J\left|\frac{x,y}{u,v}\right|\right| A'$$

asi como

$$A' = (1)\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow A = (2)\frac{3}{2} = 3u^2$$

Ejercicio 5.18.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v), el cual está referido al sistema cartesiano (x, y) por medio de las relaciones:

$$u = -4x + 3y; \quad v = 3x + 4y$$

1. Verificar que el sistema (u, v) sea ortogonal.
2. Calcular los vectores unitarios $\mathbf{e}_u$ y $\mathbf{e}_v$.
3. Calcular los factores de escala h_u y h_v.
4. Calcular $J\left|\frac{(x,y)}{(u,v)}\right|$

Solución: $\nabla u = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad \nabla v = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

1. $\nabla u \cdot \nabla v = -12 + 12 = 0 \quad \therefore$ El sistema es ortogonal.

2. $|\nabla u| = \sqrt{16 + 9} = 5$

   $$\mathbf{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{5}$$

   $$\mathbf{e}_v = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5}$$

3. $h_u = \frac{1}{|\nabla u|} = \frac{1}{5} \quad h_v = \frac{1}{|\nabla v|} = \frac{1}{5}$

4. $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = h_u h_v = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

Ejercicio 5.19.

Demostrar que para un campo vectorial $\mathbf{F}$, la traza de su gradiente es la divergencia de dicho campo. **Nota:** la traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal principal.

Solución:

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$

Como,

$$\nabla\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$Tr(\nabla\mathbf{F}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = div\,\mathbf{F}$$

Ejercicio 5.20.

Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\nabla^2 \ln |\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Solución:

Coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \left(\rho^2 \operatorname{sen} \phi \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right)$$

Como $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} &= |\mathbf{r}|^2 = \rho^2 \\ \ln |\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}| &= \ln(\rho^2) = 2 \ln \rho \\ \nabla^2 \ln |\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}| &= 2\nabla^2 \ln \rho = \frac{2}{\rho^2 \operatorname{sen} \phi} (\operatorname{sen} \phi + 0 + 0) \\ \nabla^2 \ln |\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}| &= \frac{2}{\rho^2} = \frac{2}{|\mathbf{r}|^2} \\ \nabla^2 \ln |\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}| &= \frac{2}{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.21.

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = x^3y^2\mathbf{i} + y^3z^2\mathbf{j} + z^3x^2\mathbf{k}$, verificar la validez de la expresión

$$rot(rot\mathbf{F}) = grad(div\mathbf{F})\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$$

Solución:

$$\mathbf{F} = x^3y^2\,\mathbf{i} + y^3z^2\,\mathbf{j} + z^3x^2\,\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3y^2 & y^3z^2 & z^3x^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= (-2x^3 + 6xz^2)\,\mathbf{i} + (-2y^3 + 6x^2y)\,\mathbf{j} + (-2z^3 + 6y^2z)\,\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= (3x^2y^2) + (3y^2z^2) + (3x^2z^2) \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) &= (6xy^2 + 6xz^2)\,\mathbf{i} + (6x^2y + 6yz^2)\,\mathbf{j} + (6y^2z + 6x^2z)\,\mathbf{k} \\ \nabla^2\mathbf{F} &= (6xy^2 + 2x^3)\,\mathbf{i} + (6yz^2 + 2y^3)\,\mathbf{j} + (2z^3 + 6x^2)\,\mathbf{k} \\ (\nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2\,\mathbf{F}) &= (6xz^2 - 2x^3)\,\mathbf{i} + (6x^2y - 2y^3)\,\mathbf{j} + (6y^2z - 2z^3)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Por tanto se verifica la expresión,

$$rot(rot\mathbf{F}) = grad(div\mathbf{F})\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$$

Ejercicio 5.22.

Sea la función $f(x, y, z) = \dfrac{z}{(2x^2 + 2y^2)} + \ln(x^2) + e^{-z}$

1. Obtener f en función de las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)
2. Obtener ∇f en coordenadas cilíndricas.

Solución:

$$f(x, y, z) = \frac{z}{(2x^2 + 2y^2)} + \ln(x^2) + e^{-z}$$

de las ecuaciones de transformación;

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

1.

$$f(\rho, \theta, z) = \frac{z}{2\rho^2} + 2\ln\rho + \mathbf{e}^{-z}$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
&= \left(-\frac{z}{\rho^3} + \frac{2}{\rho}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(-\frac{2}{\rho}\tan\theta\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{2\rho^2} - e^{-z}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.23.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v), cuyas ecuaciones de transformación son:

$$u = -3x - y \qquad v = x - 3y$$

1. Determinar si el sistema curvilíneo (u, v) es ortogonal.
2. Dibujar la región R' del plano UV en la que se transforma la región R del plano XY limitada por las rectas de ecuaciones:

$$y = 3x \qquad y = 3x - 6 \qquad x = -3y + 18 \qquad x = -3y + 6$$

Solución:

$$\begin{aligned}
u &= -3x - y & v &= x - 3y \\
\nabla u &= -3\mathbf{i} - \mathbf{j} & \nabla v &= \mathbf{i} - 3\mathbf{j}
\end{aligned}$$

$\nabla u \cdot \nabla v = 0$ por tanto el sistema es ortogonal.

$$\begin{aligned}
u + 3v &= -10y & -3u + v &= 10x \\
y &= -\frac{1}{10}u - \frac{3}{13}v & x &= -\frac{3}{10}u + \frac{1}{10}v
\end{aligned}$$

Para $y = 3x$

$$\frac{-u - 3v}{10} = \frac{-9u + 3v}{10}; \qquad v = \frac{4}{3}u$$

Para $y = 3x - 6$

$$\frac{-u - 3v}{10} = \frac{-9u + 3v}{10} - 6$$

$$-u - 3v = -9u + 3v - 6; \qquad v = \frac{4}{3}u$$

Para $x = -3y + 18$

$$\frac{-3u + v}{10} = \frac{3u + 9v}{10} + 18$$

$$-3u + v = 3u + 9v + 180 \qquad v = -\frac{3}{4} - \frac{45}{2}$$

Para $x = -3y + 6$

$$\frac{-3u + v}{10} = \frac{3u + 9v}{10} + 6$$

$$-3u + v = 3u + 9v + 60 \qquad v = -\frac{3}{4}u - \frac{15}{2}$$

La grafica de la región R' es

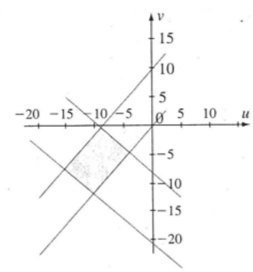


Figura 5.9.

Ejercicio 5.24.

Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = ayz\,\mathbf{i} + bxz\,\mathbf{j} + cxy\,\mathbf{k}$ donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Determinar los valores de a, b, c tales que el campo F sea solenoidal e irrotacional.

Solución:

F es solenoidal si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(ayz) + \frac{\partial}{\partial y}(bxz) + \frac{\partial}{\partial z}(cxy) = 0$$

Entonces F es solenoidal para todo a, b, c.

Por otra parte, F es irrotacional si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ayz & bxz & cxy \end{vmatrix} = (cx - bx)\mathbf{i} + (ay - cy)\mathbf{j} + (bz - az)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

de donde se obtiene

$$c = b \qquad a = c \qquad b = a$$

$$\therefore \mathbf{F} \text{ es solenoidal e irrotacional si } a = b = c.$$

Ejercicio 5.25.

Para el campo vectorial

$$U = (xy\cos xy + z^2)\,\mathbf{i} + (x^2\cos xy - 4)\,\mathbf{j} + (2xz + 2)\,\mathbf{k}$$

1. Obtener su divergencia y su rotacional.
2. Si U es irrotacional, obtener su respectiva función potencial $\phi(x, y, z)$.

Solución:

1.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{U} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy\cos xy + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos xy - 4) + \frac{\partial}{\partial z}(2xz + 2)\\ &= -xy^2\operatorname{sen} xy + y\cos xy - x^3\operatorname{sen} xy + 2x\\ \nabla\times\mathbf{U} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (xy\cos xy + z^2) & (x^2\cos xy - 4) & (2xz + 2)\end{vmatrix}\\ &= (2z - 2z)\mathbf{j} + (-x^2y\operatorname{sen} xy + 2x\cos xy + x^2y\operatorname{sen} xy - x\cos xy)\mathbf{k}\\ &= (x\cos xy)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}\end{aligned}$$

2. El campo no es irrotacional $\nabla\times\mathbf{U}\neq 0$, por lo tanto *No existe Función Potencial*.

Ejercicio 5.26.

Para el campo vectorial $\mathbf{U} = (2x\cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2\operatorname{sen} y + z^2)\mathbf{j} + 2(1 - xy)\mathbf{k}$

1. Obtener su divergencia y su rotacional.
2. Si $\mathbf{U}$ es irrotacional, obtener su respectiva función potencial $\phi(x, y, z)$, tal que $\phi(0, \pi, 1) = 5 - \pi$.

Solución :

1.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{U} &= 2\cos y - x^2\cos y\\ \nabla\times\mathbf{U} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

2. Ahora $\nabla\phi$ será:

$$\begin{aligned}&\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2x\cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2\operatorname{sen} y + z^2)\mathbf{j} + 2(1 - zy)\mathbf{k}\\ &\therefore \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x\cos y - 3 \Rightarrow \phi = \int(2x\cos y - 3)dx = x^2\cos y - 3x + C_1(y, z)\\ &\frac{\partial\phi}{\partial x} = -x^2\operatorname{sen} y - z^2 \Rightarrow \phi = \int(-x^2\operatorname{sen} y - z^2)dy = -x^2\cos y - z^2y + C_2(x, z)\\ &\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2(1 - zy) \Rightarrow \phi = \int(2(1 - zy))dx = 2z + yz^2 + C_3(x, y)\end{aligned}$$

Ejercicio 5.27.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v), cuyas ecuaciones de transformación son:

$$u = x + 3y \qquad\qquad v = -3x + y$$

1. Determinar si el sistema curvilíneo (u, v) es ortogonal.
2. Determinar la región R' del plano UV en la que se transforma la región R del plano xy limitada por las rectas de ecuaciones:

$$y = -3x; \qquad y = -3x - 8; \qquad x = 3y + 9; \qquad x = 3y - 3$$

Solución:

1.

$$u = x + 3y \qquad\qquad v = -3x + y$$
$$\nabla u = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \qquad\qquad \nabla v = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla u \cdot \nabla v = (-3 + 3) = 0$$
$$\therefore \text{El sistema es ortogonal}$$

2.

$$3u + v = -10y; \qquad\qquad y = \frac{3}{10}u + \frac{1}{10}v$$
$$u - 3v = 10x; \qquad\qquad x = \frac{1}{10}u - \frac{3}{10}v$$

Para $y = -3x$

$$\frac{(3u+v)}{10} = \frac{(-3u+9v)}{10}$$
$$v = \frac{4}{3}u$$

Para $y = -3x - 8$

$$\frac{(3u+v)}{10} = \frac{(-3u+9v)}{10} - 8$$
$$3u + v = -3u + 9v - 80$$
$$-8v = -6u - 80$$
$$v = \frac{3}{4}u + 10$$

Para $x = 3y + 9$

$$\frac{(u-3v)}{10} = \frac{(9u+3v)}{10} + 9$$
$$u - 3v = 9u + 3v + 90$$
$$-6v = 8u - 90$$
$$v = -\frac{4}{3}u - 15$$

Para $x = 3y - 3$

$$\begin{aligned}\frac{(u-3v)}{10} &= \frac{(9u-3v)}{10} - 3\\ -6v &= 8u - 30\\ v &= -\frac{4}{3}u + 5\end{aligned}$$

Ejercicio 5.28.

Sea la función $f(\rho,\theta) = 2\rho^2 + 2\rho^2\cos^2\theta$ en donde (ρ,θ) son las coordenadas polares.

1. Obtener ∇f referido a la base $(\mathbf{i},\mathbf{j})$.

2. Determinar el laplaciano de f.

Solución:

1. Se sabe que

$$\nabla f = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

de donde

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{1}(4\rho + 4\rho\cos^2\theta)(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) + \frac{1}{\rho}(-4\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)(-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\\ &= (4\rho\cos\theta + 4\rho\cos^3\theta + 4\rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)\mathbf{i}\\ &+ (4\rho\operatorname{sen}\theta + 4\rho\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - 4\rho\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)\mathbf{j}\\ &= (8\rho\cos\theta)\mathbf{i} + (4\rho\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

2. Se sabe que

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_\rho h_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h_\theta}{h_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_\rho}{h_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$$

de donde

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\rho(4\rho + 4\rho\cos^2\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho}(-4\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\left[8\rho + 8\rho\cos^2\theta - 4\rho(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\right] = 12\end{aligned}$$

Ejercicio 5.29.

Sea la función $f(\rho,\theta) = \rho^2(1+\cos^2\theta)$ en donde (ρ,θ) son las coordenadas polares.

1. Obtener ∇f referido a la base $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$.
2. Determinar el laplaciano de f.

Solución:

1.

$$\nabla f = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \Rightarrow h_p = 1 \quad h_\theta = \rho$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

2.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_\rho h_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{h_\theta}{h_\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_\rho}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right]$$

o bien, desarrollando $\quad \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Ahora , calculando para $f(\rho,\theta) = \rho^2(1+\cos^2\theta)$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 2\rho(1+\cos^2\theta) \qquad\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} = 2(1+\cos^2\theta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = 2(1+\cos^2\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2\rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 2\rho^2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)$$

Sustituyendo

$$\nabla f = 2\rho(1+\cos^2\theta)\mathbf{e}_\rho - 2\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla^2 f = 2 + 2 + 2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\nabla^2 f = 6$$

Ejercicio 5.30.

Dado el campo vectorial $U = (xy^2z)\mathbf{i} + (\alpha x - 2y)\mathbf{j} + (-2x + y)\mathbf{k}$ determinar el valor de α para el cual la variación de U, en el punto $P(-1, 1, 0)$ y en la dirección del vector $a = (1, 2, 0)$, es nula.

Solución:

El grad $\mathbf{U}$ es un tensor de 2o orden:

$$\nabla\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\mathbf{U}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\mathbf{U}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\mathbf{U}_3}{\partial x} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_3}{\partial y} & \dfrac{\partial\mathbf{U}_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zy^2 & 2xyz & xy^2 \\ \alpha & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al evaluar en el punto $P(-1, 1, 0)$

$$\nabla\mathbf{U}|_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En la dirección de $a = (1, 2, 0)$.

$$\nabla\mathbf{U}|_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ \alpha - 4 &= 0 \qquad\qquad \Rightarrow \alpha = 4 \\ -\alpha + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Capítulo 6

Integrales de Línea.

En esta sección, se estudia la forma en que un campo vectorial actúa sobre una trayectoria en el espacio. Para ello, se introduce el concepto de integral de línea. Ya se ha visto que una trayectoria queda definida fácilmente en forma vectorial; de tal suerte que la acción de un campo vectorial sobre ella puede ser evaluada de inmediato. Más adelante, se extenderá el concepto para superficies y volúmenes. Por lo pronto es importante observar que la forma en que un campo vectorial actúe sobre una trayectoria, dependerá en gran parte de las características de dicho campo. Así, veremos que existen ciertos campos vectoriales llamados conservativos, los cuales poseen características las cuales los hacen mucho más simples de analizar cuando actúan sobre una trayectoria. No todos los campos vectoriales son conservativos, pero, afortunadamente para los ingenieros, muchos de los campos comúnmente utilizados si lo son. Los campos conservativos son aquellos cuyo rotacional es nulo. Esto implica que la diferencial total de dichos campos es una diferencial exacta. Entonces, la integral de dichos campos entre dos puntos de una trayectoria solo depende de los valores en dichos puntos y no de la trayectoria seguida durante la integración. Un ejemplo sencillo pero ilustrativo de dicho tipo de campo es el campo gravitacional, el cual actúa en dirección perpendicular a la superficie terrestre; obviamente al tener una sola componente vectorial, dicho campo es irrotacional y por lo tanto conservativo. Es decir, la gravedad depende exclusivamente de la altura sobre un nivel cero (por ejemplo el nivel del mar). La fuerza de la gravedad al actuar sobre una superficie, provoca sobre esta última una presión, la cual dependerá exclusivamente de la altura medida verticalmente y será constante en superficies que se encuentren a la misma altura (superficies equipotenciales o, en este caso particular, isobáricas). Así, el trabajo necesario (fuerza por distancia) para trasladar una partícula desde el nivel del mar hasta una altura establecida, será el mismo independientemente del lugar en el globo terrestre donde se efectúe el experimento. El trabajo neto para levantar un piano desde el piso 2 al piso 3 de un edificio, será el mismo si lo levantamos con una cuerda por fuera que si lo subimos por las escaleras. Afortunadamente en las aplicaciones ingenieriles, la mayoría de los campos vectoriales que se encuentran son conservativos. No obstante, los campos rotacionales o no conservativos, también serán estudiados en esta sección.

6.1. Integrales de Línea.

Sea $\mathbf{F}$ un espacio vectorial y $\mathbf{c}$ una trayectoria diferenciable en el intervalo $[a, b]$. La integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{c}$ es:

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

ó bien, la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ *en* $a \leq t \leq b$ es:

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

Ejemplo 6.1.1.

Sea $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Solución:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\operatorname{sen} t, \cos t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}'(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t + t = t$$

$$\Rightarrow \quad \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2$$

Ejemplo 6.1.2.

Demostrar que si $\mathbf{f} = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$

$$\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_c f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

Solución:

Puesto que $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$$\Rightarrow \quad \int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_c f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

Ejemplo 6.1.3.

Si $\mathbf{f} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$. Encontrar $\displaystyle\int_c \mathbf{f} \times d\mathbf{r}$

Solución:

$$\mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (f_2 dz - f_3 dy)\,\mathbf{i} + (f_3 dx - f_1 dz)\,\mathbf{j} + (f_1 dy - f_2 dx)\,\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \int_c \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_c (f_2 dz - f_3 dy) + \mathbf{j}\int_c (f_3 dx - f_1 dz) + \ \mathbf{k}\int_c (f_1 dy - f_2 dx)$$

Ejemplo 6.1.4.

Evaluar la integral

$$\int_c \cos 7\,dx + e^x dy + e^y dz$$

donde $\mathbf{c}\,(t) = (1, t, e^t)$ para $0 \leq t \leq 2$.

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 1 \qquad \frac{dz}{dt} = e^t$$

$$\Rightarrow \int_c \cos 7\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz = \int_0^2 \left(0 + e + e^{2t}\right) dt = \left[et - \frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4$$

Ejemplo 6.1.5.

Evaluar

$$\int_c x^2 dx + xy\,dy + dz$$

donde $\mathbf{c} : [0,1] \to R^3$ esta dada por $\mathbf{c}\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)) = \left(t, t^2, 1\right)$

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_c x^2\,dx + xy\,dy + dz = \int_0^1 \left\{[x\,(t)]^2\,\frac{dx}{dt} + \left[x\,(t)\,y\,(t)\,\frac{dy}{dt}\right]\right\} dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 + 2t^4\right) dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5\bigg]_0^1 = \frac{11}{15}$$

6.2. La Diferencial Exacta $\mathbf{P}\,\mathbf{dx} + \mathbf{Q}\,\mathbf{dy}$.

Sean las funciones diferenciables:

$$P = P(x, y) \quad \text{y} \quad Q = Q(x, y)$$

Definición.

La expresión $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta, si y solo sí existe $u = u(x, y)$

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

es decir, $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta, si y solamente sí existe la función F que la tiene por diferencial total.

Teorema.

La expresión $P\,dx + Q\,dy$ es diferencial exacta, si y solo sí:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ son continuas y, además, } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Demostración.

1. *Condición necesaria.*

   Supongamos que $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta, existe necesariamente:

   $$u = u(x, y)$$

   tal que:

   $$du = u_x dx + u_y dy = P\,dx + Q\,dy$$

   puesto que los incrementos dx y dy son independientes, hagamos $dy = 0$ entonces obtenemos:

   $$u_x = P$$

   análogamente si: $dx = 0$,

   $$u_y = Q$$

   Al derivar con respecto a y y a x, se tiene

   $$u_{yx} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{y} \quad u_{xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

   pero por hipótesis:

   $$\frac{\partial P}{\partial y} \text{y} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{son continuas}$$

   por tanto también lo son u_{yx} y u_{xy}

   Por el teorema de Schwarz:

   $$u_{xy} = u_{yx}$$

2. *Condición suficiente.*

Encontremos la condición que garantiza que $P\,dx + Q\,dy$ es diferencial exacta; esto es, si la condición se cumple, entonces existe $u = u(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2}$$

para ello, se integra respecto a x (1), se tiene:

$$u = \int P(x, y)\,dx + v(y)$$

pues en la integración y se ha mantenido constante. debe tenerse:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + v'(y) = Q(x, y) \tag{3}$$

para que $P\,dx + Q\,dy$ sea diferencial exacta. entonces:

$$v'(y) = Q(x, y) \to \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx \tag{4}$$

Como $v'(y)$ es función sólo de y, el segundo miembro también lo será, por tanto , si derivamos parcialmente con respecto a x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x \partial y}\int P(x, y)dx$$

puesto que existen u_x, u_y y u_{xy}, u_{yz} y son continuas , se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)dx\right)$$

es decir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{5}$$

Ahora bien, si se cumple (5), se verifica (3) y por tanto, se cumplen (1) y (2), es decir; $Pdx + Qdy$ es diferencial exacta.

Al integrar la ecuación (4) se tiene:

$$u = \int P(x, y)dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\right] dy + c$$

Es la función que tiene por diferencial total a $P\,dx + Q\,dy$ si es dada una función $u = u(x, y)$, su diferencial total, resulta una diferencial exacta.

Ahora, el problema inverso es el más interesante y consiste en lo siguiente: dada la diferencial exacta $P\,dx + Q\,dy$ hallar la función tal que sea igual a la diferencial total. Esta función ha sido obtenida en la condición suficiente del teorema anterior y , por tanto, el método que debe seguirse está dado en tal razonamiento. Entonces para integrar la diferencial exacta $P\,dx + Q\,dy$ se procede como sigue:

a) Se verifica si la expresión dada es diferencial exacta utilizando la ecuación (5).

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

b) Se considera una función $u = u(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \text{que son las ecuaciones(1) y (2)}$$

c) Se integra (1) con respecto a x sin olvidar la constante de integración. que en este caso sólo es función de y.

d) Se calcula la parcial con respecto a y de la última expresión e iguálese con $q(x, y)$

e) Se despeja la derivada la derivada la función arbitraria de integración e intégrese con respecto a y para obtener la función en cuestión, que permite completar la expresión de u.

Ejemplo 6.2.1.

Investigar si

$$\left(y + \frac{1}{x}\right)\,dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)\,dy$$

es diferencial exacta y, en caso afirmativo, llevar a cabo la investigación.

Solución:

1. Se calcula
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
y por lo tanto, la expresión es diferencial exacta.

2. Sea $u = u(x, y)$, tal que
$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x} \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{1}{y} \tag{2}$$

3. Se integra parcialmente la expresión (1) con respecto a x y se obtiene
$$u = xy + \ln x + v(y)$$

4. Se calcula
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + v'(y)$$
$$x + v'(y) = x + \frac{1}{y} \Rightarrow v'(y) = \frac{1}{y}; v(y) = \ln y + c$$

5. Por ultimo,
$$u = xy + \ln x + \ln y + c = xy + \ln xy + c$$

Comprobación

$$du = \left(y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy$$

Se procede como sigue

1. Se integra la función (2) parcialmente con respecto a y
$$u = xy + \ln y + v(y)$$

2. Se calcula $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + v'(y)$

3. Al integrar, se obtiene
$$y + v'(y) = y + \frac{1}{x} \Rightarrow v('y) = \frac{1}{x} \Rightarrow v(y) = \ln x + c$$

   Por último
$$u = xy + \ln y + \ln x + c = xy + \ln xy + c$$

Ejemplo 6.2.2.

Determinar si cada una de las siguientes diferenciales es exacta. En caso afirmativo realizar la integración.

1. $\left(3x^2y^2 + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\dfrac{2x^3y^2}{y}\right) dy$

2. $2xe^{x^2} \operatorname{sen} y\, dx + e^{x^2} \cos y\, dy$

3. $\dfrac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$

4. $e^{\frac{y}{x}} \left[\operatorname{senh} x - \dfrac{y}{x^2} coshx\right] dx + \dfrac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} \cosh x\, dy$

Solución:

1. $\left(3x^2y^2+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2x^3y^2}{y}\right)dy$

   Se define

$$P=3x^2y^2+\frac{1}{x} \qquad\qquad Q=\frac{2x^3y^2-1}{y}$$

   Al llevar acabo la derivación parcial, se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=6x^2y$$

   por lo tanto, sí exacta la diferencial.

   Sea

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2+\frac{1}{x}$$

   Al integrar cono respecto a x, se tiene

$$\begin{aligned} u &= x^3y^2+\ln x+v(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x^3y^2-1}{y}=2x^3y+v'(y) \\ v'(y) &= \frac{1}{y} \\ v(y) &= \ln y+c \\ u &= x^3y^2+\ln xy+c \end{aligned}$$

   Comprobación

$$du=\left(3x^2y^2+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{2x^3y^2-1}{y}\right)dy$$

2. $2xe^{x^2}\operatorname{sen} y\,dx+e^{x^2}\cos y\,dy$

   Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{x^2}\cos y, \frac{\partial P}{\partial x}=e^{x^2}\cos y \quad \therefore \text{ la diferencial es exacta}$$

Se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2}\cos y \Rightarrow u = e^{x^2}\operatorname{sen} y + v(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2}\operatorname{sen} y + v'(x)$$

$$v'(x) = 2xe^{x^2}\operatorname{sen} y - 2xe^{x^2}\operatorname{sen} y$$

$$v'(x) = 0$$

$$v(x) = cte.$$

Ahora,

$$u = e^{x^2}\operatorname{sen} y + c$$

3. $\dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$

Solución:

Se calcula

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

por lo tanto, la diferencial es exacta.

Se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u = y\int \frac{1}{x^2y^2}dx = y\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{x}{y} + v(y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} + v(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} + v'(y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + v'(y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Entonces,

$$v'(y) = 0 \Rightarrow v(y) = cte$$

$$u = \tan^{-1}\frac{y}{x} + c$$

Comprobación

$$du = \frac{\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}dx + \frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}dy \Rightarrow du = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

4. $e^{\frac{y}{x}}\left[\operatorname{senh} x - \dfrac{y}{x^2}coshx\right]dx + \dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\cosh x dy$

Solución:

La solución se deja como ejercicio para el lector.

Nota importante: nótese que las definiciones anteriores equivalen a decir que dado un campo vectorial en dos dimensiones, si su rotacional es cero, las componentes escalares de dicho campo forman una diferencial exacta y la función integrada por integración es la función potencial cuyo gradiente es el campo vectorial dado.

Es decir, sea $\mathbf{V}(x,y) = u(x,y)\,\mathbf{i} + v(x,y)\,\mathbf{j}$ un campo vectorial es $\mathbf{R}^2$. Su rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

6.3. La Diferencial Exacta $\mathbf{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$.

Sean $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ y $R = R(x,y,z)$ tres funciones cuyas primeras derivadas parciales son continuas.

Definición.

La expresión $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, es una diferencial exacta, si y sólo sí existe $u = u(x,y,z)$ tal que:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Teorema.
La expresión $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, donde

$$\begin{aligned} P &= P(x,y,z), \\ Q &= Q(x,y,z) \\ R &= R(x,y,z) \end{aligned}$$

tiene sus primeras derivadas parciales continuas, y es una diferencial exacta si y sólo si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{1}$$

Demostración:

1. *Condición necesaria.*

   Sea $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, una diferencial exacta, así que necesariamente existe $u = u(x, y, z)$ tal que,

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

   Como los incrementos de las variables independientes son también independientes, se tiene:

$$\text{Si } dx \neq 0,\ dy = dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P$$

$$\text{Si } dy \neq 0,\ dx = dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

$$\text{Si } dz \neq 0,\ dx = dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

   puesto que se llevan las hipótesis del teorema de Schwarz, se concluye necesariamente (1).

2. Condición suficiente.

   Sea $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, una expresión diferencial tal que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

   si consideramos a z como parámetro, la expresión $Pdx + Qdy$ es una diferencial exacta. Es decir, existe $\phi(x, y, z)$, tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$$

   y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$$

   expresiones en donde z, se ha considerado hasta el momento como parámetro. Ahora, formemos la función

$$u(x, y, z) = \phi(x, y, z) + \psi(z) \tag{2}$$

y veamos cuáles condiciones impuestas a $\psi(z)$ permiten que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z)$$

Si sucede esto último, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es diferencial exacta, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z) \tag{3}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z) \tag{4}$$

en virtud de que

$$u = \phi(x, y, z) + \psi(z) \tag{5}$$

Sea

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R \tag{6}$$

entonces,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \psi'(z) = R$$

$$\psi'(z) = R - \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{7}$$

El segundo miembro de la expresión (7) sólo es función de z pues su primer miembro también lo es, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(R - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

En virtud del teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Si se cumplen estas dos últimas igualdades se verifica (6), que junto con (3) y (4) implican que

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

es una diferencial exacta.

Análogamente en el inciso anterior, podemos encontrar ahora la función $u = u(x, y, z)$ que tiene por diferencial total la expresión dada

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Se procede de la manera siguiente

a) Se comprueba si se trata de una diferencial exacta por medio de las condiciones (1).

b) Se considera que z es un parámetro y siguiendo el método expuesto en el párrafo anterior, se encuentra la función.

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

tal que tiene a $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ como su diferencial total.

c) Se forma la función.

$$u(x, y, z) = \phi(x, y, z) + \psi(z) \tag{8}$$

d) Se calcula de (2) la parcial con respecto a z y se iguala con R.

e) Se despeja $\phi'(z)$ y se integra con respecto a z,

$$u(z) = \int \left(R - \frac{\partial y}{\partial z}\right) dz + c$$

que al sumarse con $\phi(x, y, z)$, da

$$u(z) = \phi(x, y, z) + \int \left(R - \frac{\partial y}{\partial z}\right) dz + c$$

De esta manera se ha llegado a la función que resuelve el problema.

Ejemplo 6.3.1.

Investigar si cada una de las siguientes expresiones es diferencial exacta y, en caso afirmativo, llevar a cabo la integración.

1. $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz$
2. $x(y^2z^2 - z^2)dx + y(x^2z^2 + z^2)dy + z(x^2y^2 - x^2 + y^2 - 1)dz$
3. $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz$

1. $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \text{ y } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{x^2} \text{ y } \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} \text{ y } \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Por tanto, se tiene una diferencial exacta.

Ahora encontraremos ϕ, tal que

$$d\phi = P\,dx + Q\,dy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$

$$\phi = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + v(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + v'(x,y) = Q$$

$$-\frac{x}{y^2} + v'(x,y) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$$

$$v(y,z) = \frac{y}{z} + c$$

$$\phi = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}$$

Con el ajuste a posteriori de la constante, se tiene

$$u = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + y(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} + \psi(z) = R$$

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} + \psi(z) = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}$$

$$\phi(z) = 0$$

$$u = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + c$$

Comprobación

$$du = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz$$

2. $x(y^2z^2-z^2)\,dx+y(x^2z^2+z^2)\,dy+z(x^2y^2-x^2+y^2-1)\,dz.$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyz^2,\ \text{y da}\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xyz^2\qquad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=2xz+2xy^2z,\ \text{y da}\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=2xyz^2-2xz\qquad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2yz+2yz,\ \text{y da}\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=2x^2yz^2+2yz\qquad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

Así, la diferencial es exacta.

Ahora, se lleva a cabo lo siguiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=x(y^2z^2-z^2)$$

$$\phi=\frac{x^2}{2}(y^2z^2-z^2+v(y,z))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=x^2yz^2+v'(y,z)=y(x^2z^2+z^2)$$

$$v'(y,z)=yz^2$$

$$v(y,z)=\frac{1}{2}y^2z^2+c_1$$

$$\phi=\frac{x^2}{2}(y^2z^2-z^2)+\frac{1}{2}y^2z^2+c_1$$

$$u=\frac{x^2}{2}\phi=\frac{x^2}{2}(y^2z^2-z^2)+\psi(z)+\frac{1}{2}y^2z^2+c_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^2y^2z-x^2z+y^2z+\psi(z)=z(x^2y^2-x^2+y^2-1)$$

$$\psi'(z)=-z$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2}z^2+c_2$$

$$u=\frac{x^2}{2}(y^2z^2-z^2)+\frac{1}{2}y^2z^2-\frac{1}{2}z^2+c;\quad c=c_1+c_2$$

3. $\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz$

La solución se deja como ejercicio para el lector.

Nota importante: tal y como se indicó en la sección anterior, si un campo vectorial con tres componentes escalares es irrotacional, dichas componentes forman una diferencial total de una función de tres variables.

Es decir, dado un campo vectorial

$$\mathbf{V} = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

la condición para que $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ es que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

que coincide con la definición de diferencial exacta.

6.4. Diferenciales totales sucesivas.

Consideremos la función $u = u(x,y)$ tal que sus n-ésimas derivadas parciales son continuas (se dice que $u = u(x,y)$ es de clase c^n).

Por definición:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

Ahora bien:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2$$

Notemos que esta expresión tiene cierto parecido con el cuadrado del binomio. Calculemos con el mismo criterio la tercera diferencial de u.

$$\begin{aligned} d^3u = d(d^2u) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right)dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right)dy \end{aligned}$$

y así sucesivamente para las diferenciales de orden superior.

6.5. Integrales de línea de campos conservativos.

Supongamos que $\mathbf{F}$ puede escribirse como el gradiente de un escalar $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f\,(x,y,z)$ es una función real y $\mathbf{c}\,(t)$ es una trayectoria uniendo $P_{x_0}\,(x_0,y_0,z_0)$ a $P_{x_1}\,(x_1,y_1,z_1)$

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f\,(x_1,y_1,z_1) - f\,(x_0,y_0,z_0)$$

La integral de línea es independiente de la trayectoria de integración y depende sólo de los valores finales. Obviamente, si la trayectoria es cerrada, la integral es cero.

Si $\mathbf{F} = \nabla f$ es una curva cerrada pero simplemente conexa $\oint_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$ entonces el campo es conservativo.

Ejemplo 6.5.1.

Evaluar $\int_{\mathbf{c}} y\,dx + x\,dy$ sobre $\mathbf{c}\,(t) = \left(t^9 sen^9\left(\frac{\pi t}{2}\right), t\right)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Solución:

Identifiquemos por inspección que si

$$f\,(x,y) = xy \quad \Rightarrow \quad \nabla f = y\,dx + x\,dy$$

la trayectoria de integración va desde $P\,(0,0)$ para $t=0$ hasta $Q\,(1,1)$ en $t=1$.

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \nabla f\cdot d\mathbf{s} = f\,(1,1) - f\,(0,0) = 1$$

Nótese que la integral de línea de campos con gradiente

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f\cdot d\mathbf{s} = f_{\left(\ punto \quad final\ \right)} - f_{\left(\ punto \quad inicial\ \right)}$$

no depende de la trayectoria seguida sino solo de los extremos

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \nabla f\cdot d\mathbf{s}$$

Éste no es el caso para campos vectoriales no expresables como el gradiente de un escalar.

Ejemplo 6.5.2.

Sea $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y sean los puntos $P_0\,(1,0,0)$ y $P_1\,(1,0,1)$ los extremos. Calculemos la integral de línea por varias trayectorias.

$$\mathbf{c}_1\,(t) = \cos t\mathbf{i} + sent\mathbf{j} + \frac{t}{2\pi}\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{c}_2\,(t) = \cos t^3\mathbf{i} + sent^3\mathbf{j} + \frac{t^3}{2\pi}\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq \sqrt[3]{2\pi}$$

$$\mathbf{c}_3\,(t) = \cos t\mathbf{i} - sent\mathbf{j} + \frac{t}{2\pi}\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución:

Diferenciando $\mathbf{c}_1$

$$\mathbf{c}_1 = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{c_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t + \frac{1}{2\pi}\right) dt \\
&= 2\pi\left(-1 + \frac{1}{2\pi}\right) = -2\pi + 1
\end{aligned}$$

Ahora para $\mathbf{c}_2$, se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{c'}_2(t) &= -\operatorname{sen} t^3\left(3t^2\right)\mathbf{i} + \left(\cos t^3\right)(3t^2)\mathbf{j} + \frac{3t^2}{2\pi}\mathbf{k}\\ &= 3t^2\left(-\operatorname{sen} t^3\mathbf{i} + \cos t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{c_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}\left(\operatorname{sen} t^3\mathbf{i} - \cos t^3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\cdot(3^2)\left(-\operatorname{sen} t^3\mathbf{i} + \cos t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}\right)dt\\ &= \int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}\left(-sen^2t^3 - cos^2t^3 + \frac{1}{2\pi}\right)3t^2dt\\ &= \int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}\left(-1\frac{1}{2\pi}\right)3t^2dt = \left(-1+\frac{1}{2\pi}\right)t^3\Big|_0^{\sqrt[3]{2\pi}}\\ &= \left(-1+\frac{1}{2\pi}\right)(2\pi) = -2\pi + 1\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \equiv \int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Sin embargo, para $\mathbf{c}_3'$

$$\mathbf{c}_3' = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi}\left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}\right)dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2\pi}\right)dt\\ &= 2\pi\left(-1+\frac{1}{2\pi}\right) = -2\pi + 1\end{aligned}$$

Observaciones.

- La igualdad $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \equiv \int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ muestra una propiedad llamada *independencia de parametrización.*

- Dado que $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, $\mathbf{F}$ no es el gradiente de un escalar. Si F hubiera sido $\mathbf{F} = \nabla f$ hubiéramos tenido $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(1,0,1) - f(1,0,0)$ para cualquier $\mathbf{c}$.

- Observe que $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ son negativas, en tanto que que $\int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ es positiva.

Para las trayectorias $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}<0$; la proyección de $\mathbf{F}$ a lo largo del vector tangente a $\mathbf{c}_1$ y a $\mathbf{c}_2$ es opuesta a la dirección del movimiento. En el caso de $\mathbf{c}_3$ la proyección es en dirección del movimiento.

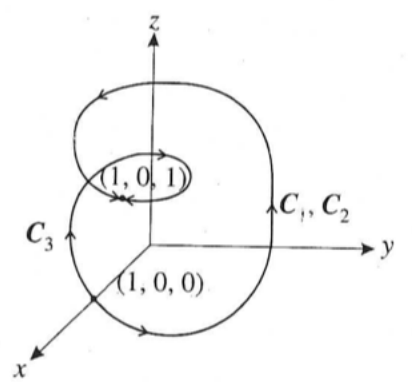


Figura 6.1.

La primera es la observación independencia de parametrización o reparametrización. Si $\mathbf{c}(t)$ es una curva parametrizada en R^3 definida para t en $[t_1,t_2]$ y si $t=h(u)$ es una función diferenciable en el intervalo $[u_1,u_2]$, tal que $h(u_1)=t_1$ y $h(u_2)=t_2$, la nueva curva paramétrica $\mathbf{b}(u)=\mathbf{c}(h(u))$ definida para $[u_1,u_2]$ es una reparametrización de $\mathbf{c}$.

Al aplicar la regla de la cadena, se obtiene $\mathbf{b}'(u)=\mathbf{c}'(h(u)h'(u))$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{b}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{u_1}^{u_2}\mathbf{F}(\mathbf{b}(u)\,\mathbf{b}'(u))\,du=\int_{u_1}^{u_2}\mathbf{F}(\mathbf{c}(h(u)))\,\mathbf{c}'(h(u))\,h'(u)\,du$$

Haciendo un cambio de variable de u a t:

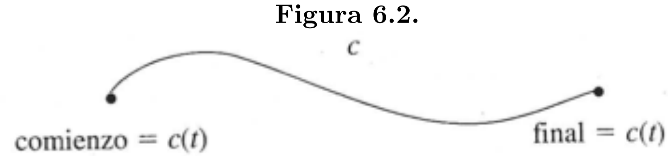
$$\int_{\mathbf{b}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{h(u_1)}^{h(u_2)}\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)=\int_{c}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Si la trayectoria $\mathbf{b}$ es una reparametrización de otra trayectoria $\mathbf{c}$, entonces para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ (conservativo o no), se tiene

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathbf{b}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Una curva geométrica $\mathbf{C}$ es un conjunto de puntos en el plano o en el espacio que pueda ser atravesada por una trayectoria parametrizada. La dirección a lo largo de $\mathbf{C}$ se especifica pero no la parametrización de $\mathbf{C}$.

Figura 6.2.



6.6. Integrales de línea a lo largo de curvas geométricas.

Para evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para una curva geométrica $\mathbf{C}$, se escoge una parametrización $\mathbf{c}$ de la curva $\mathbf{C}$ en la dirección especificada y se calcula:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

Se debe observar lo siguiente;

1. La parametrización debe ir en la dirección correcta.
2. . Si la curva es cerrada, la parametrización la atraviesa solo una vez.

Ejemplo 6.6.1.

Sea C el segmento de línea de $P_0(0,0,0)$ hasta $P_1(1,0,0)$, y sea $\mathbf{c}_1(t) = (t,0,0)$ donde $0 \le t \le 1$. Encontrar la integral de línea de $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}$ a lo largo de la curva C. Encontrar también la integral de línea si C es parametrizada como $\mathbf{c}_2(t) = (1-t,0,0)$ donde $0 \le t \le 1$.

Solución:

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{i} \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 1 \quad \mathbf{F}(\mathbf{c}_1(t)) = \mathbf{i} \quad \textit{luego}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{c}_1(t)) \cdot \mathbf{c}'_1(t)\, dt = \int_0^1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\, dt = \int_0^1 dt = 1$$

Para $\mathbf{c}_2$, tenemos $t_1 = 0 \quad t_2 = 1 \quad \mathbf{c}'_2(t) = -\mathbf{i} \quad \mathbf{F}(\mathbf{c}_2(t)) = \mathbf{i}$ luego:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{c}_2(t)) \cdot \mathbf{c}'_2(t)\, dt = \int_0^1 -\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}\, dt = -1$$

La curva C es la misma pero las parametrizaciones $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ van en direcciones opuestas.

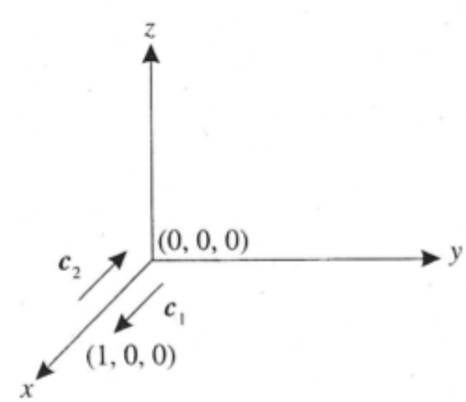


Figura 6.3.

Ejemplo 6.6.2.

Sea C el segmento rectilíneo uniendo $P\,(2,1,3)$ a $Q\,(-4,6,8)$. Encontrar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}\,(x,y,z) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$

Solución:

Podemos elegir cualquier parametrización de C.

Una simple es

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\,(t) &= (1-t)\,(2,1,3) + t\,(-4,6,8)\\ &= (2-6t, 1+5t, 3+5t)\,, \qquad 0 \le t \le 1\end{aligned}$$

Cuando t varia de 0 a 1, $\mathbf{c}\,(t)$ se mueve a lo largo de C desde $P\,(2,1,3)$ hasta $Q\,(-4,6,8)$ Así:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,(\mathbf{c}\,(t))\cdot \mathbf{c}'\,(t)\,dt$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \left[(2-6t)\,\mathbf{i} - (1+5t)\,\mathbf{j} + (2-6t)\,(1+5t)\,\mathbf{k}\right]\cdot(-6\mathbf{i}+5\mathbf{j}+5\mathbf{k})\,dt\\ &= \int_0^1 \left(-7+31t-150t^2\right)dt = -\frac{83}{2}\end{aligned}$$

Nótese que la curva C se puede dividir en varias curvas.

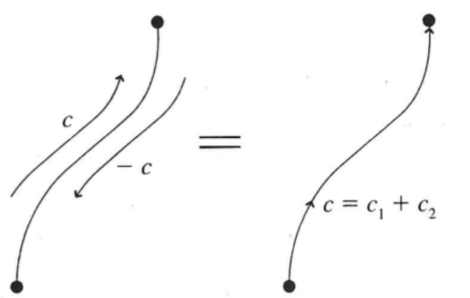


Figura 6.4.

Por tanto,

$$\int_{c_1+c_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{c_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{c_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

y si la curva $-C$ es la curva C recorrida en sentido opuesto:

$$\int_{-c} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{c} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Entonces, podemos definir integrales de línea sobre curvas con esquinas, es decir, curvas continuas con el vector tangente no definido en ciertos puntos. Es decir, hacemos $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ y definimos:

$$\int\limits_{c} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int\limits_{c_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \ldots + \int\limits_{c_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Ejemplo 6.6.3.

Sea C el perímetro de un cuadrado unitario $[0,1]\times[1,0]$ en el plano, recorrido en sentido contrario al reloj. Evaluar la integral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}\,(x,y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$.

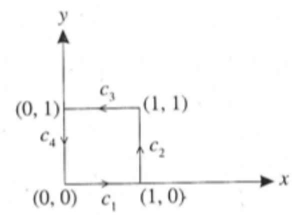


Figura 6.5.

Solución:

Usando $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{c}_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$

$$\begin{array}{lllll}
C_1: & (t,0) & 0\le t\le 1 & \mathbf{c}_1'(t) = \mathbf{i} & \mathbf{F}(\mathbf{c}_1(t)) = t^2\,\mathbf{i} \\
C_2: & (1,t) & 0\le t\le 1 & \mathbf{c}_2'(t) = \mathbf{j} & \mathbf{F}(\mathbf{c}_2(t)) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} \\
C_3: & (1-t,1) & 0\le t\le 1 & \mathbf{c}_3'(t) = -\mathbf{i} & \mathbf{F}(\mathbf{c}_3(t)) = (1-t)^2\,\mathbf{i} + (1-t)\,\mathbf{j} \\
C_4: & (0,1-t) & 0\le t\le 1 & \mathbf{c}_4'(t) = -\mathbf{j} & \mathbf{F}(\mathbf{c}_4(t)) = 0
\end{array}$$

Entonces,

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \qquad \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1-t)^2\,(-1) dt = -\frac{1}{3} \qquad \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 0 dt = 0$$

Finalmente,

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

Otra forma de escribir la integral de la línea siguiente,

Si C es una parametrización de una curva geométrica C, y si además $C(t) \neq 0\,\forall t$, podemos formar el vector tangente unitario:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{|\mathbf{c}'(t)|}$$

El elemento de longitud de arco es,

$$ds = |\mathbf{c}'(t)|\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Entonces $\mathbf{c}'(t)dt = \mathbf{T}(t)\,ds$, luego la integral de línea de un campo vectorial se puede escribir como,

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)\cdot \mathbf{T}(t)\,ds$$

Puesto que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ es la proyección de $\mathbf{F}$ en la dirección del vector tangente a la curva, es decir: *“ La integral de línea de* $\mathbf{F}$ *es la integral, con respecto a la longitud de arco, de la componente tangencial* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ *de* $\mathbf{F}$ ”.

Además, como la integral de línea puede ser escrita como el límite de sumas, se hace una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_k = b$ del intervalo donde C está definida, y consideramos cada punto u_i en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

En lugar de calcular $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ para todo valor de t , tomamos los valores F $(\mathbf{c}(u_r))$.. $\mathbf{F}(\mathbf{c}(u_k))$ y se multiplican por las rectas de desplazamiento $\Delta t_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$ y se toma la suma riemanniana.

$$\sum_{c=1}^{h} \mathbf{F}(\mathbf{c}(u_i)) \cdot (\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})) = \sum_{t=1}^{k} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \Delta t_i$$

Cuando la longitud de los intervalos $[t_{c-1}, t_i] \to 0$ (cuando $k \to \infty$) el desplazamiento Δt_i se aproxima mejor por $\mathbf{c}'t(u_i)\Delta t_i$ y la suma riemanniana se acerca a la integral.

$$\int_0^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}(t)dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

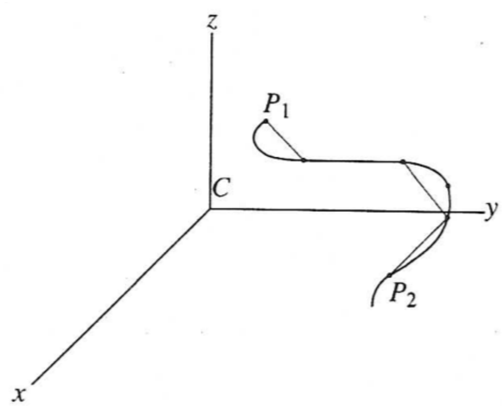


Figura 6.6.

Geométricamente,

$$E = F(x, y, z) \qquad\qquad h = 4$$

$$\begin{aligned} s &= s_1 \text{ en } P_1 \\ s &= s_2 \text{ en } P_2 \\ s &= s_3 \text{ en } P_3 \\ s &= s_4 \text{ en } P_4 \end{aligned}$$

Evaluando $F(x, y, z)$ en (x, y, z) y formando el producto $F(x, y, z)\Delta t_1$ y sumando

$$\sum_{i=1}^{h} F(x_i, y_j, z_k)\Delta t_i$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to\infty} \sum_{i=1}^{h} F(x_i, y_j, z_k)\Delta t_i = \int_C F(x, y, z)ds \text{ y } \Delta t_i = 0$$

Ejemplo 6.6.4.

Evaluemos $\int\limits_C (x+y)\,ds$ donde C es una linea desde el origen al punto $P_1(1,1)$.

Solución:

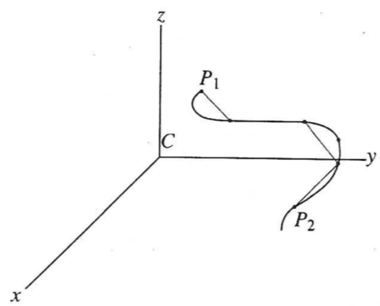


Figura 6.7.

Para un punto P cualquiera sobre la línea y s la longitud de arco de dicho punto medido desde el origen:

$$x = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

luego: $x + y = \dfrac{25}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}s$

luego: $\displaystyle\int_C (x+y)ds = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} s\,ds = \sqrt{2}$

Integremos la misma función $(x+y)$ desde $P_0(0,0)$ a $P_1(1,1)$ a lo largo de otra trayectoria

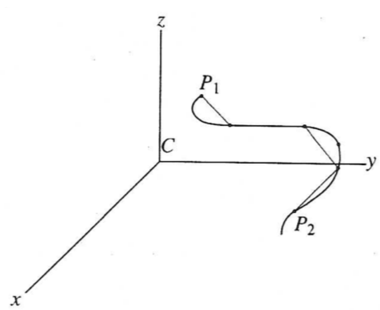


Figura 6.8.

$$C = C_1 + C_2$$

luego $x = s\,y = 0$ en C_1 y C_1: $x + y = s$ Entonces

$$\int_{C_1}(x+y)ds = \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}$$

A lo largo de C_2, $x = 1$, $y = s$ (S medida desde el punto $P_0(0,0)$ al punto $P_1(1,1)$).

$$\Rightarrow \int_{C_2}(x+y)ds = \int_0^1 (1+s)\,ds = \frac{3}{2}$$

Finalmente

$$\int_C (x+y)ds = \int_{C_1}(x+y)ds = \int_{C_2}(x+y)ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

El valor de una integral de línea depende de la trayectoria de integración.

6.7. Resumen. Capítulo 6. Integrales de línea.

Integral de Línea.

Sea **F** un espacio vectorial y **C** una trayectoria diferenciable en el intervalo $[a, b]$. La integral de línea de **F** sobre **c** es:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{c}\left(t\right)\right) \cdot \mathbf{c}'\left(t\right) dt$$

ó bien, la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j} + z\left(t\right)\mathbf{k}$ *en* $a \leq t \leq b$ es:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt$$

La diferencial exacta $\mathbf{P\,dx + Q\,dy}$.

Sean las funciones diferenciables:

$$P{=}P(x, y) \text{ y } Q = Q(x, y)$$

Definición.

La expresión $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta, si y solo sí existe $u = u(x, y)$ tal que:

$$du = P\,dx + Qdy$$

es decir, $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta, si y solamente sí existe la función F que la tiene por diferencial total.

La diferencial exacta $\mathbf{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$.

Sean $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z)$y $R = R(x, y, z)$ tres funciones cuyas primeras parciales son continuas.

Definición:

La expresión $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, es una diferencial exacta, si y sólo sí existe $u = u(x, y, z)$ tal que:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Integrales de línea de campos conservativos.

Supongamos que **F** puede escribirse como el gradiente de un escalar $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f\left(x, y, z\right)$ es una función real y $\mathbf{c}\left(t\right)$ es una trayectoria uniendo (x_0, y_0, z_0) a $\left(x_1, y_1, z_1\right)$.

$$\int_c \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f\left(x_1, y_1, z_1\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

La integral de línea es independiente de la trayectoria de integración y depende sólo de los valores finales. Obviamente, si la trayectoria es cerrada, la integral es cero.

Si $\mathbf{F} = \nabla f$ es una curva cerrada pero simplemente conexa.
Si $\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$ Entonces el campo conservativo.

Integrales de línea de campos a lo largo de curvas geométricas.

Para evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para una curva geométrica C, se escoge una parametrización $\mathbf{c}$ de la curva C en la dirección especificada y se calcula:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\left(\mathbf{c}\left(t\right)\right) \cdot \mathbf{c}'\left(t\right) dt$$

Se debe observar lo siguiente;

1. La parametrización debe ir en la dirección correcta.
2. Si la curva es cerrada, la parametrización la atraviesa solo una vez.

Sea $\mathbf{F} = \nabla f$ en una curva C cerrada o simplemente conexa.
Si $\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$ el campo es conservativo.

En resumen,

Si un campo es irrotacional o conservativo, entonces se puede representar como el gradiente de una función escalar ϕ.

$$\text{Si } \nabla \times \mathbf{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \nabla\phi$$

La función ϕ se llama la función potencial y se determina de la misma manera que una diferencial total en campos escalares. Es decir si,

$$\mathbf{F} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

y $\mathbf{F} = \nabla\phi$ entonces,

$$\phi_x = \int f_1\, dx + C_1$$
$$\phi_y = \int f_2\, dy + C_2$$
$$\phi_z = \int f_3\, dz + C_3$$

y finalmente

$$\phi\left(x, y, z\right) = U\left[\phi_x, \phi_y, \phi_z + C\right]$$

Si además $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, la función potencial satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot \nabla\phi = 0 \qquad \nabla^2\phi = 0$$

y la función ϕ se llama armónica.

6.8. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 6.1.

Evaluar

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$$

en donde C es el triángulo de vértices $V_1(0,0,)$, $V_2(0,1)$ y $V_3(1,1)$. El recorrido es en sentido horario.

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{De } V_1(0,0) \text{ a } V_2(0,1): \quad & x = 0, \quad y = t \\
& dx = 0, \quad dy = dt \\
& I_1 = \int_0^1 (t)^2(0) + (0)dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{De } V_2(0,1) \text{ a } V_3(1,1): \quad & x = t, \quad y = 1 \\
& dx = 1, \quad dy = 0 \\
& I_2 = \int_0^1 (1)^2 dt + (t)^2 dt = t\Big|_0^1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{De } V_3(1,1) \text{ a } V_1(0,0): \quad & x = t, \quad y = t \\
& dx = dt, \quad dy = dt \\
& I_3 = \int_1^0 (t)^2 dt + (t)^2 dt = \frac{2}{3}t^2\Big|_1^0 = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 6.2.

Sea el campo conservativo

$$\mathbf{F} = \frac{2}{3}x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

cuya función potencial es

$$\phi = \frac{1}{3}x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

Calcular el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}$ para desplazar a una partícula del punto $P(0,0)$ al punto $Q(3,2,1)$.

Solución:

$$T = \phi(3,2,-1) - (,0,0,0)$$

$$T = \left[\frac{1}{3}(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 - 3\right] - [0 + 0 + 0 - 3]$$

$$T = \frac{4}{3} + 4 + 4$$

$$T = \frac{52}{3} \text{ unidades de trabajo.}$$

Ejercicio 6.3.

Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = 3x^2z\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + (x^3 + 2yz)\mathbf{k}$$

1. Determinar si es conservativo.

2. Obtener, de ser posible, la función potencial del campo.

Solución:

1. Obteniendo el rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & z^2 & (x^3 + 2zy) \end{vmatrix}$$

$$= (2x - 2z)\mathbf{i} + (3x^2 - 3x^2)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \text{ es conservativo}$$

2. Existe función potencial, por lo que:

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2z, Q = z^2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}; R = x^3 + 2yz = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\phi = \int R dz = \int (x^3 + 2yz) dz = x^3z + yz^2 + f(x, y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad 3x^2z + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2z$$

$$f(x, y) = \int (0) dx = 0 + g(y) \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\phi = x^3z + yz^2 + g(y) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \Rightarrow z^2 + g'(y) = z^2$$

$$g(y) = \int (0) dy = 0 + C \qquad (4)$$

(4) en (3)

$$\phi = x^3z + yz^2 + C$$

que es la función potencial.

Ejercicio 6.4.

Calcular el valor de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (2xz^3+6y)\,\mathbf{i}+(6x-2yz)\,\mathbf{j}+(3x^2z^2-y^2)\,\mathbf{k}$ y C es la trayectoria dada por la intersección de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el plano $z=0$.

Solución:

Para $\mathbf{F} = (2xz^3+6y)\mathbf{i}+(6x-2yz)\mathbf{j}+(3x^2z^2-y^2)\mathbf{k}$ El cálculo de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ se simplifica si $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$, y se obtiene

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2xz^3+6y) & (6x-2yz) & (3x^2z^2-y^2) \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = (-2x+2y)\mathbf{i}+(6xz^2-6xz^2)\mathbf{j}+(6-6)\mathbf{k}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = 0 \quad \therefore \text{ el valor de } \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \text{ es cero.}$$

Ejercicio 6.5.

Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + \cos x\cos y\,\mathbf{j}$ calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C es la trayectoria triangular de vértices $A(0,0)$, $B(0,2)$ y $C(2,0)$, y el recorrido es en sentido antihorario.

Solución:

De A a C

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (0,\cos t)(dt,0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$T_1 = 0$$

De C a B

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (\operatorname{sen} t\operatorname{sen}(2-t), \cos t\cos(2-t))(dt,-dt) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2-t \end{cases}$$

$$= [\operatorname{sen} t(\operatorname{sen} 2\cos t - \cos 2\operatorname{sen} t) - \cos t(\cos 2\cos t + \operatorname{sen} 2\operatorname{sen} t)]dt$$

$$= (-\cos 2)dt$$

$$T_2 = -\cos 2(t)\Big|_2^0 = 2\cos 2 = -0.8323$$

De B a A

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (0,\cos t)(0,dt) = \cos t dt \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = y \end{cases}$$

$$T_3 = \int_2^0 \cos t dt = \operatorname{sen} t\Big|_2^0 = -\operatorname{sen} 2 = -0.9093$$

Por lo tanto

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 + (-0.8323) + (-0.9093) = -1.7416$$

Ejercicio 6.6.

Calcular el trabajo total realizado para desplazar una partícula en un campo de trabajo depende de la trayectoria y como la curva C está dada por

$$C : \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad \text{con } t = 1 \text{ a } t = 2$$

Solución: El valor del trabajo se obtiene como,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_1^2 (3(t^2+1)(2t^2(2t) - 5(t^3)(4t) + 10(t^2+1)(3t^2))dt \\ &= 2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3 \Big|_1^2 \\ &= (128 + 64 + 48 + 80) - (2 + 2 + 3 + 10) = 303 \end{aligned}$$

Ejercicio 6.7.

Sea la expresión $(8xy + y^2 - \cos z)dx + (4x^2 + 2xy)dy + (x \operatorname{sen} z)dz$. Determinar si en una diferencial exacta y, de ser posible, obtener la función cuya diferencial es la expresión dada.

Solución: Se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(8xy + x^2 - \cos z) &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 2xy) = 8x + 2y \\ \frac{\partial}{\partial z}(8xy + x^2 - \cos z) &= \frac{\partial}{\partial y}(x \operatorname{sen} z) = \operatorname{sen} z \\ \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 2xy) &= \frac{\partial}{\partial y}(x \operatorname{sen} z) = 0 \end{aligned}$$

Por lo que sí es una diferencial exacta y la función buscada es

$$f = 4x^2y + xy^2 - x\cos z + C$$

Ejercicio 6.8.

Determinar el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -r\mathbf{e}_\theta$ al desplazar a una partícula desde el punto $A(4, 0)$ hasta el punto $B(0, 4)$, a lo largo de la trayectoria dada por la curva $x^2 + y^2 = 16$. El campo $\mathbf{F}$ está definido en coordenadas polares.

Solución: La trayectoria en coordenadas polares está dada por,

$$r = 4, \quad dr = 0$$

$$\theta = t, \quad d\theta = dt$$

de donde

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (0, -4)(0, dt)$$

$$T = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4dt - 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\pi$$

Ejercicio 6.9.

Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\mathbf{F} = (e^{-y} - ze^{-x})\mathbf{i} + (e^{-z} + xe^{-y})\mathbf{j} + (e^{-x} - ye^{-z})\mathbf{k}$$

al desplazar una partícula desde el punto $A(0,0,0)$ hasta el punto $B(1,1,1)$. Estos puntos están contenidos en la curva C, dada por

$$x = \frac{1}{\ln 2}\ln(1+t), \qquad y = \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}, \qquad z = \frac{1-e^t}{1-e}$$

Solución:

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y} - ze^{-x}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-z} - xe^{-y}) = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^{-y} - ze^{-x}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x} - ye^{-z}) = -e^{-x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^{-z} - xe^{-y}) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} - ye^{-z}) = -e^{-z}$$

Se tiene que el campo es conservativo y su función potencial es

$$\phi = xe^{-y} + ze^{-x} + ye^{-z} + C$$

Por lo tanto

$$T = \Big[\phi\Big]_A^B = (e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}) - (0+0+0) = 3e^{-1} = \frac{3}{e} = 1.10364$$

Ejercicio 6.10.

Calcular el valor de la integral de la

$$\int_{C_A}^{B} e^{-x}dx - e^{y}dy$$

a lo largo de la curva $C: 4x^2 + y^2 = 4$ de $A(0,2)$ a $B(1,0)$ siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.

Solución:

$$\int_{C_A}^{B} e^{-x}dx - e^{y}dy = \int_{C_A}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F} = e^{-x}\,\mathbf{i} - e^{y}\,\mathbf{j}$

como $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{F}$ tiene funcion potencial $\phi = e^{-x} - e^{y} + \alpha$

así $\int_{C_A}^{B} e^{-x}dx - e^{y}dy = \phi|_A^B = (e^{-1} + \alpha) - (-e^{-2} + \alpha) = \dfrac{1+e^3}{e}$

Ejercicio 6.11.

Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2z - 4x)\mathbf{i} + (2y + \cos\pi z\pi)\mathbf{j} + (-\pi \operatorname{sen}\pi z + x^3)\mathbf{k}.$$

Calcular el valor de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ del punto$A(0,0,0)$ al punto $B(2,2,2)$ a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura.

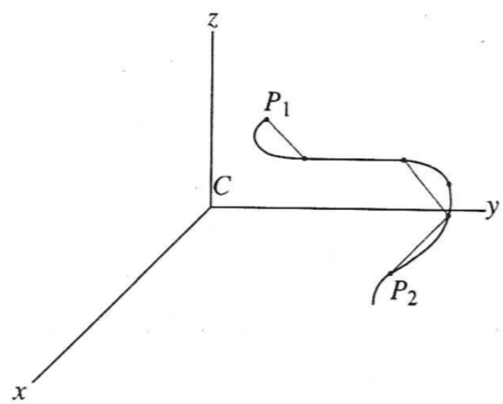


Figura 6.9.

Solución:

Antes de realizar cálculo alguno, conviene verificar si el campo vectorial es conservativo, así

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2z-4x & 2y+\cos\pi z & (-\pi y \operatorname{sen}\pi z + x^3) \end{vmatrix}$$

$$= (-\pi y \operatorname{sen}\pi z + \pi y \operatorname{sen}\pi z)\mathbf{i} + (3x^2 - 3x^2)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Como $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ el campo $\mathbf{F}$ es conservativo y en consecuencia $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C pues $\mathbf{F}$ tiene una función potencial la cual es

$$\phi(x,y,z) = x^3z - 2x^2 + y^2 + y\cos\pi z + C \text{ por tanto}$$

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 32\cos 2\theta(0) + 8\operatorname{sen}2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\operatorname{sen}2\theta\, d\theta$$

$$= -4\cos 2\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -4(1-1) = 0$$

Ejercicio 6.12.

La densidad de carga $\rho(x, y, z)$, la cual produce un campo eléctrico, esta dada por la ecuación de Maxwell $\dfrac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ Considerando que $\mathbf{E} = h(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, donde h es una constante.

1. Determinar la densidad de carga que produce dicho campo eléctrico.

2. Obtener un potencial electrostático ϕ tal que $\mathbf{E} = \nabla\phi$.

Solución:

1. Del enunciado

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= \epsilon_0(h + h + h) = 3\epsilon_0 h \end{aligned}$$

2. Integrando

$$\begin{aligned} \phi &= \int hx dx = \frac{1}{2}hx^2 + f(x, y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = hy \\ f &= \frac{1}{2}hy^2 + g(z) \quad \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}hx^2 + \frac{1}{2}hy^2 + g(z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= g' = hz \\ g &= \frac{1}{2}hz^2 + C \quad \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}hx^2 + \frac{1}{2}hy^2 + \frac{1}{2}hz^2 + C \end{aligned}$$

Ejercicio 6.13.

Determinar $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ donde C es el círculo unitario contenido en el plano YZ con centro en el origen y $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

Solución:

Dado que

$$rot\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (y + z) & (x + z) & (x + y) \end{vmatrix} = 0$$

se tiene que $\mathbf{F}$ es conservativo y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ejercicio 6.14.

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ al mover una partícula desde el punto $P(a, 0, 0, 0)$ hasta el punto $Q(a, 0, 2\pi b)$, a lo largo de la hélice $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$

Solución:

Del enunciado

$$x = a\cos, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad z = bt$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (a^2\cos t\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (a^2\,\mathrm{sen}^2\,t)\,\mathbf{j} + (abt\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{k} \\
d\mathbf{r} &= [(-a\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (a\cos t)\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}]dt \\
\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= (-a^3\cos t\,\mathrm{sen}^2\,t + a^3\,\mathrm{sen}^2\,t\cos t + ab^2t\,\mathrm{sen}\,t)dt \\
\Rightarrow T &= \int_0^{2\pi} ab^2t\,\mathrm{sen}\,tdt \\
&= ab^2\Big[-t\cos t + \mathrm{sen}\,t\Big]_0^{2\pi} \\
&= ab^2[(-2\pi + 0) - (-0 + 0)] \\
&= -2ab^2\pi
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.15.

Sea el campo de fuerzas $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ cuyas componentes están representadas por las gráficas. Calcular el trabajo realizado para llevar una partícula desde el origen, hasta el punto donde las componentes se anulen a lo largo de la recta que une dichos puntos.

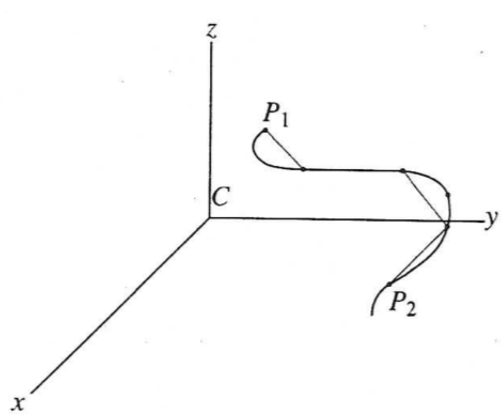


Figura 6.10.

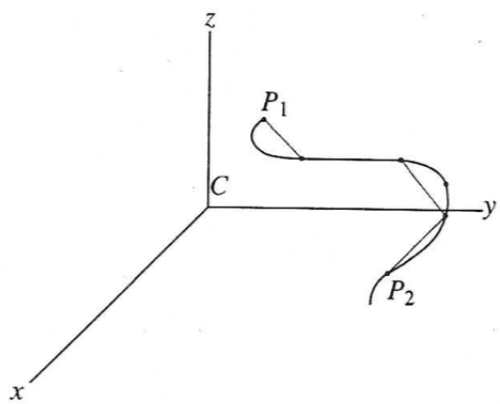


Figura 6.11.

Del enunciado

$$\mathbf{F} = (2x^2)\mathbf{i} + (6 - 2y)\mathbf{j}$$

$P(0,0)$: punto inicial

$Q(3,3)$: punto final (de hecho, es factible considererar $x \leq 3, y \leq 3$)

con lo que

$$C : y = x, dy = dx$$

Así entonces

$$\mathbf{F} = (2x^2)\mathbf{i} + (6 - 2y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2x^2)(dx) + (6 - 2y)(dy)$$

$$T = \int_0^3 (2x^2 - 2x + 6)dx$$

$$\left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 6x\right]_0^3 = (18 - 9 + 18) - (0 - 0 + 0) = 27$$

Capítulo 7

Integrales vectoriales.

Esta sección está dedicada al estudio de la interacción de campos vectoriales con superficies y volúmenes. En los capítulos anteriores se vio la forma en que actúa un campo vectorial sobre una trayectoria (integral de línea). También hemos visto como calcular volúmenes y superficies mediante integración escalar (integrales múltiples). Ahora bien, cuando un campo vectorial actúa sobre un cuerpo lo puede hacer de dos maneras: actuando sobre la superficie o sobre todo el volumen. Por ejemplo, el campo gravitacional actúa sobre el volumen de un cuerpo mientras que un campo de fuerzas externas (esfuerzo) actúa solamente sobre la superficie del cuerpo. Pensemos en un ejemplo sencillo pero ilustrativo. Un futbolista patea un balón; si le pega perpendicularmente a la superficie con la punta del pie, el resultado será una fuerza perpendicular a dicha superficie que provoca un movimiento en el balón en la dirección de la patada sin provocar giros en el balón (en términos futbolísticos esto se llama un punterazo). En el aire, el balón seguirá una trayectoria, que se volverá parabólica debido a la acción de la gravedad (a la cual no le importa si el balón gira). Por otro lado, si le pega transversalmente, la fuerza tendrá tres componentes; una que es perpendicular como el ejemplo anterior y dos que actúan sobre la superficie del balón provocándole un giro o rotación a dicha superficie (chanfle en términos futbolísticos). Es decir, la fuerza perpendicular a la superficie provoca un cambio en el momentum lineal del cuerpo, en tanto que las componentes transversales provocan un giro. Dado que la fuerza aplicada es un campo vectorial, el lector habrá intuido que la fuerza perpendicular estará ligada al concepto de divergencia, ya que actúa sobre la superficie y se transmite al volumen, mientras que el giro estará ligado al concepto de rotacional y actuará exclusivamente sobre la superficie del cuerpo.

El planteamiento matemático de estos conceptos conduce a los teoremas fundamentales del cálculo vectorial, los cuales veremos en este capítulo.

7.1. Integración vectorial.

Integral de línea.

1. Para un campo vectorial,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

El vector tangente a $\mathbf{c}(t)$ es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{|\mathbf{c}'(t)|} \qquad d\mathbf{s} = |\mathbf{c}'(t)|\; dt$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)\, ds$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

2. Para un campo escalar,

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, |\mathbf{c}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\, |\mathbf{c}'(t)|\, dt$$

De la misma manera, si la curva C definida en $a \leq t \leq b$ se representa paramétricamente por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ el vector desplazamiento diferencial a lo largo de $\mathbf{C}$ se define como,

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

Y las integrales que involucran $d\mathbf{r}$ se llaman *integrales de línea*

$$\int_c \phi\, d\mathbf{r}; \qquad \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}; \qquad \int_c \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$$

Nótese que si la curva es cerrada, entonces

$$\oint_c \phi\, d\mathbf{r} = -\oint_c \phi\, d\mathbf{r}$$

La integral $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es la integral escalar de línea de un campo vectorial. Si la curva es cerrada:

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma \text{ circulación de } \mathbf{F}$$

7.1.1. Parametrización de superficie. Representación de una superficie en forma vectorial.

Una superficie S se representa por una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector posición y u, v son parámetros.

Un elemento diferencial de área $d\mathbf{s}$ queda determinado por

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv$$

y demostramos que se puede escribir como $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, ds$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie en el punto de coordenadas u, v y, por tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}; \qquad d\mathbf{s} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\; du\, dv$$

Recordemos también que el plano tangente a la superficie S en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se calcula formando el vector normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

evaluada en (u_0, v_0). La ecuación del plano tangente es,

$$\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

donde $\mathbf{n} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$.

7.1.2. Áreas de superficies alabeadas.

Sea la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$

$$S = \iint_R dA = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \left[z_x^2 + z_y^2 + 1\right] dA = \iint_R \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|F_z|}$$

7.2. Integrales de superficie.

Las integrales en las que se tiene al elemento diferencial $d\mathbf{s}$ se llaman integrales de superficie

$$\iint_S \phi\, d\mathbf{s}; \qquad \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}; \qquad \iint_S \mathbf{F}\times d\mathbf{s}$$

Si S es una superficie cerrada (sin frontera) las integrales se escriben como

$$\oiint_S \phi\, d\mathbf{s} \qquad \oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad \oiint_S \mathbf{F}\times d\mathbf{s}$$

La integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

Por ejemplo, si S esta representada por $\mathbf{r}(u,v)$, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S será,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{R_{uv}} [\mathbf{F}\,\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v]\, du\, dv \quad \textit{donde} \quad [\mathbf{F}\,\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v] = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$$

es el triple producto escalar y R_{uv} es la región donde están definidas los parámetros u, v. Ahora, puesto que: $d\mathbf{s} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dudv$.

$$\Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{Ruv} \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\, du\, dv$$

7.2.1. Integral de una función escalar sobre una superficie.

Sea la función escalar $f(x,y,z)$ definida sobre S y sea $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ la parametrización de S. Se define la integral de f sobre S como:

$$\iint_S f(x,y,z)\, ds = \iint_S f\, ds = \iint_R f\ (\mathbf{r}(u,v))\, |\mathbf{r}_v\times\mathbf{r}_v|\ du\, dv$$

es decir:

$$\iint\limits_S f\, ds = \iint\limits_R f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, du\, dv$$

En coordenadas cartesianas la expresión se escribe como,

$$\iint_S f\, ds = \iint_R f(x,y,z)\, \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|f_z|} dA$$

Nótese que si $f = 1$ se recupera la integral de superficie de una curva alabeada.

7.2.2. Integral de una función vectorial sobre una superficie.

La integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en R^3 sobre una superficie paramétrica $\mathbf{r}: D \to R^3$ es el escalar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv$$

dado que $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, ds$ donde $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ podemos escribir:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

Así que la integral de superficie es la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre la superficie. Para ejemplificar lo anterior, analizaremos el siguiente caso.

Sea S una superficie y $\mathbf{V}$ el campo de velocidades de un fluido moviéndose en el espacio. Entonces, $\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ representa el flujo (gasto) o la cantidad de fluido por unidad de tiempo que atraviesa la superficie en la dirección hacia afuera de la misma. (El signo contrario representa flujo hacia adentro.)

Con el fin de simplificar consideremos $\mathbf{V} = cte.$ y una superficie S plana.
Sea S un plano. Supongamos que la región rectangular R de S fluye con el fluido por una unidad de tiempo formando un paralelepípedo W. El volumen de W es:

$$\text{área}\, R\, |\mathbf{V}| \cos\theta = \text{área} R\, \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

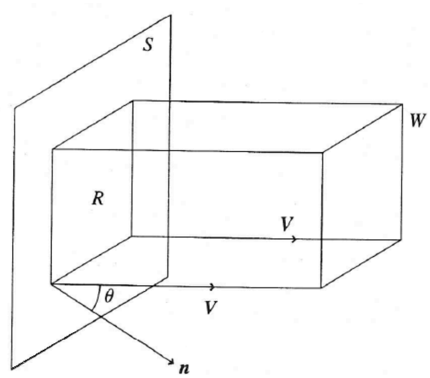


Figura 7.1.

En general si

$$\mathbf{V} = v_1(x,y,z)\, \mathbf{i} + v_2(x,y,z)\, \mathbf{j} + v_3(x,y,z)\, \mathbf{k} \tag{1}$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{Ryz} v_1\, dy\, dz + \iint_{Rzx} v_2\, dz\, dx + \iint_{Rxy} v_3\, dx\, dy$$

donde R_{yz}, R_{zx}, R_{xy} son las proyecciones de S sobre los planos yz, zx, xy respectivamente.

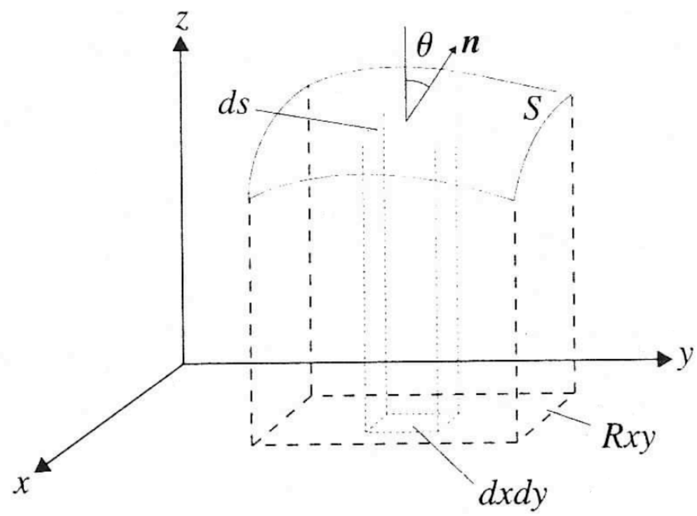


Figura 7.2.

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k} = \cos\theta_1\,\mathbf{i} + \cos\theta_2\,\mathbf{j} + \cos\theta_3\,\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds = \cos\theta_1 ds\,\mathbf{i} + \cos\theta_2 ds\,\mathbf{j} + \cos\theta_3 ds\,\mathbf{k}$$

$$ds\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}) = ds\cos\theta_1 = dy\,dz$$

$$ds\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}) = ds\cos\theta_2 = dz\,dx$$

$$ds\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) = ds\cos\theta_3 = dx\,dy$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n}\,ds = dy\,dz\,\mathbf{i} + dz\,dx\,\mathbf{j} + dx\,dy\,\mathbf{k}$$

luego si $\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ la ecuación (1) se recupera.

7.2.3. Aplicaciones.

Si el campo escalar $T\,(x,y,z)$ define la temperatura en un punto (x,y,z) de una región W, entonces el campo vectorial

$$\nabla\mathbf{T} = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

representa el gradiente de temperaturas del campo T. El calor fluye de frío a caliente según el campo vectorial $\mathbf{F} = -k\nabla T$, donde k representa una constante llamada conductividad térmica.

Entonces:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

es el flujo total de calor a través de la superficie S. *(Ley de Fourier).*

Ejemplo 7.2.1.

Sea un campo de temperaturas dado por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y sea S una esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con su normal hacia afuera. Encontrar el flujo de calor a través de la esfera S si $k = 1$.

Solución:

El campo vectorial de flujo de calor es:

$$\mathbf{Q} = -\nabla T\ (x, y, z)$$
$$\mathbf{Q} = -2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$$

Pero $\mathbf{n}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

Sobre S

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$$

es la componente normal de $\mathbf{Q}$. Ahora:

$$\iint_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} ds = -2 \iint_S ds = -2(4\pi) = -8\pi$$

El flujo de calor va dirigido hacia el centro de la esfera.

Ley de Gauss.

Relaciona el flujo de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una superficie cerrada S (por ejemplo una esfera) con la carga neta Q encerrada por la esfera:

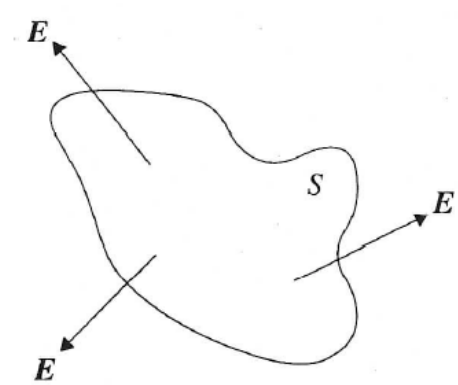


Figura 7.3.

Consideremos una carga puntual q en el origen de coordenadas. Por simetría sabemos que el campo eléctrico provocado por dicha carga debe ser en la dirección radial hacia afuera del origen y deberá tener la misma magnitud en todos los puntos de una superficie esférica centrada en el origen.

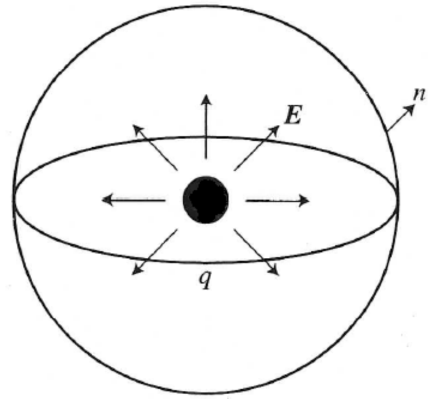


Figura 7.4.

Es decir

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r\, E\,(r) \quad donde \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

es un vector unitario en la dirección radial. La ley de Gauss se convierte en:

$$\iint_S E\,(r)\, \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde ε_0 es la permitividad en el vacio $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \left[\dfrac{farad}{m}\right]$

Si se elige una esfera de radio r, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ *luego* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = 1$

Asi que

$$\iint_S E\,(r)\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_S E\,(r)\, ds = E\,(r) \iint_S ds = 4\pi r^2 E\,(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E\,(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad es \quad decir \quad \mathbf{E}\,(r) = \mathbf{e}_r E\,(r) = \frac{\mathbf{e}_r}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Además, considerando una segunda carga puntual localizada a una distancia $\mathbf{r}$ de q_0, la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre q, es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\, q_1 = E q_1\, \mathbf{n} = \frac{q_0\, q_1}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\mathbf{n} \quad \textbf{\textit{(Ley de Coulomb).}}$$

Así, si tenemos n cargas de las cuales q_1 esta en $\mathbf{r}_1$, q_2 en $\mathbf{r}_2$, etc. , la fuerza electrostática que estas cargas ejercen sobre una carga q_0 localizada en $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F}\,(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|^2}\,\mathbf{n}_i$$

De manera similar el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}\,(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|^2}\,\mathbf{n}_i$$

7.3. Integrales de volumen.

Dado que el elemento de volumen dV es un escalar, podemos considerar las integrales siguientes,

$$\iiint\limits_R f\,dV \quad \text{y} \quad \iiint\limits_R \mathbf{F}\,dV$$

donde $f, \mathbf{F}$ son campos escalares y vectoriales respectivamente.

Dado que $dV = dx\,dy\,dz$, en coordenadas cartesianas, la segunda se puede resolver en sus componentes

$$\iiint_R \mathbf{F}\,dV = \mathbf{i}\iiint\limits_R f_1 dV + \mathbf{j}\iiint\limits_R f_2 dV + \mathbf{k}\iiint\limits_R f_3 dV$$

7.3.1. Representaciones integrales de la divergencia y el rotacional.

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ se representa como

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

donde ΔV es el volumen de la región R acotada o limitada por la superficie cerrada S. El volumen ΔV siempre contiene el punto en el cual se va a evaluar la divergencia de $\mathbf{F}$ cuando $\Delta V \to 0$.

Interpretación física.

La $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ representa el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie S. Mientras que $\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ representa el flujo neto de $\mathbf{F}$ a través de la superficie cerrada S.

Asimismo, la divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto P es el límite del flujo neto por unidad de volumen cuando S se encoge hacia el punto P.

Si el pequeño volumen que rodea a P contiene una fuente o un sumidero de un campo vectorial $\mathbf{F}$, el flujo de $\mathbf{F}$ diverge o converge a P dependiendo si $\nabla\cdot\mathbf{F}$ es positiva o negativa. Luego $\nabla\cdot\mathbf{F}$ se puede considerar como la medida de intensidad de una fuente o sumidero en P.

Notese que mediante la ecuación de la divergencia y la definición de antiderivada o integral se llega a:

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Esta relación se conoce como ***Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss.***

El rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ se expresa como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{n}_{\text{máx}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde ΔS es la superficie limitada por una curva simple cerrada C y $\mathbf{n}_{\text{máx}}$ es el vector unitario normal asociado a ΔS tal que la orientación del plano de ΔS da un valor máximo de,

$$\frac{1}{\Delta s} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o bien la componente de $\nabla \times \mathbf{F}$ en la dirección $\mathbf{n}$ es

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde ΔS es una superficie limitada por una curva cerrada C y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria asociada a $\Delta \mathbf{s}$, es decir $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{n} \Delta s$ la superficie ΔS contiene desde luego al punto P donde se evalúa $\nabla \times \mathbf{F}$.

Interpretación física.

La $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ representa la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de una curva C. $\nabla \times \mathbf{F}$ muestra la magnitud del rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ en un punto P, es decir, la intensidad de circulación en P. En general, esta depende de la orientación del plano en donde esta contiene a C. La dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$ es la dirección de máxima circulación.

Notese que la relación

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{n}_{\text{máx}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y con la definicion de antiderivada o integral se llega a la siguiente expresión:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} ds$$

que se conoce como ***el Teorema de Stokes.***

Asimismo se pueden definir:

$$\nabla \phi = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oiint_S \phi \, d\mathbf{s}$$

y el operador ∇ queda como,

$$\nabla = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \, d\mathbf{s}$$

7.4. Teoremas integrales del análisis vectorial.

Teorema de Green.

Expresa la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva plana cerrada en términos de una integral de superficie sobre la región limitada por la curva.

Orientación de la curva.

Sea D una región plana limitada por la curva C. La orientación positiva de C está dada por el vector $\mathbf{k} \times \mathbf{n}$ donde $\mathbf{n}$ es el vector normal apuntando hacia afuera a lo largo de la curva.

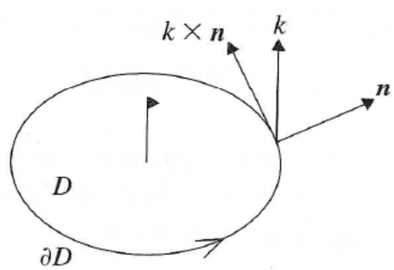


Figura 7.5.

Si D es una región en $R^2, \partial D$ es su frontera con orientación positiva y P y Q son funciones con primera derivada continua de x y y, entonces

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Mediante un ejemplo se ilustrará la aplicación del *Teorema de Green* al cálculo de áreas.

Ejemplo 7.4.1.

Sea $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ y C un circulo de radio r en dirección contra manecillas del reloj. Evalúe

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Solución:

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$

luego $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = P\, dx + Q\, dy$

Se elige D como el círculo de radio $r, \quad Q = -x \quad P = y$.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$$

luego

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (-2)\; dx\, dy = (-2) \iint_D dx\, dy = -2\pi r^2$$

El teorema de Green se puede usar para encontrar el área de una región,
Si C es la curva que limita a una región D, el área de D será:

$$A = \frac{1}{2} \int_c x\, dy - y\, dx$$

Demostración.

Sea $P = -y, \quad Q = x$, usando el teorema de Green:

$$\frac{1}{2}\int_c xdy - ydx = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{Área}_D$$

Forma vectorial del Teorema de Green. (Teorema de Stokes en el plano).

Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial diferenciable en una región D del plano.

Entonces,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$$

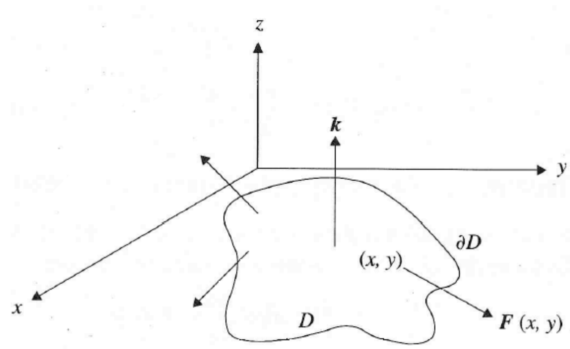


Figura 7.6.

Demostración.

Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ luego:

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \iint_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \\ &= \int_{\partial D} P\,dx - Q\,dy \\ &= \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Otras formas del Teorema de Green.

1. *Primer Teorema de Green.*

   Si ϕ, ψ son funciones escalares con segundas derivadas continuas en una región R limitada por una superficie cerrada S. Se tiene

$$\iiint_R \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) dV = \oiint_S \phi\nabla\psi\cdot d\mathbf{s}$$

2. *Segundo Teorema de Green.*

$$\iiint_R \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \oiint_S \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right)\cdot d\mathbf{s}$$

3. *Tercer teorema de Green.*

   Si $\mathbf{f}\left(\nabla\cdot\mathbf{g}\right)$ $\mathbf{f}\times\left(\nabla\times\mathbf{g}\right)$ son funciones vectoriales con segundas derivadas continuas en R limitada por la superficie S, entonces:

$$\iiint_R \left[\mathbf{f}\cdot\nabla^2\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot\nabla^2\mathbf{f}\right] dV = \oiint_S \left[\mathbf{f}\times\left(\nabla\times\mathbf{g}\right) + \mathbf{f}\left(\nabla\cdot\mathbf{g}\right) - \mathbf{g}\times\left(\nabla\times\mathbf{f}\right) - \mathbf{g}\left(\nabla\cdot\mathbf{f}\right)\right]\cdot d\mathbf{s}$$

   donde

$$\nabla^2\mathbf{f} = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{f}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{f}\right)$$

   Los teoremas primero y segundo pueden escribirse como

$$\iiint_R \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) dV = \oiint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n} ds$$

$$\iiint_R \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \oiint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) ds$$

   respectivamente.

Teorema de la Divergencia (Gauss) en el plano.

Sea D una región en el plano y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria a lo largo de la curva limitante ∂D. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en D:

$$\int_{\partial D} \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\right) dS = \iint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\ dx\,dy$$

Demostración.

La normal unitaria a ∂D es: $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ donde $\mathbf{C}$ parametriza ∂D y $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{c}'}{|\mathbf{c}'|}$ es la tangente unitaria.

Entonces:

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = -\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T})\, ds$$

pero

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) = (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{T}$$

y además $d\mathbf{s} = \mathbf{T}\, ds$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot n) d\mathbf{s} = \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T} d\mathbf{s} = \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$$

Si ahora se define $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{k} \times \mathbf{F} = A\mathbf{j} - B\mathbf{i}$ y aplicando el teorema de Green (usando $P = -B$ y $Q = A$), se tiene

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$$

Significado Físico.

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$$

El flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la curva limitante ∂D (lado izquierdo de la igualdad), representa la integral sobre D de la razón $\nabla \cdot \mathbf{F}$ a la que se crea área de flujo. (lado derecho de la igualdad).

En particular si el fluido no se expande ni se comprime, $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv 0$ y el flujo neto a través de ∂D es cero.

Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss para tres dimensiones.

Sea S una superficie cerrada el limite o frontera (orientada por la normal hacia afuera) de un volumen V en R^3. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial diferenciable definido en V, entonces

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

La integral sobre V de la divergencia de f representa el flujo de F a través de S.

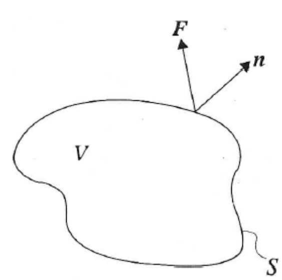


Figura 7.7.

Demostración.

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ y sea S, un hemisferio de radio unitario y la región R el círculo unitario en el plano $x\,y$.

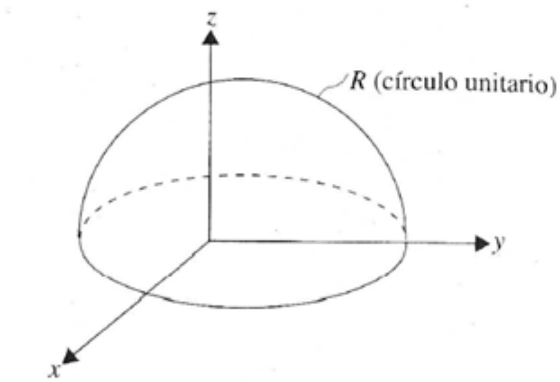


Figura 7.8.

Sea

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

en el hemisferio $\mathbf{n} = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$

luego $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = x^2+y^2+z^2 = 1$. Es decir:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_S ds = 2\pi$$

Por otro lado en la región R, tenemos $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$

Entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -z$ luego en R:

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = -\iint z\,dx\,dy = 0$$

puesto que $z = 0$ en todo R.

Por otro lado:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 3$$

$$\Rightarrow\quad \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_V dV = 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi$$

es decir:

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

Algunas aplicaciones del Teorema de la divergencia.

Ecuación de Conservación de materia.(Continuidad).

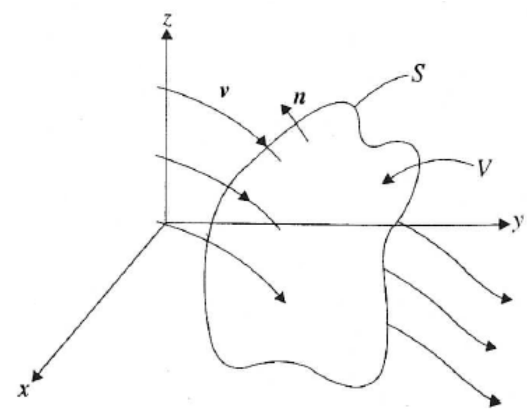


Figura 7.9.

Supongamos que en alguna región del espacio fluye alguna propiedad. (materia, carga eléctrica, etcétera). Nos preguntamos ¿Cuál es la razón o rapidez de cambio o el flujo en este volumen?

En cualquier instante t, la cantidad de propiedad en V es:

$$\iiint_V \rho\,(x, y, z, t)\ dV$$

la razón a la cual esta cambiando será:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,(x, y, z, t)\ dV = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

cuando ρ es continua con respecto a t.

Por otro lado $\mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ es el volumen que atraviesa a través de un elemento de superficie y $\rho\mathbf{v}\cdot ds$ es el volumen de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Es decir, la razón a la cual el fluido pasa por la superficie S es

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

Ahora bien, la razón o rapidez a la cual la cantidad de fluido en V cambia, es igual a la razón a la cual fluye a través de la superficie S. Es decir:

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = -\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

donde el signo negativo significa que la integral de superficie es positiva para un flujo neto, la cantidad de flujo sólo puede cambiar hacia afuera del volumen de flujo.

Además. El volumen V sólo puede cambiar debido a la cantidad de fluido que pasa a través de su frontera S. Esto es un principio de conservación. Mediante el teorema de divergencia, se tiene

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\,dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\,dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Usando la identidad vectorial

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = \rho\,(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho$$

la rotación se puede expresar como;

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

donde

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho \quad \text{es la derivada material.}$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})$$

$$\text{o bien} \quad \frac{D\rho}{Dt} = \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

Esta última expresión se conoce como la *Ecuación de Conservación de Masa o Ecuación de Continuidad.* Obviamente, si ρ representa la densidad y no es función ni de la posición ni del tiempo ($\rho = cte.$), la ecuación se reduce a

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

Esta relación se conoce como la *ecuación de continuidad para materiales incompresibles.* Ahora bien, si la densidad de corriente de un campo eléctrico es, $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Entonces

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$$

Será la ecuación de conservación correspondiente.

Teorema de Stokes.

Sea S una superficie limitada por una curva cerrada C. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con primeras derivadas parciales continuas en la superficie S y su frontera. Entonces,

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \iint_S \mathbf{n}\cdot\nabla\times\mathbf{F}\,ds$$

(nótese que S es cualquier superficie cuyo límite sea la curva C).

Interpretación Física.

El rotacional de un campo vectorial **F** es la intensidad de circulación en un punto de F. El teorema de Stokes dice que la circulación total alrededor de una curva cerrada C es igual al flujo de rotacional de **F** a través de cualquier superficie encerrada por C.

La integral de línea de la componente tangencial de un campo vectorial sobre alguna curva cerrada es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de esa función o campo integrada sobre cualquier superficie que tenga como frontera la curva C .

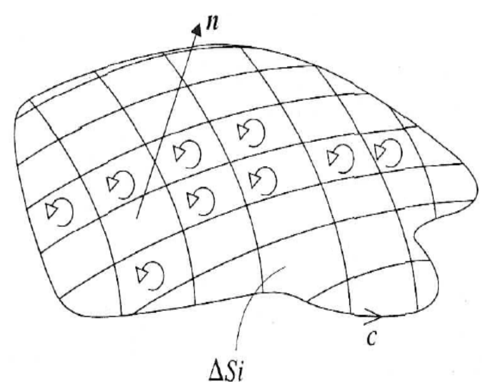


Figura 7.10.

Una forma poco ortodoxa pero eficaz de recordar el Teorema de Stokes, sería imaginar un flechazo de cupido al corazón de un adolescente. El teorema se expresaría entonces como *la cantidad de amor (léase circulación) que circula por un corazón no depende del tamaño del mismo , sino exclusivamente de la intensidad del flechazo.*

Nota: El lector puede eliminar la definición anterior si esta le parece fuera de contexto.

Aplicaciones

Ley de Ampere.

Consideremos un circuito cerrado C alrededor de una corriente I.

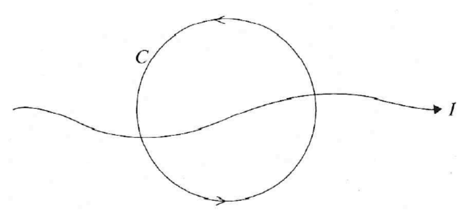


Figura 7.11.

Nótese que la dirección de C y la de **I** corresponden a la regla de la mano derecha (positiva).

La ley de Ampere dice que la integral de línea del campo magnético **B** esta relacionada con la corriente **I** por medio de

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} ds = \mu_0 \mathbf{I}$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacio $1.257 \times 10^{-6} \left[\dfrac{N}{A^2}\right]$

Al introducir la densidad de corriente $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, si la corriente fluye a través de un área ΔS con normal $\mathbf{n}$, la densidad de corriente es tal que

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \Delta S$$

donde ΔI es la corriente total.

Es decir, la densidad de corriente es una función vectorial cuya magnitud es la corriente por unidad de áea y cuya dirección es la del flujo de corriente.

Si $\mathbf{J}(x, y, z)$ es la densidad de corriente, entonces la corriente total que fluye a través de una superficie S es

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

La ley de Ampere se puede expresar como:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} ds = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

donde S puede ser cualquier superficie con C como frontera. No importa si la corriente fluye por un alambre cuya sección transversal no incluye la superficie completa. Si se integra sobre una superficie mayor a la de la sección transversal del alambre recordando que $\mathbf{J} \neq 0$ para la parte de S cortada por el alambre y $\mathbf{J} = 0$ para el resto.

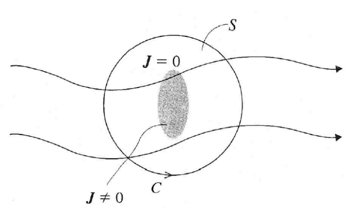


Figura 7.12.

Mediante el teorema de Stokes $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \, ds$, se tiene

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \, ds = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

y como C y S son arbitrarias, entonces

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

La cual es la *forma diferencial de la ley de Ampere.*

El problema siguiente se deja como ejercicio al lector,

1) La fuerza electromotriz ε en un circuito C es igual a la circulación del campo eléctrico $\mathbf{E}$ alrededor del circuito.

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} ds$$

Faraday descubrió que en un circuito estacionario una fuerza electromotriz es inducida por un flujo de campo magnético variable. Es decir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

donde: $\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds$

y S es cualquier superficie rodeada por C. Aplicar el teorema de Stokes para obtener lo siguiente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \textit{Ecuación de Maxwell}$$

7.5. Resumen. Capítulo 7. Integrales Vectoriales.

Representación de una superficie en forma vectorial.

Una superficie S se representa por una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector posición y u, v son parámetros. Un elemento diferencial de área $d\mathbf{s}$ queda determinado por

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,dv = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv$$

y demostramos que se puede escribir como

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n}\,ds$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie en el punto de coordenadas u, v y, por tanto

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad ; \quad ds = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\;du\,dv$$

Áreas de superficies alabeadas.

Sea la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$

$$S = \iint_R dA = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$$

$$= \iint_R \left[z_x^2 + z_y^2 + 1\right] dA = \iint_R \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|F_z|}$$

Integrales de Superficie.

La integral de superficie $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

Ahora, puesto que: $d\mathbf{s} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv$.

$$\Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{Ruv} \mathbf{F}\cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv$$

Integral de una función escalar sobre una superficie.

Sea la función escalar $f(x,y,z)$ definida sobre S y sea

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

la parametrización de S. Se define la integral de f sobre S como:

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_S f ds = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\,\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v\|\;du\,dv$$

es decir:

$$\iint_S f ds = \iint_R f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,du\,dv$$

En coordenadas cartesianas la expresión se escribe como,

$$\iint_S f ds = \iint_R f(x,y,z)\frac{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}{|f_z|}dA$$

Nótese que si $f=1$ se recupera la integral de superficie de una curva alabeada.

Integral de una función vectorial sobre una superficie.

La integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en R^3 sobre una superficie paramétrica $\mathbf{r} : D \to R^3$ es el escalar

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\, du\, dv$$

dado que $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$ donde $\mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}$ podemos escribir:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

luego la integral de superficie es la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre la superficie.

Representaciones integrales de la Divergencia y el Rotacional.

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ se representa como

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

donde ΔV es el volumen de la región R acotada o limitada por la superficie cerrada S. El volumen ΔV siempre contiene el punto en el cual se va a evaluar la divergencia de $\mathbf{F}$ cuando $\Delta V\to 0$.

Interpretación física.

La $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ representa el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie S. Mientras que $\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ representa el flujo neto de $\mathbf{F}$ a través de la superficie cerrada S.

Asimismo, la divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto P es el límite del flujo neto por unidad de volumen cuando S se encoge hacia el punto P.

Si el pequeño volumen que rodea a P contiene una fuente o un sumidero de un campo vectorial $\mathbf{F}$, el flujo de $\mathbf{F}$ diverge o converge a P dependiendo si $\nabla\cdot\mathbf{F}$ es positiva o negativa. Luego $\nabla\cdot\mathbf{F}$ se puede considerar como la medida de intensidad de una fuente o sumidero en P.

Notese que la relación

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{n}_{\text{máx}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y con la definicion de antiderivada o integral se llega a la siguiente expresión:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} ds$$

que se conoce como ***el Teorema de Stokes.***

Teoremas integrales del análisis vectorial.

Teorema de Green.

Expresa la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva plana cerrada, en términos de una integral de superficie sobre la región limitada por la curva.
Si D es una región en $R^2, \partial D$ es su frontera con orientación positiva y P y Q son funciones con primera derivada continua de x y y, entonces

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas.

Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y C un circulo de radio r en dirección contra manecillas del reloj. Al evaluar $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
Si C es la curva que limita a una región D, el área de D será:

$$A = \frac{1}{2} \int_c x\, dy - y\, dx$$

Teorema de la divergencia en el plano.

Sea D una región en el plano y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria a lo largo de la curva limitante ∂D. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en D:

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$$

Teorema de la divergencia en tres dimensiones. (Teorema de Gauss).

Sea S una superficie cerrada el limite o frontera (orientada por la normal hacia afuera) de un volumen V en R^3. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial diferenciable definido en V, entonces

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

La integral sobre V de la divergencia de f representa el flujo de F a través de S.

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\ \ dx\, dy$$

El flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la curva frontera ∂D representa la integral sobre D de la razón a la cual se esta creando flujo.

Teorema de Stokes.

Sea S una superficie limitada por una curva cerrada C. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con primeras derivadas parciales continuas en la superficie S y su frontera. Entonces,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} ds$$

(nótese que S es cualquier superficie cuyo límite sea la curva C).

Interpretación Física.

El rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ es la intensidad de circulación en un punto de F. El teorema de Stokes dice que la circulación total alrededor de una curva cerrada C es igual al flujo de rotacional de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie encerrada por C.

7.6. Ejercicios de fin de capítulo.

Ejercicio 7.1.

Mediante el Teorema de Green, calcular el valor de $\int_C (x^3 + 6xy)\,dx - 3y^3\,dy$ según la trayectoria que lleva de $P_0(0,0)$ a $P_1(1,2)$, de $P_1(1,2)$ a $P_2(4,2)$, y de $P_2(4,2)$ a $P_0(0,0)$.

Solución:

Sean

$$M(x,y) = x^3 + 6xy, \quad N(x,y) = -3y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = 0 - 6x = -6x$$

$$R = \{\,(x,y)|\, 0 \leq y \leq 2; \frac{y}{2} \leq x \leq 2y\}$$

$$\begin{aligned}
\int_C M dx + N dy &= \int\int_R \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} dA \\
&= \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{2y} -6x\,dx\,dy = \int_0^2 (3x^2)\Big|_{\frac{y}{2}}^{2y} dy \\
&= \int_0^2 -12y^2 + \frac{3}{4}y^2\,dy = \left.\frac{15}{4}y^3\right|_0^2 = -30
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.2.

Calcula la integral de superficie $\displaystyle\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ del campo $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ donde S es la superficie lateral del cilindro $x^2+y^2 = a^2$, limitado por los planos $z = 0$ y $z = 3$.

Solución:

El campo $\mathbf{F} = xy^2\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + y^2 z\,\mathbf{k}$ puede expresarse como: $\mathbf{F} = y^2(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$ y en coordenadas cilíndricas $\mathbf{F} = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta(\rho\mathbf{e}_\theta + z\mathbf{e}_z)$ el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ tiene un ecuación $\rho = a$ y su vector normal es $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ por lo tanto

$$ds = |h_\rho\mathbf{e}_\theta \times h_z\mathbf{e}_z|d\theta\,dz$$

$$ds = |\mathbf{e}_\rho|h_\theta h_z\,d\theta\,dz$$

$$ds = \rho d\theta dz \quad \text{sobre el cilindro } ds = a\,d\theta\,dz$$

la componente del campo $\mathbf{F}$ sobre la normal es

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta = a^3 \operatorname{sen}^2\rho$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} a^3 \operatorname{sen}^2\theta(a)\,d\theta\,dz \\
&= a^4 \int_0^3 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\Big|_0^{2\pi} dz \\
&= a^4\pi \int_0^3 dz = 3\pi a^4
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.3.

Utilizar el teorema de Green para calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 16$.

Solución:
Segun el teorma de Green, el valor del área de una región está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int xdy - ydx$$

por simetría de la región, el valor del área pedida es cuatro veces el valor del área de la región mostrada en la figura, por tanto,

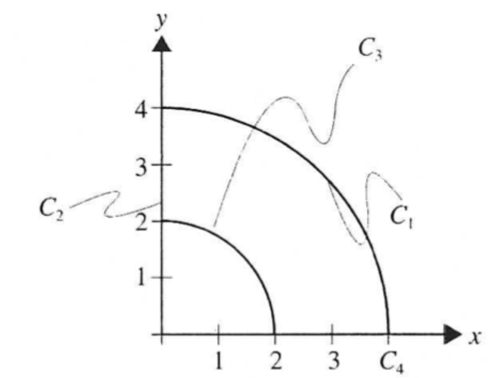


Figura 7.13.

donde

$$A = \frac{4}{2}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + + \int_{C_3} + \int_{C_4}\right)$$

Para

$$C_1 : \begin{cases} x = 4\cos(t) \\ y = 4\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad \text{con } t : 0 \to \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{C_1} x\,dy - y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\,\mathrm{sen}^2 t + 16\cos^2 t)dt$$

Para

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } t : 4 \to 2$$

$$\int_{C_2} x\,dy - y\,dx = \int_4^2 0dt - t(0)dt = 0$$

Para

$$C_3 : \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad \text{con } t : \frac{\pi}{2} \to 0$$

$$\int_{C_3} xdy - ydx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2 t)dt$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 dt = 4t|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 2\pi$$

Para

$$C_4 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con } t : 2 \to 4$$

$$\int_{C_4} x\,dy - y\,dx = \int_0^4 t(0)dt - (0)dt = 0$$

Por lo tanto el valor del área pedida es:

$$A = 2(8\pi + 0 - 2\pi + 0) = 12\pi \left[u^2\right]$$

Ejercicio 7.4.

Utilizar el teorema de Gauss para calcular

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

donde $\mathbf{F} = -xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ y S es la superficie cerrada que envuelve a la región del primer octante limitada por $x + z = 4$ y $x^2 + 4xy = 16$.

Solución:

El teorema de Gauss establece que

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int\int\int_R \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

así

$$\nabla \mathbf{F} = -y + 2x - 2z = -y$$

$$R = \{\,(x, y, z)|\, 0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2}; 0 \le z \le 4 - x\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= -\int_0^4 \int_0^{\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}} dx \int_0^{4-x} y\,dz\,dy\,dx \\
&= -\int_0^4 \int_0^{\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}} dxy(4 - x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2}xy^2 - 2y^2 \Big|_0^{\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}} dx \\
&= -\int_0^2 \frac{1}{2}(x - 4)\left(4 - \frac{1}{4}x^2\right) dx \\
&= -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 8x\Big|_0^4 \\
&= -\frac{40}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.5.

Utilizar el teorema de Gauss para calcular

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

donde $\mathbf{F} = (2xz)^2\mathbf{i} + (-xy)\mathbf{j} + (-z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie cerrada que envuelve a la región del primer octante limitada por $y + z = 4$ y $4x^2 + y^2 = 16$.

Solución:

El teorema de Gauss establece que

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int\int\int_R \nabla\cdot\mathbf{F}dV$$

así

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 2z - x - 2z = -x$$

$$R = \{\,(x,y,z)|\,0 \le x \le 2; 0 \le y \le \sqrt{16-4x^2}; 0 \le z \le 4-y\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= -\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}}\int_0^{4-y} z\,dx\,dy\,dz \\
&= -\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}} x(4-y)\,dy\,dx \\
&= -\int_0^2 x\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{16-4x^2}} dx \\
&= -\int_0^2 8\sqrt{4-x^2} - \frac{4x}{2}(4-x^2)dx \\
&= -\int_0^2 8\sqrt{4-x^2} - 8x + 2x^3dx \\
&= -\frac{8}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 4x^2 - \frac{2}{4}x^4\Bigg|_0^2 \\
&= (16-8) - \frac{64}{3} = 8 - \frac{64}{3} = \frac{40}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.6.

Calcular el área de la superficie del paraboloide de ecuación $az-a^2+x^2+y^2=0$, que se encuentra por arriba del plano xy.

Solución:

$$F(x,y,z) = az - a^2 + x^2 + y^2 = 0$$

de donde

$$az - a^2 = -(x^2+y^2)$$

$$\text{si } z = 0$$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

de donde

$$R = \{(\rho,\theta) |\, 0 \le \rho \le a; \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Sea

$$A = \int\int_R dS = \int\int_R \frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\kappa|}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\mathbf{F}}{|\nabla\mathbf{F}|} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + a\,\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4x^2+a^2}}; \quad |\mathbf{n}\cdot\kappa| = \frac{a}{\sqrt{4(x^2+x^2)+a^2}}$$

$$A = \int\int_R \frac{\sqrt{4(x^2+x^2)+a^2}}{a}\,dx\,dy$$

$$A = \frac{1}{a}\int_R \sqrt{4\rho^2+a^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$A = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{8}\frac{(4\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{12a}\int_0^{2\pi}\left[(4a^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right]d\theta$$

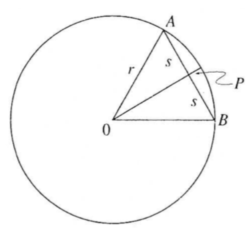
$$A = \frac{1}{12a}\left[(5a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right](\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{12}(\sqrt{5^3}-1)2\pi = \frac{\pi a^2}{12}(5\sqrt{5}-1)\left[u^2\right]$$

Capítulo 8

Ejercicios Finales.

E.F. 1. Calcular mediante de las diferenciales, el error máximo que se obtiene al determinar el radio r de un arco de circunferencia AB con centro en el punto O, sabiendo que la cuerda $2s$ mide $30.8[m]$ y la flecha P mide $5.74[m]$, con posibles errores de $\pm 0.3[cm]$ y $\pm 0.5[cm]$, respectivamente.



R.F. 1. De la figura, aplicando el teorema de Pitágoras $(r-P)^2+S^2=r^2$ se tiene desarrollando $r^2-2rP+P^2+S^2-r^2=0$; $2rP=P^2+S^2$

$$\Rightarrow r=\frac{P^2}{2P}+\frac{S^2}{2P}=\frac{P}{2}+\frac{S^2}{2P}$$

$$dr=\frac{\partial r}{\partial P}dP+\frac{\partial r}{\partial S}dS \qquad (1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial P}=\frac{1}{2}-\frac{S^2}{2P^2}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial P}\right|_P=\frac{1}{2}-\frac{(30.8)^2}{8(5.74)^2}$$

$$=0.5-3.599=-3.099$$

$$\frac{\partial r}{\partial P}=\frac{5}{P}, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial P}\right|_P=\frac{30.8}{2(5.74)}2.6824$$

$$dP=\pm 0.005\,[m]$$
$$dS=\pm 0.003\,[m]$$

Sustituyendo en

$$dr=-3.09(-.005)+2.6829(.003)$$
$$dr=0.1545+.008408$$
$$dr=0.023498[m]$$

E.F. 2. Dada la función

$$f(x,y)=ay^3-xy^2+cxy$$

1. Obtener las coordenadas de los puntos críticos.
2. Determinar la naturaleza de los puntos críticos.
3. ¿Qué valores deben tener a y c para que uno de los puntos críticos sea $P(15,5)$?

$$f(x,y)=ay^3-xy^2+cxy, P(15,5)$$

R.F. 2. 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-y^2+cy=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3ay^2-2xy+cx=0 \qquad (2)$$

Los puntos críticos son: $P_1(0,0)$; $P_2(3ac,c)$

2.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2y+c\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y}=6ay-2x\end{array}\right\} H=-(c-2y)^2$$

Como $H<0$, P_1 y P_2 son puntos silla.

3. De P_2 tenemos $c=5$

$$3ac=15 \quad \Rightarrow a=1$$

E.F. 3. Una partícula se mueve en una trayectoria dada por la función vectorial

$$r\,(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{\pi} t\,\mathbf{k}$$

donde t es el tiempo.

1. Determinar la rapidez con la que la partícula se está alejando del origen cuando se encuentra en el punto $P(0,1,2)$.

2. Obtener T, N, B, k y τ para cualquier punto.

R.F. 3.

1. Sea D la distancia del origen al punto,

$$D = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{\pi 2} t^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2} t^2}$$

Y la rapidez está dada por:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{t}{\pi^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2} t^2}}$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{t=2\pi} = \frac{2}{\pi\sqrt{5}}$$

2.

$$\mathbf{r}\,(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{\pi} t\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \frac{1}{\pi}\,\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\pi}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \frac{1}{\pi}\mathbf{k}\right)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}\right)$$

$$k\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{\pi^2}{\pi^2+1} \left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}\right)$$

$$k = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{\pi^2}{\pi^2+1}, N = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & -\operatorname{sen} t & \frac{1}{\pi} \\ -\operatorname{sen} t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(\frac{\cos t}{\pi}\mathbf{i} - \frac{\operatorname{sen} t}{\pi}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}\right)$$

$$-\tau\mathbf{N}\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \frac{\frac{d\mathbf{B}}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|}$$

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}\right)$$

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} \left(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}\right)$$

$$\tau = -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$$

E.F. 4. Sea el campo vectorial definido por

$$\mathbf{v} = (2x + ay + 4z)\,\mathbf{i} + (-x - 3y + bz)\,\mathbf{j} + (cx + 2y + z)\,\mathbf{k}$$

donde a, b, y $c \in R$. Obtener los valores de a, b, y c para que le campo sea irrotacional.

R.F. 4. Para que el campo sea irrotacional,

$$rot\,\mathbf{v} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x + ay + 4z) & (-x - 3y + bx) & (cx + 2y + z) \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = (2 - b)\,\mathbf{i} - (c - 4)\,\mathbf{j} + (-1 - a)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

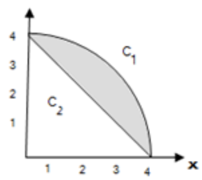
Resolviendo,

$$a = -1$$
$$b = 2$$
$$c = 4$$

E.F. 5. Utilizando la integral de la línea, obtener el área de la región limitada por las curvas,

$$c_1 : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \operatorname{sen} 4t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \quad , c_2 : \{x + y = 4$$

R.F. 5. Para obtener el área de la región,



Del teorema de Green

$$A = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx$$

De donde

$$A = \frac{1}{2}\int_{c_1} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{c_2} x\,dy - y\,dx$$

para la curva C_2 $0 \le t \le 4$

$$x = 4\cos t$$
$$dx = -4\operatorname{sen} t\,dt$$
$$y = 4\operatorname{sen} t$$
$$dy = -4\cos t\,dt$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_{c_2} x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2\, t\right) dt \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

para la curva C_2 $0 \le x \le 4$

$$y = -x + 4$$
$$dy = -dx$$

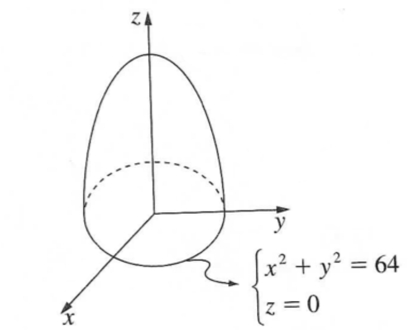
$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_{c_2} x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-x\,dx - (-x+4)\ dx\right) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} A &= I_1 + I_2 \\ &= 4\pi - 8\left[u^2\right] \simeq 4.56637\left[u^2\right] \end{aligned}$$

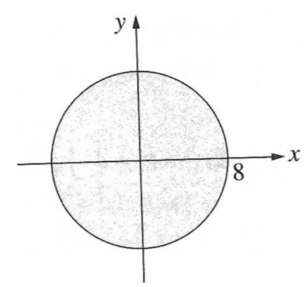
E.F. 6. Una catedral tiene una cúpula cuya forma es la de un paraboloide de revolución de ecuación $4z = 64 - x^2 - y^2$. Se sabe que un pintor cobra por mano de obra \$20.00 por metro cuadrado, mientras que el bote de pintura que rinde para $40m^2$ cuesta \$90.00

1. ¿Cuál es el área de la cúpula?
2. ¿Cuál es el costo total por pintar la cúpula?



R.F. 6.

1. La región de integración es:



$$A = \int\int_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

$$dA = \int_R \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1}\,dx\,dy$$

Pero definiendo la región en coordenadas polares,

$$R_{\rho\theta} = \{(\rho,\theta)\,/0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le \rho \le 8; \rho,\theta \in IR\}$$

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=8}\sqrt{\frac{1}{4}\rho^2 + 1}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\sqrt{\frac{1}{4}\rho^2 + 1}\right]^{\frac{3}{2}} d\theta\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=8}$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\sqrt{4913}-1\right)d\theta$$
$$= \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{4913}-1\right)\left[u^2\right]$$
$$\simeq 578.83\left[u^2\right]$$

2.

$$\text{Número de botes} = \frac{578.83}{40} = 14.47$$
$$\text{Costo} = (14.47)(90) + (578.83)(20) = 12878.9$$

El costo total es $12878.90

E.F. 7. Determinar los máximos, los mínimos y/o los puntos silla de la función.

$$f\left(x,y\right) = 2x^3 + 12xy - 96x - 2x^2 + 150$$

R.F. 7. Para los puntos críticos

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 0, \quad 3x^2 + 12y + 96 = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0, \quad 12x - 4y = 0 \qquad (2)$$

De (2)

$$y = 3x \qquad (3)$$

(3) en (1)

$$3x^2 + 36x + 96 = 0$$
$$x^2 + 12x + 32 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases}-4\\-8\end{cases}, y = \begin{cases}-12\\-24\end{cases}$$

De donde los puntos críticos son

$$P\left(-4,-12\right) \text{ y } Q(-8,-24)$$

Ahora

$$h = \begin{vmatrix}6x & 12\\12 & -4\end{vmatrix} = -24\left(x+6\right)$$

Y evaluando,

$$\frac{h}{p} = -24(2) < 0$$
$$\Rightarrow \text{hay un punto silla en } P(-4,-12,-10)$$

$$\frac{h}{Q} = -24(-2) > 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(-8) < 0$$
$$\Rightarrow \text{hay un punto silla en } Q(-8,-24,22)$$

E.F. 8. Demostrar que el paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera, es un cubo.

R.F. 8. Considerando al origen como centro de la esfera, se tiene para el paralelepípedo

$$V = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$$

En donde $P(x,y,z)$ es un punto de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Así entonces la función de Lagrange es

$$L = 8xyz - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2\right)$$

De donde

$$\frac{\delta L}{dx} = 0, \quad 8yz - 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\delta L}{dy} = 0, \quad 8xz - 2\lambda y = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\delta L}{dz} = 0, \quad 8xy - 2\lambda z = 0 \qquad (3)$$
$$\frac{\delta L}{d\lambda} = 0, -\left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2\right) = 0 \qquad (4)$$

De (1) y (2)

$$\lambda = \frac{8yz}{2x} = \frac{8xz}{2y}, y^2 = x^2 \Rightarrow y = x \qquad (5)$$

De (1) y (3)

$$\lambda = \frac{8yz}{2x} = \frac{8xz}{2y}, z^2 = x^2 \Rightarrow z = x \qquad (6)$$

De (5) y (6) se concluye que, en efecto, el paralelepípedo dado es un cubo.

E.F. 9. Sea la curva de ecuación

$$\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \sqrt{3}\cos t\mathbf{k}$$

1. Comprobar que la curva se encuentra contenida en un plano.
2. Determinar el radio de la curvatura
3. Obtener el vector binormal.

R.F. 9.

1. Se tiene

$$\sigma = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''}{\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right|^2} = \frac{0}{4^2} = 0$$
$$\Rightarrow \text{la curva es plana}$$

2.
$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{2^3}{4} = 2$$

3.
$$\mathbf{B} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{1}{4}(-2\sqrt{3}, 0, 2)$$

E.F. 10. Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de

$$\mathbf{r} = (\sec t)\,\mathbf{i} + (2\cos s \tan t)\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} s \tan t)\,\mathbf{k}$$

$$\text{en el punto } P\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1\right)$$

R.F. 10.

Para el punto

$$\left.\begin{array}{r} x = \sqrt{2} = \sec t \\ y = \sqrt{3} = 2\cos s \tan t \\ z = 1 = 2\operatorname{sen} s \tan t \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, s = \frac{\pi}{6}$$

Por otra parte

$$\frac{\delta r}{\delta t} = \sec t \tan t\mathbf{i} + 2\cos s\sec^2 t\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} s\sec^2 t\mathbf{k}$$
$$\frac{\delta r}{\delta t} = 2\operatorname{sen} s \tan t\mathbf{j} + 2\cos s \tan t\mathbf{k}$$

De donde

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} \times \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right|_P = 8\mathbf{i} - \sqrt{6}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente está dada por

$$8\left(x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{6}\left(y - \sqrt{3}\right) - \sqrt{2}\,(z-1) = 0$$
$$8x - \sqrt{6}y - \sqrt{2}z - 4\sqrt{2} = 0$$

E.F. 11. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F} = 4yz\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} + 3xy\,\mathbf{k}$$

Calcular el trabajo que debe realizar **F** para desplazar a una partícula desde el punto $P(2,4,3)$ hasta el punto $Q(-1,1,3)$, siguiendo la trayectoria dada por la curva

$$C\begin{cases} y = x^2 \\ z = 3 \end{cases}$$

R.F. 11. Sustituyendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 4\left(x^2\right)(3)\,\mathbf{i} - 2x\,(3)\,\mathbf{j} + 3x\left(x^2\right)\mathbf{k} \\ &= 12x^2\mathbf{i} - 6x\mathbf{j} + 3x^3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\ &= x\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \\ d\mathbf{r} &= dx\,\mathbf{i} + 2xdx\,\mathbf{j} \end{aligned}$$

Así entonces

$$\mathbf{F} \cdot dr = \left(12x^2\right)(dx) + (-6x)(2xdx) + \left(3x^3\right)(0) = 0$$

De donde

$$T = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

E.F. 12. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2xy - y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 3x\right)\mathbf{j}$$

Obtener, mediante el teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

En donde C es la curva que limita a la región interior a la cardioide

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

y exterior a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4$$

R.F. 12.

Dados

$$M = 2xy - y, \quad N = x^2 + 3x$$

Se tiene

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = (2x+3) - (2x-1) = 4$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2}R\begin{cases} 2 \le r \le 2 + 2\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot dr &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2+2\cos\theta} 4r\,dr\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (2)^2\right] d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta) d\theta \\ &= 4\,(8+\pi) = 44.57 \end{aligned}$$

E.F. 13. Calcular el área de la sección de la superficie

$$y = 8 - x^2 - z^2$$

que se encuentra a la derecha de

$$y = x^2 + z^2$$

R.F. 13.
Para la región

$$y = y \Rightarrow x^2 + z^2 = 8 - x^2, x^2 + z^2 = 4$$

Para el integrando

$$\sqrt{\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta z}\right)^2 + 1} = \sqrt{(-2x)^2 + (-2z)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{4\left(x^2 + z^2\right) + 1}$$
$$= \sqrt{4r^2 + 1}$$

Así entonces

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r \, dr \, d\theta$$
$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left[\left(4r^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{12} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right) \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right) \left[u^2\right]$$
$$= 36.177 \left[u^2\right]$$

E.F. 14. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (**V**) o falsas (**F**).

1. Las curvas de nivel de $z = 2x^2 + 4y^2$ son elipses.
2. Si $f_x(0,0) = f_y(0,0)$, entonces $f(x,y)$ es continua en el origen.
3. La intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $ax + by + cz = 0$ es una curva con curvatura constante 1.
4. $\int_0^1 \int_0^x f(x,y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y) \, dy dx$
5. La divergencia de un campo vectorial es otro campo vectorial

R.F. 14.

1. **V**
2. **F**
3. **V**
4. **F**
5. **F**

E.F. 15. Obtener la variación aproximada de la función

$$z = \frac{x + y}{x - y}$$

Cuando x cambia de $x = 2$ a $x = 2.5$ y y de $y = 4$ a $y = 4.5$

R.F. 15. La variación aproximada se obtiene mediante dz.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$
$$dz = \frac{-24dx + 2x \, dy}{(x - y)^2}$$

$$P(2,4), \quad dx = 0.5, \quad dy = 0.5$$

Sustituyendo

$$dz = \frac{-2\,(4)\,(0.5) + 2\,(2)\,(0.5)}{(2 - 4)^2} = -0.5$$

E.F. 16. La superficie de un lago está representada por una región D en el plano xy de manera que la profundidad (en metros) bajo el punto correspondiente a (x,y) es $f(x,y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Una niña esta en el agua en el punto $(4,9)$.

1. ¿En qué dirección debe nadar para que la profundidad del agua bajo ella disminuya más rápidamente?
2. ¿Cuál es la máxima tasa de cambio de la profundidad?

R.F. 16.

1. Puesto que la función f representa profundidad, debe nadar en la dirección contraria a la del gradiente.

$$u = -\nabla f$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = -4x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$$

$$\nabla f\Big|_{(4,9)} = -4\,(4)\,\mathbf{i} - 6\,(9)\,\mathbf{j}$$
$$= -16\mathbf{i} - 54\mathbf{j}$$

Finalmente, debe nadar en dirección del vector $\mathbf{u}$.

$$\mathbf{u} = 16\mathbf{i} + 54\mathbf{j}$$

2. La máxima tasa de cambio está dada por $|\nabla f|$ luego,

$$\left| \nabla f|_{(4,9)} \right| = \sqrt{(-16)^2 + (-54)^2}$$
$$= \sqrt{3175} = 2\sqrt{793} \approx 56.32$$

E.F. 17. Obtener y clasificar, si existen, los valores extremos de la función.

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$$

R.F. 17.

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 4y^3 = 0 \qquad (2)$$

De

$$x = -\frac{y^2}{2} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$-y^2(y) + 4y^3 = 0$$
$$-y^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 12y^2$$

Si

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Entonces

$$g(0,0) = 0$$

y el criterio de la segunda derivada no decide. Pero,

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2 = \left(x + y^2\right)^2 - xy^2$$

Si $x < 0$ de 4 se tiene que $f(x,y) > 0$

Si $x > 0$ de $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$ se observa que $f(x,y) > 0$

El signo de y no afecta pues aparece elevada a potencias pares.

Finalmente se concluye que el mínimo de $f(x,y)$ es 0, en el punto $P(0,0)$.

E.F. 18. Obtener la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ que represente la curva generada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad z = x^2$$

R.F. 18. De $x = 2\operatorname{sen} t$ y puesto que $x^2 + y^2 = 4$ es un cilindro circular recto, $y = 2\cos t$, finalmente

$$z = x^2 = 4\operatorname{sen}^2 t$$
$$\therefore F(t) = 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 4\operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}$$

E.F. 19. Dada la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{r}$ representa la posición de una partícula en función del tiempo t, obtener las componentes y del vector aceleración en cualquier instante.

R.F. 19.

$$\mathbf{r}(t) = \left[t, t^2, t^3\right]$$
$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}(t) = \left[1, 2t, 3t^2\right]$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [0, 2, 6t]$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$
$$a_T = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$
$$a_N = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

E.F. 20. Obtener el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$$

al desplazar una partícula del punto $A(0,0)$ al punto $B(1,3)$ a lo largo de la curva.

R.F. 20.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (2x+y)dx + (x+2y)dy$$

$$y = 3x^2 \qquad dy = 6xdx \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$= \int_0^1 \left[(2x+3x^2)dx + (x+6x^2)(6xdx) \right]$$

$$= \int_0^1 \left[(2x+9x^2+36x^3)dx \right]$$

$$= \left[x^2 + 3x^3 + 9x^4 \right]_0^1$$

$$= 1+3+9 = 13 \text{ unidades de trabajo}$$

Otro método:

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+2y & 0 \end{vmatrix} = (1-1)\mathbf{k}$$

$\mathbf{F}$ es conservativo, y admite función potencial ϕ.

$$\phi = x^2 + xy + y^2 + c, \quad \text{c=constante}$$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi \Big]_4^B$$

$$= \left[(1)^2 + (1)(3) + (3)^2 + c \right]$$

$$= 13 + c \text{ unidades de trabajo}$$

E.F. 21. Evaluar

$$\int\int_R 48xy\, dx\, dy$$

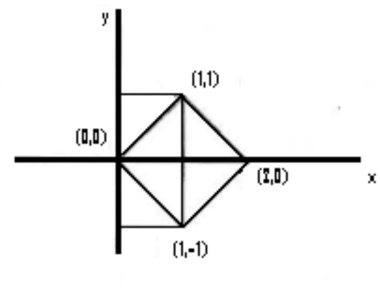
utilizando el cambio de variables

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

donde la región R es el cuadrado con vértices $V_1(0,0)$, $V_2(1,1)$, $V_3(1,21)$.

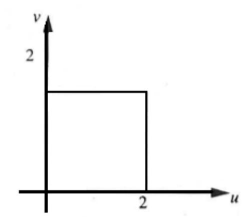
R.F. 21.

$$\mathbf{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



$$x = y \Rightarrow v = 0$$
$$x = -y \Rightarrow u = 0$$
$$y = -x+2 \Rightarrow u = 2$$
$$y = x-2 \Rightarrow v = 2$$

La región en uv es



$$\int\int_{Rxy} F(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{Ruv} F\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\, dv$$

$$\int\int_{Ruv} 48xy\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^2 48 \left[\frac{1}{2}(u+v)\right] \left[\frac{1}{2}(u-v)\right] \left(\frac{1}{2} dv\, du\right)$$

$$= 6 \int_0^2 \int_0^2 \left(u^2 - v^2\right) dv\, du$$

$$= 6 \int_0^2 \left(2u^2 - \frac{8}{3} du\right)$$

$$= 6 \left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{8}{3}u\right]_0^2 = 0$$

E.F. 22. Determinar las coordenadas del cilindro hiperbólico

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

que están más cerca del origen.

R.F. 22. Se requiere optimizar

$$D^2 = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeta a la restricción

$$x^2 + z^2 - 1 = 0$$

Por tanto, se propone

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - z^2 - 1)$$

Así entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0, & 2x - 2\lambda x &= 0 & (1)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0, & 2y &= 0 & (2)\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 0, & 2x - 2\lambda z &= 0 & (3)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0, & -(x^2 - z^2 - 1) &= 0 & (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{de (2)} \quad y = 0\\
&\text{de (1)} \quad \lambda = 1 \qquad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(5) \text{ en } (3) \qquad 2z + 2z = 0 \qquad \Rightarrow z = 0 \qquad (6)\\
&(6) \text{ en } (4) \qquad x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow x \pm 1
\end{aligned}$$

Los puntos son $P_1(1,0,0)$ y $P_2(-1,0,0)$.

E.F. 23. Dado un campo vectorial $\mathbf{v}$ demostrar que su divergencia es igual a la traza de su gradiente.

R.F. 23. Sea

$$\mathbf{v} = f\,\mathbf{i} + g\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$$

de donde

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial g}{dy} + \frac{\partial h}{dz} \qquad (1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}$$

$$tr\nabla \mathbf{v} = f_x + g_y + h_z \qquad (2)$$

Así entonces, de (1) y (2)

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{tr } (\nabla \mathbf{v})$$

E.F. 24. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \quad ; \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

Obtener su función potencial en coordenada polares y demostrar que dicha función satisface la ecuación de Laplace.

R.F. 24. Sean (ρ, θ) las coordenadas polares, de donde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \rho\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} &= \frac{1}{\rho^2}(\rho\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})\\
&= \frac{1}{\rho}(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_p
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \quad \mathbf{e}_\rho + 0 \quad \mathbf{e}_\theta \Rightarrow \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \phi = \ln\rho + c$$

Así entonces

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \frac{1}{d\rho} \quad \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \quad \frac{\partial^2\phi}{d\theta^2}\\
&= \frac{1}{d\rho} \quad \frac{d}{d\rho} \quad \left[\rho\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + \frac{1}{\rho^2}(0)\\
&= \frac{1}{\rho}(0) + 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

E.F. 25. Calcular el trabajo que debe realizar el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

para mover una partícula sobre la trayectoria triangular de vértices $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(0,1)$, de tal forma que la partícula recorra una vuelta en sentido antihorario.

R.F. 25. De $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$

$$\begin{aligned}
&y = 0; \qquad dy = 0; \qquad \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - t\mathbf{j}\\
&x = t; \qquad dx = dt; \qquad \mathbf{F}dr - 0 \Rightarrow T_1 = 0
\end{aligned}$$

De $V_2(1,0)$, $V_3(0,1)$

$$\begin{aligned}
&x = t; \qquad\qquad dx = dt;\\
&y = 1 - t; \qquad dy = -dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} = (1-t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}\\
&\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (1-t)dt + t\,dt = 1dt\\
&\Rightarrow T_2 = \int_0^1 1dt = t\Big]_1^0 = -1
\end{aligned}$$

De $V_3(0,1)$, $V_1(0,0)$

$$\begin{array}{lll} x = 0; & dx = 0; & \mathbf{F} = -t\mathbf{i} - 0\mathbf{j} \\ y = t; & dy = dt; & \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow T_3 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = -1$$

E.F. 26. Calcular el volumen, en el primer octante, del solido limitado lateralmente por lo cilindros

$$y^2 = bx; \qquad x^2 = by; \qquad b \in \mathbf{R}^+$$

y que queda abajo del plano

$$z = x + y$$

R.F. 26. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \int_0^b \int_{\frac{x^2}{b}}^{\sqrt{bx}} (x+y)dy\,dx \\ &= \int_0^b \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{x^2}{b}}^{\sqrt{bx}} dx \\ &= \int_0^b \left[x\sqrt{bx} + \frac{1}{2}bx - \frac{x^3}{b} - \frac{x^4}{2b^2}\right] dx \\ &= \int_0^b \left[x\sqrt{b}x^{\frac{3}{2}} + \frac{b}{2}x - \frac{1}{b}x^3 - \frac{1}{2b^2}x^4\right] dx \\ &= \left[\frac{2}{5}x\sqrt{b}x^{\frac{5}{2}} + \frac{b}{4}x^2 - \frac{1}{4b^2}x^4 - \frac{1}{10b^2}x^5\right]_0^b \\ &= \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{4}b^3 - \frac{1}{4}b^3 - \frac{1}{10}b^3 \\ &= \frac{3}{10}b^3 \end{aligned}$$

E.F. 27. Utilizando el teorema de la divergencia, obtener

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ es la superficie del cilindro

$$x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad -1 \le x \le 1$$

R.F. 27. Se tiene

$$R = \begin{cases} 0 \le r & \le 3 \\ 0 \le \theta & \le 2\pi \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int\int\int_R (\mathrm{div}\mathbf{F})\,dv \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 r^2(r\,dz\,d\theta\,dr) \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (2r^3)\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^3 (4r^3\pi\,dr) \\ &= 81\pi \end{aligned}$$

E.F. 28. Obtener los valores extremos de la función

$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$

sujeta a la restricción

$$x + y + z = 6, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

R.F. 28. La función de Lagrage es

$$L = xy^2z^3 - \lambda(x + y + z - 6)$$

de donde

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial L}{dx} = 0, & y^2z^3 - \lambda = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{dy} = 0, & 2xyz^3 - \lambda = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial L}{dz} = 0, & 3xy^2z^3 - \lambda = 0 & (3) \\ \dfrac{\partial L}{d\lambda} = 0, & x + y - 6 = 0 & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{de (1) y (2)} & y = 2x & (5) \\ \text{de (1) y (3)} & y = 2x & (6) \\ \text{(5) y (6) en} & x + (2x) + (3x) = 6 & \end{array}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2, z = 3$$

El valor extremo de f está en el punto $(1,2,3)$.

E.F. 29. Sea el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (u, v, w), definido por:

$$x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v \cos w, \quad z = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w$$

Verificar que $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,w}\right) = h_u h_v h_w$

R.F. 29. Por un lado

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} \cos v & -u\operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v\cos w & u\cos v\cos w & -u\operatorname{sen} v\operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen} v\operatorname{sen} w & u\cos v\operatorname{sen} w & u\operatorname{sen} v\cos w \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \cos v\left(u^2 \operatorname{sen} v\cos v\cos^2 w + u^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen}^2 w\right) \\ &\quad + u\operatorname{sen} v\left(u\operatorname{sen}^2 v\cos v + u\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 w\right) \\ &= \cos v\left(u^2 \operatorname{sen} v\cos v\right) + u\operatorname{sen} v\left(u\operatorname{sen}^2 v\right) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} h_u &= \left|(\cos^2 v, \operatorname{sen} v\cos w, senv\operatorname{sen} w)\right| \\ &= \sqrt{\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 w} \\ &= \sqrt{\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v} = 1 \\ h_v &= |(-u\operatorname{sen} v, u\cos v\cos w, u\cos v\operatorname{sen} w)| \\ &= u\sqrt{\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v\cos^2 w + \cos^2 v\operatorname{sen}^2 w} \\ &= u\sqrt{\cos^2 v + \operatorname{sen}^2} = u \\ h_w &= |(0, -u\operatorname{sen} v\operatorname{sen} w, u\operatorname{sen} v\operatorname{sen} w)| \\ &= u\sqrt{\operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 w + \operatorname{sen}^2 v\cos^2 w} = u\operatorname{sen} v \\ &\Rightarrow h_u h_v h_w = (1)(u)(u\operatorname{sen} v) = u\operatorname{sen} v \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica la igualdad.

E.F. 30. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}; \quad f_1, f_2, f_3 : \text{funciones de } x, y, z$$

demostrar que

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

R.F. 30. Se tiene

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$\text{div }(\text{rot}\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y}\right)$$

E.F. 31. Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

para desplazar a una partícula a lo largo de la curva

$$C : \begin{cases} y^2 - z^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

en sentido antihorario y completando una vuelta.

R.F. 31. El campo $\mathbf{F}$ es conservativo, ya que

$$\mathbf{F} = \nabla \oint, \text{ donde } \oint = xyz$$

De esta forma, el trabajo pedido es igual a cero, puesto que la trayectoria es una curva cerrada.

E.F. 32. Por medio de integrales dobles, calcular el área definida por

$$y \geq x^2 \quad , \quad y \leq x \quad , \quad y \geq 1 \quad , \quad y \leq 3$$

R.F. 32. Se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} dx\, dy \\ &= \int_1^3 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^2\right]_1^3 \\ &= \frac{3}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) - \frac{1}{4}(9-1) \\ &= 0.7974\left[u^2\right] \end{aligned}$$

E.F. 33. Utilizando integrales triples demostrar que el volumen de una esfera de radio a, es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

R.F. 33. Se tiene

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_R dx\,dy\,dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} J\left(\frac{x,y,z}{\rho,\phi,\theta}\right) d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\right) d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^a d\phi\,d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{2}{3}a^3 \Big[0\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3 \left[u^3\right]
\end{aligned}
$$

E.F. 34. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Se califican aciertos menos errores.

1. Si fx, y y $g(x,y)$ tienen el mismo gradiente, entonces son funciones idénticas.
2. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en función del tiempo. Entonces
$$\frac{d}{dt}\left|\mathbf{r}(t)\right| = \left|\mathbf{r}'(t)\right|.$$
3. Una partícula en movimiento alcanza su velocidad máxima en el instante $t = 6$ (antes y después de ese momento su velocidad es menor que cuando $t = 6$). De lo anterior de deduce que su aceleración es cero en el instante $t = 6$.
4. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas. Entonces $\operatorname{rot}(grad\, f) = \mathbf{0}$.
5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)dy\,dx = \int_0^1\int_y^1 f(x,y)dx\,dy$

R.F. 34.

1. **F.**
2. **F.**
3. **F.**
4. **V.**
5. **V.**

E.F. 35. Aproximar, utilizando diferenciales, el valor de
$$\ln\left[(1.02)^{\frac{1}{4}} + (0.96)^{\frac{1}{6}}\right]$$

R.F. 35. Se plantea
$$f(x,y) = \ln\left[(x)^{\frac{1}{4}} + (y)^{\frac{1}{6}} - 1\right]$$
sabiendo que
$$f(1,1) = \ln\left[1 + 1 - 1\right] = 0$$
Si $y_1 = f(1,1)$ y y^2 es la aproximación de
$$\ln\left[(1.02)^{\frac{1}{4}} + (0.96)^{\frac{1}{6}} - 1\right]$$
entonces

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + df\,(1,1) \\
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,,\; dx = 0.02\; dy = -0.04 \\
df &= \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}\,dx + \frac{1}{6}y^{-\frac{5}{6}}\,dy}{x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{1}{6}} - 1} \\
df(0,0) &= \frac{\frac{1}{4}(0.002) + \frac{1}{6}(-0.04)}{1} \\
&= -0.00166
\end{aligned}
$$

Finalmente
$$
\begin{aligned}
y^2 &= 0 - 0.00166 \\
&= -0.00166
\end{aligned}
$$

E.F. 36. La temperatura T en un punto $P(x,y)$ de una placa de metal colocada en el plano xy es $T = 4x^2 - xy^2$.

1. Determinar la máxima tasa de cambio de ;a temperatura en el punto $P(4,-2)$.
2. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente T en $P(4,-2)$?

R.F. 36. 1. La máxima tasa de cambio esta dada por el módulo del gradiente $|\nabla T|$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\nabla T = \left(8x - y^2\right)\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}$$

$$\nabla T\Big|_{(4,2)} = 28\,\mathbf{i} + 16\,\mathbf{j}$$

Finalmente

$$\nabla T\Big|_{(4,2)} = \sqrt{1040} = 4\sqrt{65} \approx 32.249$$

2. En la dirección del gradiente

$$\nabla T\Big|_{(4,2)} = 28\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$$

E.F. 37. Obtener el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x,y) = (xy^2)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$$

al desplazar una particula del punto $(0,0)$ al punto $(1,3)$ a lo largo de la curva $y = 3x^2$.

R.F. 37.

$$\mathbf{F} = (xy^2)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$$

$$W = \int_c \mathbf{F}\dot{d}\mathbf{r} = \int_c xy^2\,dx + x^2y$$

$$C : y = 3x^2 \quad dy = 6x\,dx \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$W = \int_0^1 \left[(3x^2)^2dx + x^2(3x^2)(6x\,dx)\right]$$

$$= \int_0^1 27x^5dx = \frac{27}{6}x^6\Big]_0^1 = \frac{27}{6}$$

$$= \frac{9}{2} \text{ unidades de trabajo.}$$

Otro método

$$\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} = (2xy - 2xy)\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

$\mathbf{F}$ es conservativo y admite función potencial ϕ

$$\phi = \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$W = \int_c \left[\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \phi\right]_A^B = \left[\frac{(1)^2(3)^2}{2} + c\right] - \left[0 + c\right]$$

$$= \frac{9}{2} \text{ unidades de trabajo.}$$

E.F. 38. Evaluar

$$\iint\limits_R 4(x^2 + y^2)dx\,dy$$

utilizando el cambio de variables

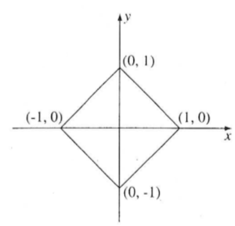
$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

donde la región R es el cuadrado con vértices $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,0)$.

R.F. 38.

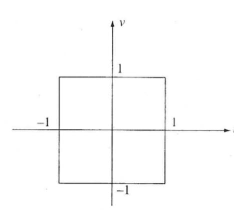
$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

La región es xy es



$$y = -x + 1 \Rightarrow u = 1$$
$$y = x - 1 \Rightarrow v = 1$$
$$y = x + 1 \Rightarrow v = -1$$
$$y = -x + 1 \Rightarrow u = -1$$

La región en uv es



$$\int\int_{Rxy} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_R uvf(x(u,v),y(u,v))\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$$

$$\int\int_{Rxy} 4(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4\left[\frac{1}{2}(u+v)^2+\frac{1}{2}(u-v)^2\right]\left(\frac{1}{2}\right) du\,dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(u^2+v^2)\,dv\,du = \int_{-1}^{1} 2\left(u^2+\frac{1}{3}\right) du$$

$$= 2\left[\frac{u^3}{3}+\frac{u}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

E.F. 39. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para determinar los semiejes de la elipse, con centro en el origen, de ecuación

$$5x^2-8xy+5y^2-6=0$$

R.F. 39. Los semiejes corresponden a la distancia, al origen, mínimo o máximo, de los puntos de la elipse. Así entonces la función objetivo es

$$d=\sqrt{x}^2+y^2$$

o también

$$d=\sqrt{0}=x^2+y^2$$

y como restricción se tiene

$$5x^2-8xy+5y^2-6$$

Por lo tanto la función de Lagrange es

$$L=x^2+y^2-\lambda(5x^2-8xy+5y^2-6$$

de donde

$$\frac{\partial L}{dx}=0, \qquad 2x-10\lambda x+8\lambda y=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{dy}=0, \qquad 2y-10\lambda x+8\lambda y=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{d\lambda}=0, \qquad -(5x^2-8xy+5y^2-6)=0 \qquad (3)$$

de (1) y (2)

$$\lambda=\frac{x}{5x-4y}=\frac{y}{5y-4x}\Rightarrow y=x \qquad (4)$$

$$\lambda=\frac{x}{5x-4y}=\frac{y}{5y-4x}\Rightarrow y=-x \qquad (5)$$

de (4) y (3)

$$2x^2-6=0 \quad x=\begin{cases} \sqrt{3},\ P(\sqrt{3},\sqrt{3}) \\ -\ \sqrt{3},\ Q(-\sqrt{3},-\sqrt{3}) \end{cases}$$

de (5) y (3)

$$18x^2-6=0 \quad x=\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3},\ R\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ -\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ S\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

Finalmente los semiejes están dados por

$$a=|\mathbf{OP}|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}$$

$$a=|\mathbf{OR}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

E.F. 40. La ecuación de una hélice circular está dada por

$$\mathbf{r}=b\cos t\mathbf{i}+b\operatorname{sen} t\mathbf{j}+at\mathbf{k};\ a,\ b\ \in\mathbf{R}$$

Demostrar que si $a^2+b^2=1$, entonces $\kappa=b$ y $\tau=a$, en cualquier punto de la hélice dada.

R.F. 40. Para la curvatura

$$r'=-b\operatorname{sen} t\mathbf{i}+b\cos t\mathbf{j}+a\mathbf{k}$$

$$T=\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}(-b\operatorname{sen} t\mathbf{i}+b\cos t\mathbf{j}+a\mathbf{k})$$

$$\frac{T}{ds}=\frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}(-b\cos t\mathbf{i}-b\operatorname{sen} t\mathbf{j})$$

$$\kappa=\left|\frac{T}{ds}\right|\frac{b}{b^2+a^2}=\frac{b}{1}\Rightarrow\kappa=b$$

Para la torsión

$$N = \frac{1}{\left|\frac{T}{ds}\right|}\frac{T}{ds} = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}(a \operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + b\mathbf{k})$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{B'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}(a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j})$$

$$\tau = \left|\frac{B}{ds}\right| = \frac{a}{b^2+a^2} = \frac{a}{1} \Rightarrow \tau = a$$

E.F. 41. Para la superficie descrita por

$$\mathbf{r}(u,v) = (v^2 - u, u^2 + v, v^2 - u^2)$$

Obtener

1. Los puntos singulares
2. La ecuacion del plano tangente en el punto $P(x,y,z)$ para el cual $u = 1$, $v = 2$.

R.F. 41. 1. Se requiere que

$$N = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2u & -2u \\ 2v & 1 & 2v \end{vmatrix} = 0$$

$$2(u + 2uv) = 0,\ u(1+2v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$2(v - 2uv) = 0,\ u(1-2v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$-(4uv+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4(0)(0)+1 = 0, \\ \text{no cumple} \\ \\ 4\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = 0, \\ \text{cumple} \end{cases}$$

de donde

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{2^3}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right) \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$$

es el punto singular

2. Valuando N y $\mathbf{r}$ se tiene

$$N(10,-4,-9), \quad P(3,3,3)$$

de donde

$$(x-3, y-3, z-3)\cdot(10,-4,-9) = 0$$

$$10x - 4y - -9z + 9 = 0, \text{ ec. plano tangente}$$

E.F. 42. Calcular el volumen del sólido del primer octante, limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = az, \quad x^2 + y2 = 2ay$$

Además, dibujar el sólido.

R.F. 42. Del enunciado

$$z = \frac{1}{a}\left(x^2+y^2\right),\ R = \{(x,y)x^2 - (y-a)^2 \le a^2\}$$

de donde

$$V = \iint\limits_R \frac{1}{a}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Ahora, cambiando a coordenadas polares

$$V = \iint\limits_R \frac{1}{a}r^2\Big(r\,dr\,d\theta\Big),\ R^3 \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2a\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

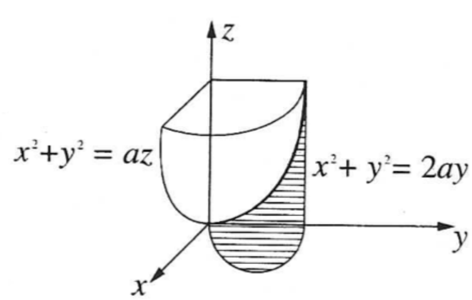
$$= 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta\,d\theta$$

$$= 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2\theta\Big)\right]^2 d\theta$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 4\theta\Big)\right] d\theta$$

$$= a^3 \left[\frac{3}{2}\theta - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\pi a^3$$

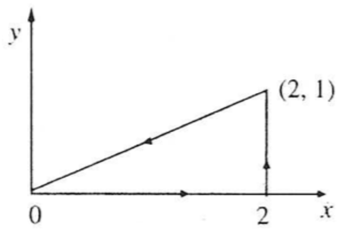
La gráfica del sólido es



E.F. 43. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{v} = (3x - 4y)\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j}$$

comprobar el teorema de Green, considerando la trayectoria



R.F. 43. Para la integral de linea

$$(0,0) \to (2,0), \begin{cases} x = t,\ dx = dt \\ y = 0,\ dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^2 3t\, dt = 6$$

$$(2,0) \to (2,1), \begin{cases} x = z,\ dx = 0 \\ y = t,\ dy = dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 (4 + 2t)\, dt = 5$$

$$(2,0) \to (2,1), \begin{cases} x = z,\ dx = 0 \\ y = t,\ dy = dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 (4 + 2t)\, dt = 5$$

$$dt = -\frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow \oint P\, dx + Q\, dy = 6 + 5 - \frac{13}{3} = \frac{20}{3}$$

Para la integral doble

$$\int_R\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_{2y}^2 (2x - 4) dxdy$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 4)_{2y}^2$$

$$= \int_0^1 (12 - 8y - 4y^2) dy$$

$$= \left[12y - 4y^2 - \frac{4}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{20}{3}$$

con lo que se comprueba el teorema de Green.

E.F. 44. Valuar la integral

$$\int\!\!\int_V\!\!\int z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

donde V es el sólido limitado en la siguiente forma

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

R.F. 44. El solido V tiene como representación en coordenadas esféricas a

$$0 \le \rho \le 2 \quad , \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4} \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

con lo que la integral está dada por

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 (\rho\cos\phi)(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}\phi\cos\phi) \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^2 d\phi\, d\theta \\
&= \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi\right]_\theta^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \frac{8}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{8}{5}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{16\pi}{5} a
\end{aligned}$$

E.F. 45. Determinar el o los valores de $k \in \mathbf{R}$, para los cuales la función

$$f(x, y) = x^2 + kxy + 3y^2$$

tendrá un mínimo en el punto $P(0, 0)$.

R.F. 45. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ky, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = k, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = kx + 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

$$h = \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 6 \end{vmatrix} = 12 - k^2 > 0$$

$$k^2, \Rightarrow -2\sqrt{3} \le k \le 2\sqrt{3}$$

E.F. 46. Obtener las coordenadas del punto, o de los puntos, de la curva

$$C \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=yz+5 \end{cases}$$

que estén mas cerca del origen

R.F. 46. Se tiene

$$d^2 = D = x^2+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow L = x^2+y^2+z^2-\lambda_1(x+y+z-1)-\lambda_2(yz-x+5)$$

por lo que

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \quad 2x-\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0, \quad 2y-\lambda_1+\lambda_2 z=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=0, \quad 2z-\lambda_1+\lambda_2 y=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0, \quad -(x+y+z-1)=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=0, \quad -(yz-x+5)=0 \qquad (5)$$

de (2) y (3)

$$z=y \qquad (6)$$

$$z=-y \qquad (7)$$

(7) en (4)

$$x_1 = 1-2y \quad , \quad x_2=1$$

(6)y x_1 en (5)

$$y^2-(1-2y)+5=0, \quad y^2+2y+4=0, \quad y \in \mathbf{R}$$

(7)y x_2 en (5)

$$-y^2-(1-2y)+5=0,$$

$$y = \begin{cases} 2 \\ -\ 2 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{cases} 2 \\ -\ 2 \end{cases}$$

Los puntos son

$$P(1,2,-2) \text{ y } Q(1,-2,2)$$

E.F. 47. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i}+(t^2+2)\mathbf{j}+(2t-1)$$

1. Determinar si la curva es plana.
2. Obtener las coordenadas del vértice de la curva (el punto de curvatura máxima).

R.F. 47. 1. Se tiene

$$\mathbf{r}' = (2t,2t,2)$$

$$\mathbf{r}' = (2,2,0) \quad ; \quad \mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''| \neq 0$$

$$\mathbf{r}''' = (0,0,0) \quad ; \quad \mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}''' = 0$$

$$\tau = 0 \Rightarrow \text{ sí es plana}$$

2.

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2t^2+1}}$$

$$\frac{dk}{dt} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(2t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}(4t)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t^2+1=0 & \Rightarrow t \in C \\ 4t=0 & \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

El punto es

$$\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

E.F. 48. Sea la función

$$f(r,\theta) = r^2(1+\cos^2\theta)$$

en donde (r,θ) son las coordenadas polares.

1. Obtener ∇f referido a la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$
2. Determinar el lapaciano de f.

R.F. 48. 1. Se tiene

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\frac{df}{dr}\mathbf{e}_r + \frac{df}{d\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$= 2r\left(1+\cos^2\theta\right)\mathbf{e}_r + r\left(-2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\mathbf{e}_\theta$$

2.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{hrho}\left[\frac{\partial}{dr}\left(\frac{ho}{hr}\frac{df}{dr}\right)\frac{\partial}{d\theta}\left(\frac{hr}{h\theta}\frac{df}{d\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}2r^2\left(1+\cos^2\theta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d}{d\theta}r\left(-2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\right]$$

$$= 4(2+\cos^2\theta)+(2\,\mathrm{sen}^2\,\theta-2\cos^2\theta)$$

$$= 4+2+\cos^2\theta+2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

$$= 4+2$$

$$= 6$$

E.F. 49. Calcular el trabajo efectuado por el campo

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})$$

para desplazar a una partícula sobre la curva

$$\mathbf{r}(t) = e^{\mathbf{t}}\cos t\,\mathbf{i} + e^{\mathbf{t}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

desde el punto $P(1,0)$ hasta el punto $Q(e^{2\pi},0)$.

R.F. 49. Se tiene

$$d\mathbf{r} = e^{\mathbf{t}}(\cos t - \operatorname{sen} t)dt\,\mathbf{i} + e^{\mathbf{t}}(\operatorname{sen} t + \cos t)dt\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\operatorname{sen}^2 t}(e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{e^{3t}}(e^{\mathbf{t}}\cos t\,\mathbf{i} + e^{\mathbf{t}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j})$$

$$= e^{-2\mathbf{t}}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-2\mathbf{t}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j})$$

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = [e^{-t}\cos t(\cos t - \operatorname{sen} t) +$$

$$e^{-t}\operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t + \cos t)]dt$$

$$= e^{-t}dt$$

$$P\begin{cases} x &= 1 = e^t\cos t \\ y &= 0 = e^t\operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$Q\begin{cases} x &= e^{2\pi} = e^t\cos t \\ y &= 0 = e^t\operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow t = 2\pi$$

Por lo tanto

$$T = \int_0^{2\pi} e^{-t}dt = \left. -e^{-t}\right]_0^{2\pi} = 1 - e^{-2\pi}$$

$$= 0.9981$$

E.F. 50. Calcular el volumen bajo la superficie

$$z = e^{(x^2+y^2)}$$

limitado por la curvatura $x^2+y^2=4$

R.F. 50. Se tiene

$$V = \int\int_R e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

pasando a coordenadas polares

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2}(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(e^4-1)\Big[0\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \pi(e^4-1)\left[u^2\right]$$

E.F. 51. Sea R una región del plano XY y C la curva que representa al contorno de R.
Demostrar que el área de la región R está dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx$$

R.F. 51. Aplicando el teorema de Green

$$\oint_c x\,dy - y\,dx = \int\int_R\left(\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dy}(-y)\right)dx\,dy$$

$$= 2\int_R dA$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx$$

E.F. 52. Un objeto se desplaza sobre un campo de radiactividad que varia según la ecuación

$$R = 1000 + \frac{2500}{4x^2+9y^2+z^2-38}$$

1. En el instante en el que el objeto está en el punto $P(3,-2,4)$ y se mueve en dirección del punto $P(6,4,2)$. ¿Cuál es la variación de la radiactividad?
2. ¿Que valor tiene la máxima variación de la radiactividad en el punto P?

R.F. 52.

1. Se tiene

$$\nabla R = -\frac{2500}{(4x^2+9y^2+z^2-38)^2}(8x,18y,2z)$$

$$\nabla R\Big|_p = -(24,-36,8)$$

$$\mathbf{PQ} = (3, 6, -2) \quad ; \quad \mathbf{e}_{PQ} = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

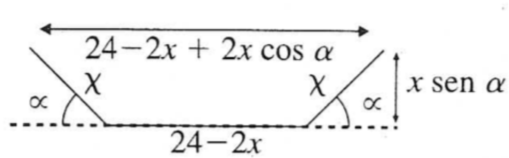
$$\Rightarrow \frac{dR}{ds} = -\frac{1}{7}(24, -36, 8) \cdot (3, 6, -2)$$

$$= -\frac{160}{7}$$

2. $$\left.\frac{dR}{ds}\right|_{\text{máx}} = |\nabla R| = 4\sqrt{121}$$

E.F. 53. Para conducir agua para riego a través de una barranca se desea construir un canal de sección trapezoidal, con hojas de lámina calibre 14. Si el ancho de las hojas es de 24 pulgadas, calcular la dimensión de la base y el ángulo de inclinación de la lámina de tal forma que el canal tenga una capacidad máxima.

R.F. 53. Dada la figura



se tiene

$$A = \frac{1}{2}[(24 - 2x) + (24 - 2x + 2x\cos\alpha)](x \operatorname{sen}\alpha)$$

de donde

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow 24 \operatorname{sen}\alpha - 4x\operatorname{sen}\alpha + 2x\operatorname{sen}(-\alpha)\cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 24x\cos\alpha + 2x^2\cos\alpha + x^2(2\cos^2\alpha + 1) = 0$$

factorizando

$$2\operatorname{sen}\alpha(12 - 2x + x\cos\alpha) = 0$$

$$x(24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + 2x\cos^2\alpha - x) = 0$$

de donde

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0, \quad \cos\alpha = \dfrac{2x - 12}{x} \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + 2x\cos^2\alpha - x = 0 \end{cases}$$

$$x = 8 \quad , \quad \alpha = 60^\circ$$

E.F. 54. Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u, v, w), el cual esta relacionado con las coordenadas cartesianas por medio de las ecuaciones

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos v = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\tan w = \frac{y}{x}$$

1. ¿El sistema (u, v, w) es ortogonal?
2. Determinar los valores de escala del sistema (u, v, w).
3. Obtener el *grad* $(u^2 \cos v \operatorname{sen} w)$, referido al sistema (u, v, w).

R.F. 54.

1. El sistema dado es el de coordenadas esféricas, para el cual es posible demostrar que si es ortogonal
2. $h_u = 1, \quad h_v = u \operatorname{sen} w, \quad h_w = u$
3. $$\nabla(u^2 \cos v \operatorname{sen} w) = \frac{1}{u}(2u\cos v \operatorname{sen} w)\mathbf{e}_u + \frac{1}{u \operatorname{sen} w}(-u^2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w)\mathbf{e}_v + \frac{1}{u}(u^2 \cos v \cos w)\mathbf{e}_w$$

E.F. 55. El campo de velocidades de un fluido en dirección de los ejes coordenados están dado por

$$\mathbf{v} = (2x^2 - xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 4xy + y^2)\mathbf{j} + (y^2 - 2xy + ayz)\mathbf{k}$$

Obtener el valor de $a \in \mathbf{R}$, de tal forma que el fluido sea incompresible.

R.F. 55. Para que sea incompresible se requiere div $v = 0$, de donde

$$(4x - y) + (-4x + 2y) + (ay) = 0 \quad , \quad a = -1$$

E.F. 56. Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{u} = (4xy + z^2 + 2)\mathbf{i} + (2x^2 - 3)\mathbf{j} + (2xz + 4)\mathbf{k}$$

posee función potencial $\phi(x, y, z)$.

En caso afirmativo, obtenerla y valuarla en el punto $P(2, 1, 2)$, considerando que $\phi(3, 2, 1) = 50$.

R.F. 56. Dado que

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{si existe } \phi$$

A partir de la diferencial exacta

$$\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

se obtiene

$$\phi = 2x^2y + xz^2 + 2x - 3y + 4z + c$$

de donde

$$\phi(3,2,1) = 50 \quad \Rightarrow \quad 50 = 43 + c \qquad c = 7$$

Por lo tanto

$$\phi(2,1,2) = 25$$

E.F. 57. Obtener los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + 2y^2 + z^2 - yz + 10$$

e indicar su naturaleza.

R.F. 57. Para los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0;\ x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

$$y = z = 0 \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y - z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow -y + 2z = 0 \end{cases}$$

con lo que

$$P(0,0,0)\,,\ Q(-2,0,0)$$

son los puntos críticos Ahora, para su naturaleza

$$H_1 = \frac{d^2z}{dx^2} = 6(x+1)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (6x+6) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 12(x+1)$$

$$H_3 = H = \begin{vmatrix} (6x+6) & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

de donde, valuando en P: en P hay un mínimo

$$\Rightarrow \begin{cases} H_1 = 6 > 0, \\ H_2 = 12 > 0, \\ H_3 = 48 > 0 \end{cases}$$

A su vez, valuando en Q: en Q no hay máximo ni mínimo

$$\Rightarrow \begin{cases} H_1 = -6 < 0, \\ H_2 = -12 < 0, \\ H_3 = -48 < 0 \end{cases}$$

E.F. 58. Si la posición de una partícula está dada por la función

$$\mathbf{r}(t) = (3t + t^3)\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} : \text{tiempo}$$

determine el instante de una partícula el cual su radio de torsión es mínimo.

R.F. 58. Se tiene

$$\mathbf{r}' = (3 + 3t^2, -3t^3, 6t)$$

$$\mathbf{r}'' = (6t, -6t, 6)$$

$$\mathbf{r}''' = (6, -6, 0)$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (18t^2 + 18, 18t^2 - 18, -36t)$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2 = (18)^2(2)(t^2+1)^2$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = (18)(12) = 216$$

de donde el radio de torsión es

$$\tau = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''} = \frac{(18)^2(2)(t^2+1)^2}{(18)(12)}$$

$$= 3(t^2+1)^2$$

el cual es mínimo para

$$\frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6(t^2+1)(2t) = 0 \quad , \quad t = 0$$

E.F. 59. Determinar si el sistema de coordenado curvilíneo (u, v, w), definido por

$$x = u + v \quad ; \quad y = u - v \quad ; \quad z = w^3$$

es ortogonal. En caso afirmativo hallar ∇f, referido a la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ siendo

$$f = 2uv^2w^2$$

R.F. 59. A partir de

$$\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + w^3\mathbf{k}$$

se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{du} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{dv} = \mathbf{i}-\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{dw} = 3w^2\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_w = \mathbf{k}$$

de donde

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w$$

por lo que el sistema (u, v, w) si es ortogonal , a su vez

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{du}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{dv}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{dw}\mathbf{e}_w$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2v^2w^2)\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{2}}(4uvw^2)\mathbf{e}_v$$
$$+ \frac{1}{3w^2}(4uvw)\mathbf{e}_w$$

E.F. 60. Obtener el trabajo necesario para mover una partícula material, desde el punto $A(3, 2, 2)$ al punto $B(1, 3, 1)$, a lo largo de cualquier trayectoria, bajo el campo

$$\mathbf{F} = (6x^2y^2z^2+3)\mathbf{i} + (4x^3yz^2+\cos y)\mathbf{j}(4x^3y^2z-7)\mathbf{k}$$

R.F. 60. Obteniendo la función potencial

$$\phi = \int p dx = \int (6x^2y^2z^2+3)dx$$

$$= 2x^3y^2z^2 + 3x + f(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \Rightarrow 4x^3yz^2 + \frac{\partial f}{dy}$$
$$= 4x^3yz^2\cos y$$

$$f(y,z) = \operatorname{sen} y + g(z)$$

$$\phi = 2x^3y^2z + 3x + \operatorname{sen} y + g(z)$$

$$\frac{\partial 0}{\partial z} = R \Rightarrow 4x^3y^2z + g(z) = 4x^3y^2z - 7$$

$$g(z) = -7z + c$$

pot lo tanto, el trabajo pedido es

$$T = \phi(B) - \phi(A)$$
$$= (14 + \operatorname{sen} 3) - (859 + \operatorname{sen} 2)$$
$$= -845.77 \text{ unidades de trabajo.}$$

E.F. 61. Calcular el área de la cúpula en forma de paraboloide de ecuación

$$z = 36 = -\frac{x^2+y^2}{25}$$

limitada por el plano XY, de donde x, y, z están en metros.

R.F. 61. Se tiene

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{-2x}{25}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{25}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{1}{625}(4x^2 + 4y^2 + 625)$$

$$= \frac{1}{625}(625 + 4r^2)$$

Ahora para la región

$$\frac{900 - x^2 - y^2}{25} = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = 900$$

$$R_{r\theta} \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 30 \end{cases}$$

de donde

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{30} \frac{1}{25}\sqrt{625+4r^2}(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \frac{1}{25}\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(625+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{30} d\theta$$

$$= \frac{1}{300}(274625 - 15625)\Big[0\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 5424.5\left[u^2\right]$$

E.F. 62. Calcular el volumen limitado por los planos

$$4x + 2y + 2z - 18 = 0 \quad , \quad 2x + 3y + z - 3 = 0$$

y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, en el primer octante.

R.F. 62. Se tiene

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{3-2x-3y}^{9-2x-y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (6+2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (6+2r\operatorname{sen}\theta)(r)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 + \frac{2}{3}r^3\operatorname{sen}\theta\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(12 + \frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta$$

$$= \left[12\,\theta - \frac{16}{3}\cos\theta\right]_0^2 d\theta$$

$$= 24\pi - \frac{16}{3}(-1)$$

$$= 80.73\,\left[u^3\right]$$

E.F. 63. Comprobar que la función

$$w(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisfacer la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

R.F. 63.

$$w(x,y) = ang\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2)(0)-y(2x)}{(x^2+y^(2)^2)} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2)(0)-x(2y)}{(x^2+y^2)} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)} = 0$$

E.F. 64. Sean las superficies

$$F(x,y,z) = x - y^2 + z^2 + 2$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 8$$

1. Encontrar la ecuación cartesiana del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie G en el punto $P(2,-2,0)$.
2. Si las dos superficies se cortan en una curva, determinar las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección en el punto $P(2,-2,0)$.

R.F. 64. Sean $\mathbf{n}_1$ el vector normal a F; $\mathbf{n}_2$ el vector normal a G

1.

$$\mathbf{n}_2 = \nabla G = (2x, 2y, -1)$$

$$\mathbf{n}_2\Big|_P = (4,-4,1)$$

$\therefore$ para el plano tangente

$$4(x-2) - 4(y-2) - 1(z) = 0$$

$$4x - 4y - z - 16 = 0$$

Para las ecuaciones paramétricas de la recta normal

$$x = 4t + 2$$

$$y = -4t - 2$$

$$z = -t$$

2.

$$\mathbf{n}_1 \nabla F = (1, -2y, 2z)$$

$$\mathbf{n}_1 \Big|_P = (1, 4, 0)$$

$\mathbf{v}$ es el vector tangente a la curva de intersección

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

$\therefore$ las ecuaciones simétricas de la recta tangente son

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{12}$$

E.F. 65. Se va a construir una caja con tapa de madera de 1 cm de espesor. El largo interior va a ser de 30 cm, el ancho interior de 25 cm y la altura interior de 30 cm. Utilizar diferenciales para determinar la cantidad aproximada de madera que se empleará para construir la caja.

R.F. 65. La cantidad de material utilizado se expresa en unidades de volumen

$$v = xyz$$

$$dv = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$dx = dy = dz = 2 \text{ cm}$$

$$x = 30,\ y + 25,\ z = 30$$

$$dv = (25)(30)(2) + (30)(30)(2) + (30)(25)(2)$$

$$dv = 4800 \text{ cm}^3 \text{de madera.}$$

E.F. 66. Se sabe que la derivada de la función f en el punto $P(2,1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{u}$ es 5 cuando $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$, y en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es -10 cuando $\mathbf{v} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$. Obtener

1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}$
2. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}$
3. La derivada direccional de f en el punto $(2,1)$ y en dirección al origen.

R.F. 66.

$$D_u f\Big|_P = \nabla f \mathbf{u} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \left(-\frac{4}{5}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \left(\frac{3}{5}\right) = 5$$

$$= -4\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + 3\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 25 \qquad (1)$$

$$D_v f\Big|_P = \nabla f \mathbf{v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \left(\frac{3}{5}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \left(\frac{4}{5}\right) = -10$$

$$= 3\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + 4\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = -10 \qquad (2)$$

E.F. 67. Calcular el valor de $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F} = (4xz - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (2yz - 2x^3y)\mathbf{j} + (y^2 + 2x^2)\mathbf{k}$$

y C es la trayectoria cerrada dada por la intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x = 0$.

R.F. 67. El cálculo de $\int_c \mathbf{F} \cdot dr$ se simplifica si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

y al calcular la rotación se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (4xz - 3x^2y^2) & (2yz - 2x^3y) & (y^2 + 2x^2) \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (2y - 2y)\mathbf{i} + (6xz^2 - 6xz^2)\mathbf{j} + (6 - 6)\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

$$\therefore \text{ el valor de } \int_c \mathbf{F} \cdot dr \text{ es cero.}$$

E.F. 68. Calcular el trabajo total realizado para desplazar una partícula en un campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F} = -3z\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}$$

a lo largo de la curva $x = t^2$, $y = 2t - 1$, $z = 2t^3$ desde el punto donde $t = -1$ hasta el punto determinado por $t = 1$.

R.F. 68. Para el campo

$$\mathbf{F} = -3z\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}$$

se obtiene que $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$ por lo que el trabajo depende de la trayectoria y como la curva C está dada por

$$C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \\ z = 2t^3 \end{cases} \qquad \text{con } t = -1 \text{ a t=1}$$

el valor del trabajo se obtiene como

$$\begin{aligned} W &= \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{-1}^{1} \left[3(2t^3)(2t) + 3(t^2)^2(2) - 2(t^2)(2t-1)6t^2 \right] dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(12t^4 + 6t^4 - 25t^5 + 12t^4 \right) dt \\ &= 6t^5 - 4t^6 \Big|_{-1}^{1} \\ &= (6-4) - (-6-4) \\ &= 12 \end{aligned}$$

E.F. 69. Calcular el volumen de la región limitada por los planos

$$z = 2x + t \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 2$$

R.F. 69.

$$V = \int\limits_R \int z\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} x\, dy\, dx$$

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} (2x + y)\, dy\, dx$$

$$V = \int_0^2 \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-\dfrac{x}{2}} dx$$

$$V = \int_0^2 \left[2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1 - \dfrac{x}{2}}{2} \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[2x - x^2 + \frac{4 - 4x + x^2}{8} \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[2x - x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{7x^2}{8} \right] dx$$

$$V = \left[\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} \right]_0^2$$

$$V = 1 + 3 - \frac{56}{24} = \frac{5}{3}$$

E.F. 70. Calcular el valor de

$$\int \int_R e^{-x^2-y^2} dA$$

donde R es la región del plano XY localizada entre las circunferencias de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 16.$$

R.F. 70. Definiendo la región R en coordenadas polares

$$R' = \{ (\rho, \theta) |\, 2 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$\int \int_R e^{-x^2+y^2} dA = \int \int_R e^{-\rho^2} dA'$$

$$\int \int_R e^{-x^2+y^2} dA = \int_2^4 \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} d\theta d\rho$$

$$= 2\pi \int_2^4 \rho d^{-\rho^2} d\rho$$

$$= 2\pi \left(\frac{-\, e^{-\rho^2}}{2} \right) \Bigg|_2^4$$

$$= \pi \big(e^{-16} - e^{-4} \big)$$

E.F. 71. Mediante el teorema de Green, calcular el valor de

$$\int_C (-3x^3) dx + (6xy + y^3) dy$$

según la trayectoria que lleva de $P_0(0,)$ a $P_1(2,1)$,de $P_1(2,1)$ a $P_2(2,4)$,y de $P_2(2,4)$ a $P_0(0,0)$.

R.F. 71. Sean

$$M(x,y) = -3x^3 \quad \text{y} \quad N(x,y) = 6xy + y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 6y - 0 = 6y$$

$$R = \{\,(x,y)|\, 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le 2x\}$$

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int\int_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\,dA$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} 6y\,dy\,dx = \int_0^2 (3y^2)\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x}$$

$$= \int_0^2 12x^2 - \frac{3}{4}x^2 dx$$

$$= \frac{15}{4}x^3\Big|_0^2 = 30$$

E.F. 72. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo de incrementa de 3 a 3.2 cm, mientras que el otro cateto se reduce de 4 a 3.96 cm. Utilizar diferenciales para aproximar la variación de la longitud de la hipotenusa.

R.F. 72. Considerando a como uno de los catetos, b como el otro y c la hipotenusa se tiene que

$$da = -0.04 \text{ y } db = 0.2cm$$

$$dc = ?$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$dc = \frac{\partial c}{\partial a}da + \frac{\partial c}{\partial b}db$$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ; \quad \frac{\partial c}{\partial b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

con $a = 4$ y $b = 3$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}; \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{3}{5}$$

$$dc = \frac{3}{5}(0.2) + \frac{4}{5}(-0.04) = 0.088[\text{cm}]$$

E.F. 73. Comprobar que la función

$$w(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

R.F. 73. $w(x,y) = ang\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2)(0) - y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2)(0) - x(2y)}{(x^2+y^2)} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

E.F. 74. Se va a construir una caja con tapa con madera de 1 cm de espesor. El largo interior va a ser de 30 cm, el ancho interior de 25 cm y la altura interior de 30 cm. Utilizar diferenciales para determinar la cantidad aproximada de madera que se empleará para construir la caja.

R.F. 74. La cantidad de material utilizado se expresa en unidades de volumen

$$v = xyz$$

$$dv = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$dx = dy = dz = 2 \text{ cm}$$

$$x = 30, y = 25, z = 30$$

$$dv = (25)(30)(2) + (30)(30)(2) + (30)(25)(2)$$

$$dv = 4800\,\text{cm}^3 \text{ de madera.}$$

E.F. 75. Se sabe que la derivada de la función f en el punto $P(2,1)$ y en dirección del vector $\mathbf{u}$ es 5 cuando

$$\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

y en dirección del vector $\mathbf{v}$ es -10 cuando

$$\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Obtener

1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}$

2. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}$

3. La derivada direccional de f en el punto $P(2,1)$ y en dirección al origen.

R.F. 75.

$$D_u f\Big|_P = \nabla f \mathbf{u} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \left(-\frac{4}{5}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \left(\frac{3}{5}\right) = 5$$

$$= -4\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + 3\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 25$$

$$D_v f\Big|_P = \nabla f \mathbf{v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \left(\frac{3}{5}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \left(\frac{4}{5}\right) = -10$$

$$= 3\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P + 4\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = -50$$

E.F. 76. Calcular el valor de $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F} = (4xz - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (2yz - 2x^3y)\mathbf{j} + (y^2 + 2x^2)\mathbf{k}$$

y C es la trayectoria cerrada dada por la intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x = 0$.

R.F. 76. Para

$$\mathbf{F} = (4xz - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (2yz - 2x^3y)\mathbf{j} + (y^2 + 2x^2)\mathbf{k}.$$

El cálculo de $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ se simplifica si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ y al calcular el rotacional se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (4xz - 3x^2y^2) & (2yz - 2x^3y) & (y^2 + 2x^2) \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (2y - 2y)\mathbf{i} + (6xz^2 - 6xz^2)\mathbf{j} + (6 - 6)\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \therefore \quad \text{el valor de } \int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r} \text{ es cero.}$$

E.F. 77. Calcular el trabajo total realizado para desplazar una partícula en un campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F} = 3z\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$$

a lo largo de la curva

$$x = t^2, \quad y = 2t - 1, \quad z = 2t^3$$

desde el punto donde $t = -1$ hasta el punto determinado por $t = 1$.

R.F. 77. Para el campo

$$\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + 3x^2\,\mathbf{j} + 2xy\,\mathbf{k}$$

se obtiene que $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$ por lo que el trabajo depende de la trayectoria y como la curva C está dada por

$$C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \text{ con} \\ z = 2t^3 \end{cases}$$

el valor del trabajo se obtiene como

$$W = \int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3(2t^3)(2t) + 3(t^2)^2(2) - 2(t^2)(2t-1)6t^2\right] dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[12t^4 + 6t^4 - 24t^5 + 12t^4\right] dt$$

$$= 6t^5 - 4t^6\Big|_{-1}^{1}$$

$$= (6-4) - (-6-4) = 12$$

E.F. 78. Calcular el volumen de la región limitada por los planos

$$z = 2x + y, x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y = 2$$

R.F. 78.

$$z = 2x + y, x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y = 2$$

$$V = \int\int_R x\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} z\,dy\,dx$$

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} (2x + y)\,dy\,dx$$

$$V = \int_0^2 2xy + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-\dfrac{x}{2}} dx$$

$$V = \int_0^2 \left[2x(1 - \frac{x}{2}) + \frac{(1-\dfrac{x}{2})^2}{2}\right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left(2x - x^2 + \frac{4 - 4x + x^2}{8}\right) dx$$

$$V = \int_0^2 \left(2x - x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) dx$$

$$V = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{7x^2}{8}\right) dx$$

$$V = \left(\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{7x^3}{24}\right)\Bigg|_0^2$$

$$V = 1 + 3 - \frac{56}{24} = \frac{5}{3}$$

E.F. 79. Calcular el valor de

$$\int\int_R e^{-x^2-y^2} dA$$

donde R es la región del plano XY localizada entre las circunferencias de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16$$

R.F. 79. Definiendo la región R en coordenadas polares

$$R' = \{(\rho, \theta)|2 \leq \rho \leq 4\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\int\int_R = e^{-x^2-y^2} dA = \int\int_R e^{-\rho^2} dA'$$

$$= \int_2^4 \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}\,d\theta\,d\rho$$

$$= 2\pi \int_2^4 \rho e^{-\rho^2}\,d\rho$$

$$= 2\pi \left(\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \pi(e^{-16} - e^{-4})$$

E.F. 80. Mediante el teorema de Green, calcular el valor de

$$\int_C (-3x^3)dx + (6xy + y^3)dy$$

según la trayectoria que lleva de $P_0(0,0)$ a $P_1(2,1)$ de $P_1(2,1)$ a $P_2(2,4)$, y de $P_2(2,4)$ a $P_0(0,0)$.

R.F. 80. Sean

$$M(x, y) = -3x^3 \quad \text{y } N(x, y) = 6xy + y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 6y - 0 = 6y$$

$$R = \{(x, y)|0 \leq x \leq 2\,,\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}$$

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int\int_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

$$= \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} 6y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 (3y^2)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x}$$

$$= \int_0^2 12x^2 - \frac{3}{4}x^2 dx$$

$$= -\frac{15}{4}x^3\Bigg|_0^2 = 30$$

E.F. 81. Calcular el área de la superficie paraboloide de la ecuación $2az - 4a^2 + x^2 + y^2 = 0$, que se encuentra por arriba del plano XY.

R.F. 81.

$$F(x,y,z) = 2az - 4a^2 + x^2 + y^2 = 0$$

$$2az - 4a^2 = -(x^2+y^2) \quad \text{si} \quad z=\theta \quad 4a^2 = x^2+y^2$$

$$R = \{(\rho,\theta)|0 \le \rho \le 2a\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$A = \int\int_R dS = \int\int_R \frac{dxdy}{|\mathbf{nk}|}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \mathbf{n}}{|\nabla \mathbf{n}|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2a\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4a^2}};$$

$$|\mathbf{nk}| = \frac{2a}{2\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

$$A = \int\int_R \frac{2\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{a} dxdy$$

$$A = \frac{1}{a}\int\int_R \sqrt{\rho^2+a^2}\rho d\rho d\theta$$

$$A = \frac{1}{a}\int 0^{2\pi} \int 0^{2a} \rho\sqrt{\rho^2+a^2} d\rho d\rho$$

$$A = \frac{1}{a}\int 0^{2\pi}\left(\frac{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)_0^{2a}$$

$$A = \frac{1}{3a}\int_0^{2\pi}\left((4a^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{3a}\left[(5a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right]\left(\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{5^3}-1\right)2\pi$$

$$A = \frac{2\pi a^2}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\left[u^2\right]$$

E.F. 82. La fórmula para un gas ideal está dada por $PV = kT$, donde P representa la presión, V el volumen, T la temperatura y k es una constante de proporcionalidad. Demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

R.F. 82. Sea $F = PV - kT = 0$ se deriva implícitamente, obteniendo

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{-k}{P}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial P}}{\frac{\partial F}{\partial P}} = -\frac{V}{-k} \Rightarrow \frac{kV}{Pk}\left(-\frac{P}{V}\right) = -1 \text{ Q.E.D}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial P}} = -\frac{P}{V}$$

E.F. 83. Si el radio y la altura de un cilindro circular recto son funciones de su volumen y si el área total (área lateral y bases), determinar la variación del radio con respecto al volumen en el punto en el que $r = 2$cm y $h = 10$ cm.

R.F. 83. Teniendo $r = r(V,A)$ y $h = h(V,A)$ obtener $\dfrac{\partial r}{\partial V}$

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h \qquad \text{Área} = A = 2\pi rh + \pi r^2$$

$$F(V,A,r,h) = 0 \qquad G(V,A,r,h) = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,h)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,h)}}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,h)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial V} & \frac{\partial F}{\partial h} \\ \frac{\partial G}{\partial V} & \frac{\partial G}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \pi r^2 \\ 0 & 2\pi r \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,h)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial V} & \frac{\partial F}{\partial h} \\ \frac{\partial G}{\partial V} & \frac{\partial G}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\pi hr & \pi r^2 \\ 2\pi h + 4\pi r & 2\pi r \end{vmatrix}$$

$$= 4\pi^2 r^2 - \pi r^2(2\pi h + 4\pi r)$$

$$\frac{\partial r}{\partial V} = \frac{-2\pi r}{2\pi^2 r^2(2h - 2r - h)} = \frac{1}{\pi r(2r+h)}$$

$$\frac{\partial r}{\partial V} = \frac{1}{2\pi(10-4)} = \frac{1}{12\pi} = 0.0265$$

Bibliografía

[1] Courant,R., John F., *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, vol.II, Ed. Limusa México, 1979.

[2] Davis, H.F., Zinder,A.D., *Introducción al Análisis Vectorial*, McGraw-Hill, 1992.

[3] Estrada Castillo, García y Colomé y Monsiváis, *Cálculo vectorial y aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoaméricana, S.A., 1999.

[4] Hsu,Hwei P., *Applied vector analysis*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1969.

[5] Larson, R.E., Hostetler,R.P y Edward, B.H., *Cálculo*, McGraw-Hill, vol.2, 1997.

[6] Marsdem, J.E. y Tromba, A.J. *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

[7] Marsdem, J.E. y Tromba, A.J. *Basic multivariable calculus*, Springer-Verlag, Nueva York, Inc., 1993.

[8] Pita Ruiz,C., *Cálculo vectorial*, Prentice-Hall, Hispanoamericana, 1995.

[9] Seely,R.T., *Cálculo de una y varias variables*, Ed. Trillas, 1990.

[10] Thomas G.B. Jr., Finney. R.L.,*Cálculo con geometría analítica*, vol. 2, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.