CAMPOS VECTORIALES

Presenta: M.E.M. Enrique Arenas Sánchez

21 de septiembre de 2016

CAMPOS VECTORIALES

Definición de Campo Escalar.

Se llama campo escalar a una función que asocia a cada punto del dominio de una función un valor escalar.

Ejemplo:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$T(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$$

CAMPOS VECTORIALES

Definición de Campo Vectorial.

Se llama campo vectorial a una función que asocia a cada punto del dominio de la función un vector.

Ejemplo: Cuando el campo vectorial $\overline{r}$ representa un vector de posición

$$\left.\begin{array}{c}\overline{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \overline{r}(t) = t^2 i + (t^2 - t) j\end{array}\right\} :$$

Curva en el plano

$$\left.\begin{array}{c}\overline{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{r}(t) = t^2 i + (t^2 - t) j + 2tk\end{array}\right\} :$$

Curva en el espacio

$$\left.\begin{array}{c}\overline{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{r}(s,t) = st^2 i + (t^2 - s) j + s^2 k\end{array}\right\} :$$

Una superficie

$$\left.\begin{array}{c}\overline{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \overline{r}(u,v) = u^2 i + (u^2 - v) j\end{array}\right\} :$$

Un sistema de referencia curvilineo bidimensional

$$\left.\begin{array}{c}\overline{r}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{r}(u,v,w) = u^2 i + (u^2 - w) j + vwk\end{array}\right\} :$$

Un sistema de referencia curvilineo tridimensional

CAMPOS VECTORIALES

Cuando el campo vectorial no representa un vector de posición puede representar

$$\left.\begin{array}{c}\overline{v}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \overline{v}(t) = t^2 i + (t^2 - t)j + t^2 k\end{array}\right\}:$$

El campo de velocidades de una partícula que se mueve a lo largo una curva plana

$$\left.\begin{array}{c}\overline{a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{a}(t) = 2t\, i + (2t - 1)j + 2tk\end{array}\right\}:$$

El campo de aceleraciones de una partícula que se mueve sobre una curva

$$\left.\begin{array}{c}\overline{N}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{N}(s,t) = st^2 i + (t^2 - s)j + s^2 k\end{array}\right\}:$$

El campo de vectores normales a una superficie

$$\left.\begin{array}{c}\bar{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \bar{F}(x,y,z) = GMm\dfrac{-xi - yj - zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right\}:$$

El campo gravitacional de la tierra

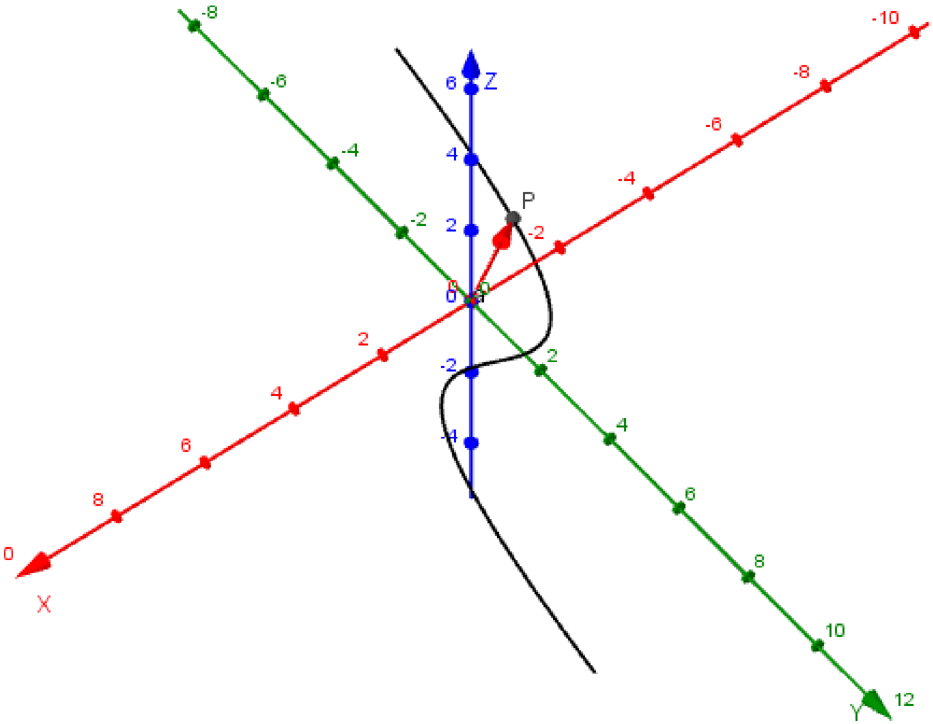
$$\left.\begin{array}{c}\bar{E}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \bar{E}(x,y,z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{xi + yj + zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right\}:$$

El campo eléctrico generado por una carga eléctrica puntual positiva localizada en el origen

CAMPOS VECTORIALES

Derivada de un campo vectorial.

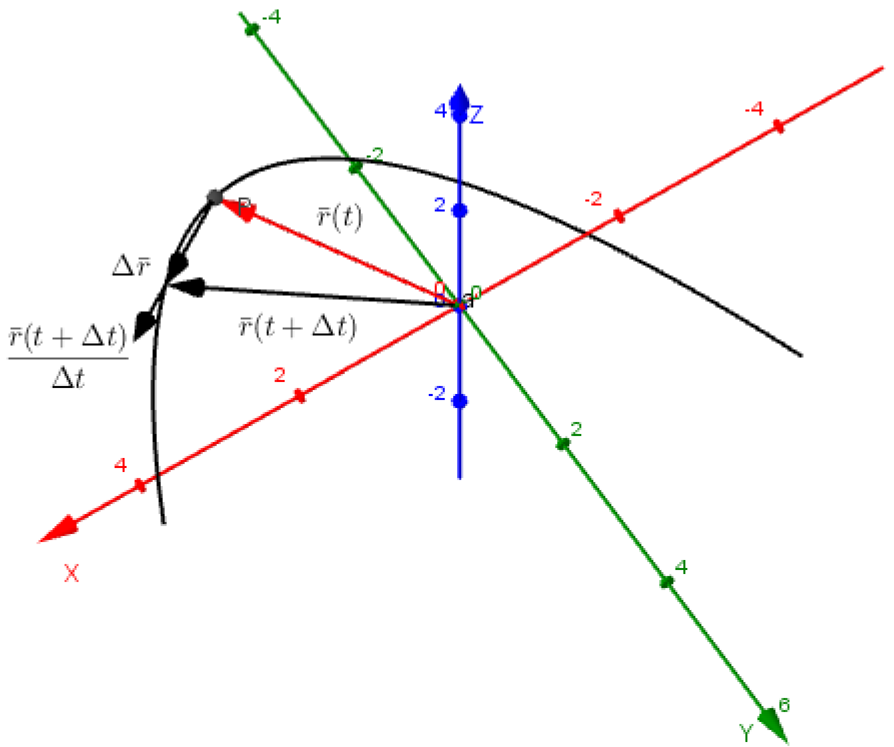
Sea el campo vectorial $\bar{r}(t)$ que representa a los vectores de posición de una curva.



CAMPOS VECTORIALES

La derivada de una función $\bar{r}(t)$ se define como:

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$



CAMPOS VECTORIALES

Mediante la definición, obtener la derivada de la función

$$\overline{r}(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

se incrementa la variable independiente

$$\overline{r}(t+\Delta t) = f_1(t+\Delta t)i + f_2(t+\Delta t)j + f_3(t+\Delta t)k$$

se obtienen el incremento de la función

$$\Delta\overline{r} = \overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)$$

$$\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t) = (f_1(t+\Delta t) - f_1(t))i + (f_2(t+\Delta t) - f_2(t))j + (f_3(t+\Delta t) - f_3(t))k$$

se multiplica por $\frac{1}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{(f_1(t+\Delta t) - f_1(t))i + (f_2(t+\Delta t) - f_2(t))j + (f_3(t+\Delta t) - f_3(t))k}{\Delta t}$$

CAMPOS VECTORIALES

$$\frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}=\frac{(f_1(t+\Delta t)-f_1(t))i+(f_2(t+\Delta t)-f_2(t))j+(f_3(t+\Delta t)-f_3(t))k}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}=\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}i+\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}j+\frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}k$$

se calcula el límite cuando $\Delta t\to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}\,i+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}j+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\,k$$

finalmente se tiene

$$\frac{d\overline{r}}{dt}=\frac{df_1}{dt}i+\frac{df_2}{dt}j+\frac{df_3}{dt}k$$

CAMPOS VECTORIALES

Ejemplo: Obtener la derivada de la función

$$\overline{r}(t) = (3t+2)i + (t^3+t)j + (2t^2-1)k$$

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = 3i + (3t^2+1)j + 4tk$$

Como el resultado de derivar una función vectorial es un nueva función vectorial, entonces es posible obtener nuevamente su derivada para así obtener la segunda derivada de $\overline{r}(t)$, es decir

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right) = 6tj + 4k$$

Cuando la función vectorial representa el vector de posición de una partícula y la variable independiente representa el tiempo entonces:

$\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}$ velocidad de la partícula y $\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \bar{a}$ aceleración de la partícula.

Al módulo de la velocidad $v = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|$ se le llama rapidez de la partícula.

CAMPOS VECTORIALES

Propiedades de la derivada de un campo vectorial

Suponga que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son funciones vectoriales diferenciables de un escalar u, y que ϕ es una función escalar diferenciable de u. Entonces se cumplen las leyes siguientes:

i) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\mathbf{B}}{du}$

ii) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$

iii) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

iv) $\dfrac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du}\mathbf{A}$

v) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

vi) $\dfrac{d}{du}\{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{C}}{du}\right) + \mathbf{A}\times\left(\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

CAMPOS VECTORIALES

Si $\bar{r}(t)$ es un vector de módulo constante, demostrar que $\overline{r}(t)$ y $\frac{d\,\overline{r}}{dt}$ son dos vectores perpendiculares.

como $|\overline{r}(t)|^2 = \overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t)$ y el vector $\overline{r}(t)$ es de módulo constante se tienen que $\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t) = C^2$

al derivar $\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t) = C^2$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t)) = \frac{d}{dt}(C^2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t)\right) = \frac{d\,\overline{r}(t)}{dt}\cdot\overline{r}(t) + \overline{r}(t)\cdot\frac{d\,\overline{r}(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t)\right) = 2\,\frac{d\,\overline{r}(t)}{dt}\cdot\overline{r}(t) = 0$$

por lo que

$$\frac{d\,\overline{r}(t)}{dt}\cdot\overline{r}(t) = 0$$

lo cual implica que los vectores $\bar{r}(t)$ y $\frac{d\,\overline{r}}{dt}$ son vectores perpendiculares.

CAMPOS VECTORIALES
Fórmulas de Frenet-Serret

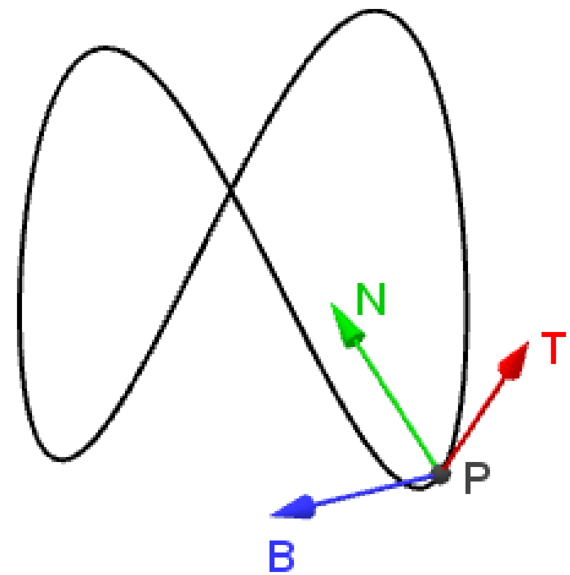
$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \kappa\bar{N} \qquad \frac{d\bar{N}}{ds} = \tau\,\bar{B} - \kappa\bar{T} \qquad \frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\,\bar{N}$$

$\bar{T}$: vector tangente unitario

$\bar{N}$: vector normal unitario

$\bar{B}$: vector binormal unitario

$$\bar{T} \times \bar{N} = \bar{B}$$

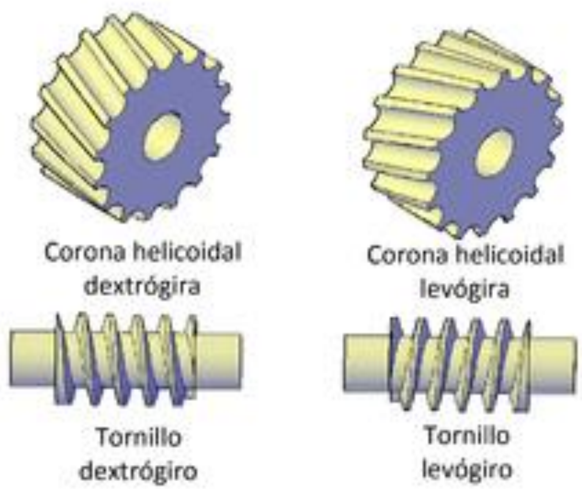


κ: curvatura $\quad \kappa = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$

τ: torsión $\quad |\tau| = \left|\frac{d\bar{B}}{ds}\right|$

$\rho = \frac{1}{\kappa}$: radio de curvatura

$\sigma = \frac{1}{|\tau|}$: radio de torsión



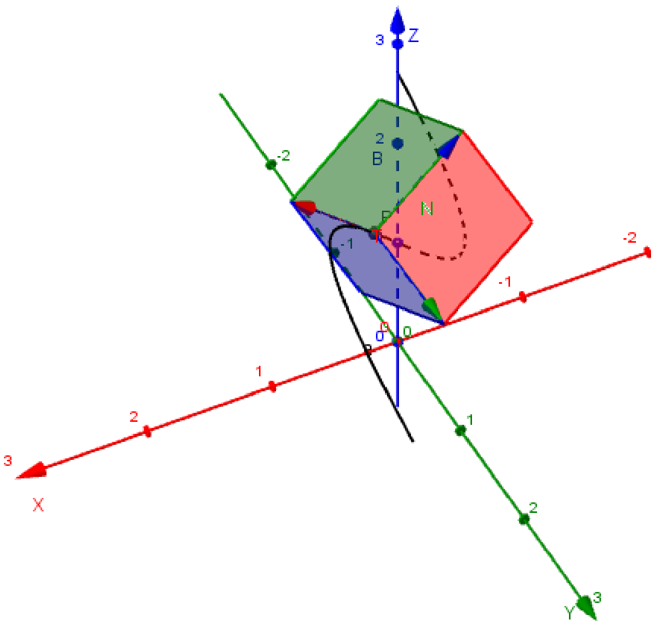
¿ Porqué **s** ?

CAMPOS VECTORIALES

Plano normal (Rojo), vector perpendicular $\bar{T}$, paralelo a $\bar{N}$ y a $\bar{B}$

Plano rectificante (verde), vector perpendicular $\bar{N}$, paralelo a $\bar{B}$ y a $\bar{T}$

Plano osculador (azul), vector perpendicular $\bar{B}$, paralelo a $\bar{T}$ y a $\bar{N}$



CAMPOS VECTORIALES

Demostrar que $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$

como $\bar{T}$ es un vector unitario, $\bar{T} \cdot \bar{T} = 1$, $\bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 0$ es decir , $\frac{d\bar{T}}{ds}$ es perpendicular a $\bar{T}$,

si decimos que $\bar{N}$ es un vector unitario en la dirección de $\frac{d\bar{T}}{ds}$ entonces

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \kappa\bar{N}$$

donde $\kappa = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$

CAMPOS VECTORIALES

Demostrar que $\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}$

Por definición $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ y al derivar el vector $\bar{B}$ se tiene

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds} + \frac{d\bar{T}}{ds} \times \bar{N}$$

como $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds} + k\bar{N} \times \bar{N}$$

simplificando se llega a

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de la ecuación por el vector $\bar{T}$

$$\bar{T} \cdot \frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \cdot \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$$

de donde se tiene que

$$\bar{T} \cdot \frac{d\bar{B}}{ds} = 0$$

por lo que se tiene que los vectores $\bar{T}$ y $\frac{d\bar{B}}{ds}$ son perpendiculares.

CAMPOS VECTORIALES

además, como $\bar{B}\ \cdot \bar{B} = 1$, $B \cdot \ \frac{d\bar{B}}{ds} = 0$ es decir , $\frac{d\bar{B}}{ds}$ es perpendicular a , $\bar{B}$

Ya que $\frac{d\bar{B}}{ds}$ es perpendicular tanto a $\bar{T}$ como a $\bar{B}$ entonces $\frac{d\bar{B}}{ds}$ es paralelo a $\bar{N}$

por lo tanto

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}$$

donde

$$\left|\frac{d\bar{B}}{ds}\right| = |\tau|$$

El signo (-) de la expresión $\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}$ se debe a que cuando la curva es dextrógira su torsión τ debe ser positiva aunque los vectores $\frac{d\bar{B}}{ds}$ y $\frac{d\bar{T}}{ds}$ tengan sentidos opuestos.

$$\bar{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\frac{d\bar{B}}{ds}$$

CAMPOS VECTORIALES

Demostrar $\frac{d\bar{N}}{ds} = \tau\bar{B} - \kappa\bar{T}$

como $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ entonces $\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T}$, al obtener $\frac{d\bar{N}}{ds}$ se tiene

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = \frac{d\bar{B}}{ds} \times \bar{T} + \bar{B} \times \frac{d\bar{T}}{ds}$$

además

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N} \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{T}}{ds} = \kappa\bar{N}$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = -\tau\bar{N} \times \bar{T} + \bar{B} \times \kappa\bar{N}$$

pero

$$-\bar{B} = \bar{N} \times \bar{T} \quad \text{y} \quad -\bar{T} = \bar{B} \times \bar{N}$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = \tau\bar{B} - \kappa\bar{T}$$

CAMPOS VECTORIALES

Ahora surge la pregunta ¿cómo derivar con respecto de la longitud de arco s de una curva si lo común es que la curva esté expresada como función de una variable arbitraria t ?

Recordemos de los antecedentes de cálculo integral que el diferencial de arco ds de una curva C de ecuaciones paramétricas $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ está dada por

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

además, como la ecuación vectorial de la curva C es

$$\overline{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

$$\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

entonces $ds = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| dt$ y $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|$

CAMPOS VECTORIALES

Sea las funciones $\overline{r} = \overline{r}(t)$ y $t = t(s)$

al hacer la composición $\overline{r}(t) \circ t(s)$ se tiene

$$\overline{r}(s) = \overline{r}(t) \circ t(s)$$

al derivar aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d\,\overline{r}(s)}{ds} = \frac{d\,\overline{r}(t)}{dt}\ \frac{dt}{ds}$$

por el teorema de la derivada de la función inversa

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

entonces

$$\frac{d\,\overline{r}(s)}{ds} = \frac{d\,\overline{r}}{dt}\ \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\,\overline{r}(t)}{dt}\ \frac{1}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\,\overline{r}}{ds} = \frac{\frac{d\,\overline{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}$$

CAMPOS VECTORIALES

Modo de cálculo de los vectores $\bar{T}$, $\bar{N}$ y $\bar{B}$ de la curvatura κ y de la torsión τ

$$\frac{d\,\bar{r}}{ds} = \frac{\frac{d\,\bar{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{\left|\frac{d\,\bar{r}}{dt}\right|\bar{T}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \bar{T}$$

$$\boxed{\bar{T} = \frac{\frac{d\,\bar{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}}$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}\frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|} = \kappa\bar{N}$$

de donde

$$\boxed{\bar{N} = \frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}} \quad \text{y} \quad \boxed{\kappa = \frac{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}}$$

CAMPOS VECTORIALES

ya que $\bar{T}$ tiene la misma dirección que $\frac{d\,\bar{r}}{dt}$, $\bar{N}$ la misma dirección que $\frac{d\,\bar{T}}{dt}$ y $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ entonces $\bar{B}$ tendrá la misma dirección que $\frac{d\,\bar{r}}{dt} \times \frac{d\bar{T}}{dt}$ es decir

$$\boxed{\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} \ \text{ ó } \ \bar{B} = \frac{\frac{d\,\bar{r}}{dt}\times\frac{d\bar{T}}{dt}}{\left|\frac{d\,\bar{r}}{dt}\times\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}}$$

finalmente, como $$\frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{\frac{d\bar{B}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{\left|\frac{d\bar{B}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}\,\frac{\frac{d\bar{B}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{B}}{dt}\right|} = -\tau\bar{N}$$

$$\boxed{|\tau| = \frac{\left|\frac{d\bar{B}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} \quad \text{donde} \begin{cases} \tau > 0 & si \ \ \frac{d\bar{T}}{dt}\cdot\frac{d\bar{B}}{dt} < 0 \\ \tau < 0 & si \ \ \frac{d\bar{T}}{dt}\cdot\frac{d\bar{B}}{dt} > 0 \end{cases}}$$

CAMPOS VECTORIALES

Ejemplo: Calcular los vectores tangente, normal y binormal unitarios, la curvatura y la torsión de la curva de ecuación $\overline{r}(t) = 3\cos(t)\, i + 3sen(t)j + 4tk$.

Como $\overline{T} = \frac{\frac{d\overline{r}}{dt}}{\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|}$ se tiene que $\frac{d\overline{r}}{dt} = -3\, sen(t)\, i + 3cos(t)j + 4\mathrm{k}$

$$\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| = \sqrt{9sen^2(t) + 9cos^2(t) + 16} = 5$$

por lo tanto $\overline{T} = -\frac{3}{5} sen(t)i + \frac{3}{5}\cos(t)\, j + \frac{4}{5}k$

como $\overline{N} = \frac{\frac{d\overline{T}}{dt}}{\left|\frac{d\overline{T}}{dt}\right|}$ derivando se tiene $\frac{d\overline{T}}{dt} = -3\, cos(t)\, i - 3sen(t)j$

$$\left|\frac{d\overline{T}}{dt}\right| = \sqrt{9sen^2(t) + 9cos^2(t)} = 3$$

$$\overline{N} = \frac{\frac{d\overline{T}}{dt}}{\left|\frac{d\overline{T}}{dt}\right|} = \frac{1}{3}(-3\, cos(t)\, i - 3sen(t)j) = -\cos(t)\, i - sen(t)j$$

$$\overline{N} = -\cos(t)\, i - sen(t)j$$

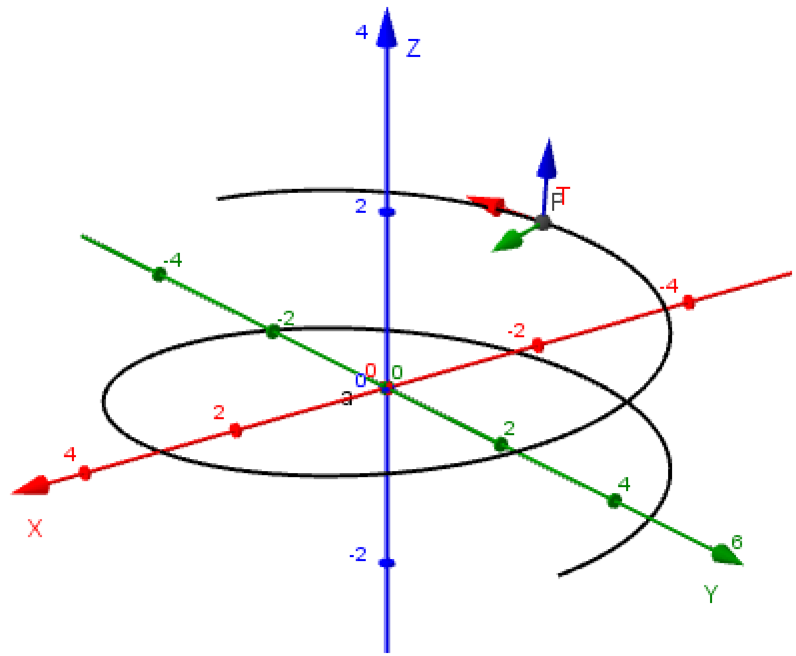
CAMPOS VECTORIALES

el vector binormal esta dado por

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$$

$$\bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{3}{5}sen(t) & \frac{3}{5}\cos(t) & \frac{4}{5} \\ -\cos(t) & -sen(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{4}{5}sen(t)i - \frac{4}{5}\cos(t)\,j + \frac{3}{5}k$$



la curvatura es $\kappa = \dfrac{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \dfrac{3}{5}$

para obtener la torsión se calcula

$\frac{d\,\bar{B}}{dt} = \frac{4}{5}cos(t)\,i + \frac{4}{5}sen(t)j$ de donde $\left|\frac{d\bar{B}}{dt}\right| = \frac{4}{5}$

entonces $|\tau| = \dfrac{\left|\frac{d\bar{B}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \dfrac{\frac{4}{5}}{5} = \dfrac{4}{25}$

al calcular $\frac{d\,\bar{T}}{dt} \cdot \frac{d\,\bar{B}}{dt} = (-3\,cos(t)\,i - 3sen(t)j) \cdot \left(\frac{4}{5}cos(t)\,i + \frac{4}{5}sen(t)j\right) = -\frac{12}{5}$

Por lo tanto $\tau > 0$ y $\tau = \dfrac{4}{25}$

CAMPOS VECTORIALES

APLICACIÓN A LA MECÁNICA

Demostrar que la aceleración $\bar{a}$ de una partícula que se mueve por una curva $\bar{r}(t)$ esta dada por $\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{T} + \frac{v^2}{\rho}\bar{N}$ donde $\bar{T}$ es el vector tangente a $\bar{r}(t)$, $\bar{N}$ es el vector tangente unitario , ρ es el radio de curvatura y v =$\left|\frac{d\,\bar{r}}{dt}\right|$ la rapidez de la partícula.

$$\bar{v} = \frac{d\,\bar{r}}{dt} = \left|\frac{d\,\bar{r}}{dt}\right|\bar{T} = v\bar{T}$$

$$\bar{a} = \frac{d\,\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{T})$$

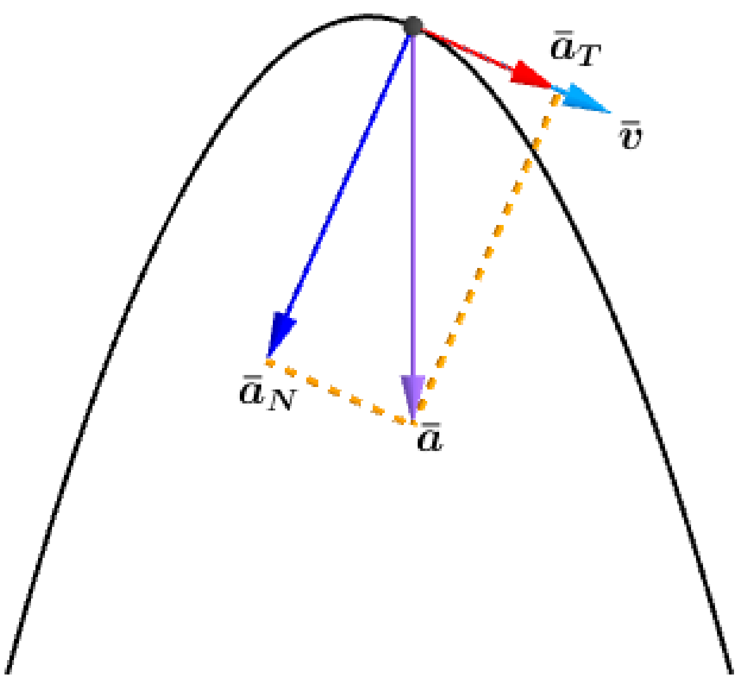
$$\bar{a} \;=\; \frac{d}{dt}(v\bar{T}) = \frac{dv}{dt}\bar{T} + v\frac{d\bar{T}}{dt}$$

de la expresión $\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{v} = \kappa\bar{N}$ se tiene

que $\frac{d\bar{T}}{dt} = v\kappa\bar{N}$ al sustituir se obtiene

$$\bar{a} \;=\; \frac{dv}{dt}\bar{T} + v(v\kappa\bar{N})$$

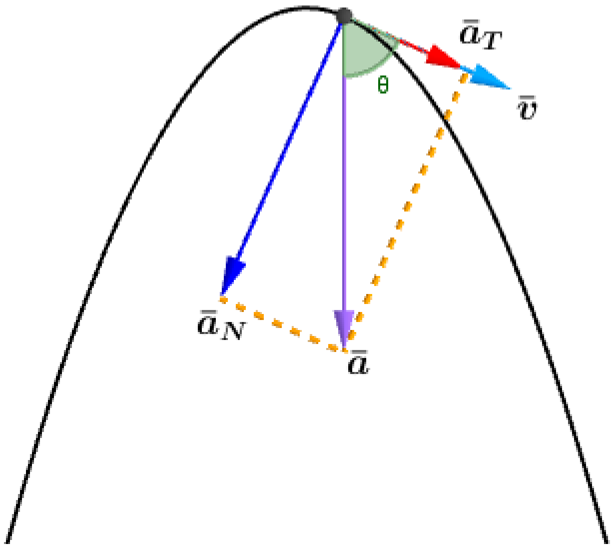
$$\bar{a} \;=\; \frac{dv}{dt}\bar{T} + \frac{v^2}{\rho}\bar{N}$$



$$\bar{a}_T = \frac{dv}{dt}\bar{T} \qquad \bar{a}_N = \frac{v^2}{\rho}\bar{N}{=}v^2\kappa\,\bar{N}$$

CAMPOS VECTORIALES

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{T} + v^2\kappa\bar{N}$$



$$\bar{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \qquad \bar{a}_T = comp\ vect\ \bar{a}_{\bar{v}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\ \bar{v}$$

$$\bar{a}_N = \bar{a} - \bar{a}_T$$

como $|\bar{v}\times\bar{a}| = |\bar{v}||\bar{a}|sen(\theta)$ y $v^2\kappa = |\bar{a}|\ \mathrm{sen}(\theta)$

$$\kappa = \frac{|\bar{a}|sen(\theta)}{v^2} = = \frac{|\bar{a}|}{v^2}\ \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|\bar{v}||\bar{a}|}$$

$$\kappa = \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|\bar{v}|^3}$$

Por otro lado, ya que $\bar{v}\ y\ \bar{a}$ son paralelos al plano osculador, entonces son perpendiculares al vector $\bar{B}$

$$\bar{B} = \frac{\bar{v}\times\bar{a}}{|\bar{v}\times\bar{a}|} \qquad \bar{N} = \frac{\bar{v}\times(\bar{v}\times\bar{a})}{|\bar{v}\times(\bar{v}\times\bar{a})|}$$

$$\tau = \frac{\bar{v}\cdot\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{a}}{dt}\right)}{|\bar{v}\times\bar{a}|^2}$$

CAMPOS VECTORIALES

EJEMPLO: Dada la curva en el espacio $x = t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{2}{3}t^3$.

Calcular a) la curvatura κ b) la torsión τ c) la ecuación del plano osculador en el punto donde $t = 1$

a) la ecuación vectorial de la curva el $\overline{r}(t) = ti + t^2 j + \frac{2}{3}t^3 k$ y para calcular lo que se pide bastará con obtener $\overline{r}', \overline{r}''$ y $\overline{r}'''$

$$\overline{r}' = i + 2tj + 2t^2 k$$
$$\overline{r}'' = 2j + 4tk$$
$$\overline{r}''' = 4k$$

como $\kappa = \dfrac{|\overline{v} \times \overline{a}|}{|\overline{v}|^3}$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix} = (8t^2 - 4t^2)i - (4t)j + 2k = 4t^2 i - 4tj + 2k$$

$$|\overline{r}' \times \overline{r}''| = \sqrt{16t^4 + 16t^2 + 4} = 2\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} \qquad |\overline{r}'| = \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}}{(\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1})^3} = \frac{2}{4t^4 + 4t^2 + 1} = \frac{2}{(2t^2 + 1)^2}$$

CAMPOS VECTORIALES

b)
$$\tau = \frac{(\overline{v} \times \overline{a}) \cdot \frac{d\overline{a}}{dt}}{|\overline{v} \times \overline{a}|^2}$$

$$\tau = \frac{(4t^2 i - 4tj + 2k) \cdot (4k)}{\left(2\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}\,\right)^2} = \frac{8}{4(2t^2 + 1)} = \frac{2}{2t^2 + 1}$$

c) Como el plano osculador tiene por vector normal al vector binormal entonces

$$\overline{r}(1) = i + j + \frac{2}{3}k$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}''\Big|_{t=1} = 4i - 4j + 2k$$

y es || $2i - 2j + k$

Por lo tanto la ecuación del plano osculador es

$$(2, -2,1) \cdot \left(x - 1, y - 1, z - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$2x - 2y + z = \frac{2}{3}$$

POR SU ATENCIÓN, GRACIAS