Problemas de aplicación de extremos de funciones escalares de variable vectorial

Pablo García y Colomé
Profesor de Carrera FI. UNAM

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Leer el enunciado del problema

Identificar plenamente qué se pide,
qué se pretende optimizar

Trazar, cuando sea posible, un modelo geométrico
y darle nombre a las variables

Plantear un modelo matemático , en algunos casos
preliminar, que exprese en una función
lo que se desea optimizar

Plantear el modelo matemático definitivo haciendo
uso de ecuaciones auxiliares que el enunciado
del problema evidencia junto con
datos ahí considerados

Resolver el problema y ver si es lógica su solución

Problema de aplicación

De acuerdo con las normas del servicio postal Internacional para paquetería, la longitud del paquete, más el perímetro de su sección transversal, no puede exceder de 274.32 cm

i) Determinar las dimensiones del paquete con forma de prisma rectangular de volumen máximo que es aceptado por el servicio postal

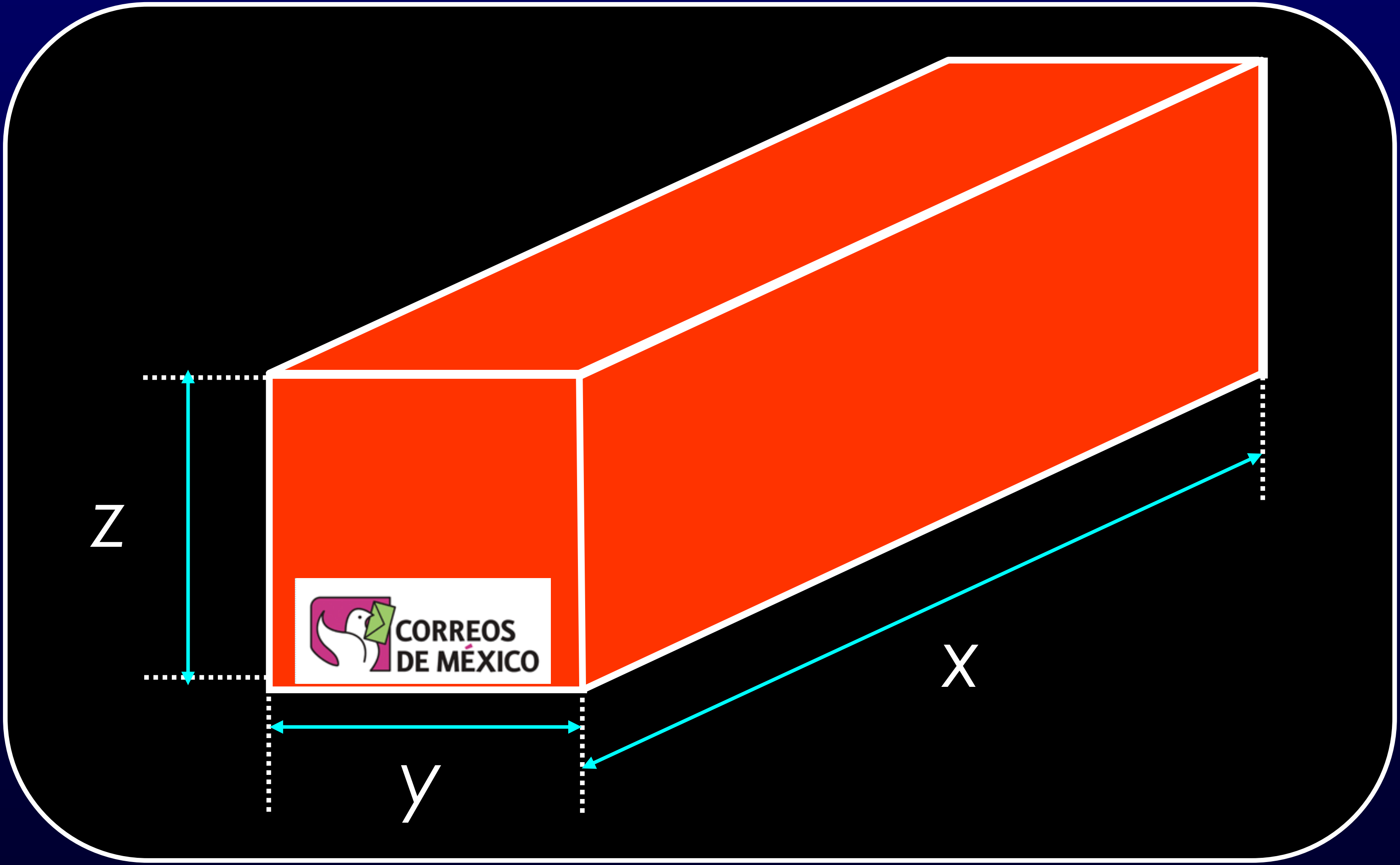
ii) Determinar las dimensiones del paquete con forma de cilindro circular recto de volumen máximo que es autorizado por el servicio postal

MAIL BOXES ETC.

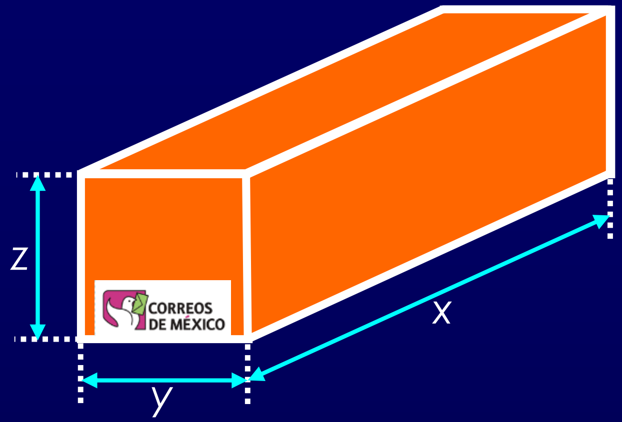
Plaza Las Palmas

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

(i)



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN



$$V = xyz$$

$$x + 2y + 2z = 274.32$$

$$L = xyz + \lambda\left(x + 2y + 2z - 274.32\right)$$

$$L = xyz + \lambda\left(x + 2y + 2z - 274.32\right)$$

$$L_x = yz + \lambda$$

$$L_y = xz + 2\lambda$$

$$L_z = xy + 2\lambda$$

$$L_\lambda = x + 2y + 2z - 274.32$$

$$yz+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-yz$$

$$xz+2\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{xz}{2}$$

$$xy+2\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{xy}{2}$$

$$-yz=-\frac{xz}{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x}{2}$$

$$-yz=-\frac{xy}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{x}{2}$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

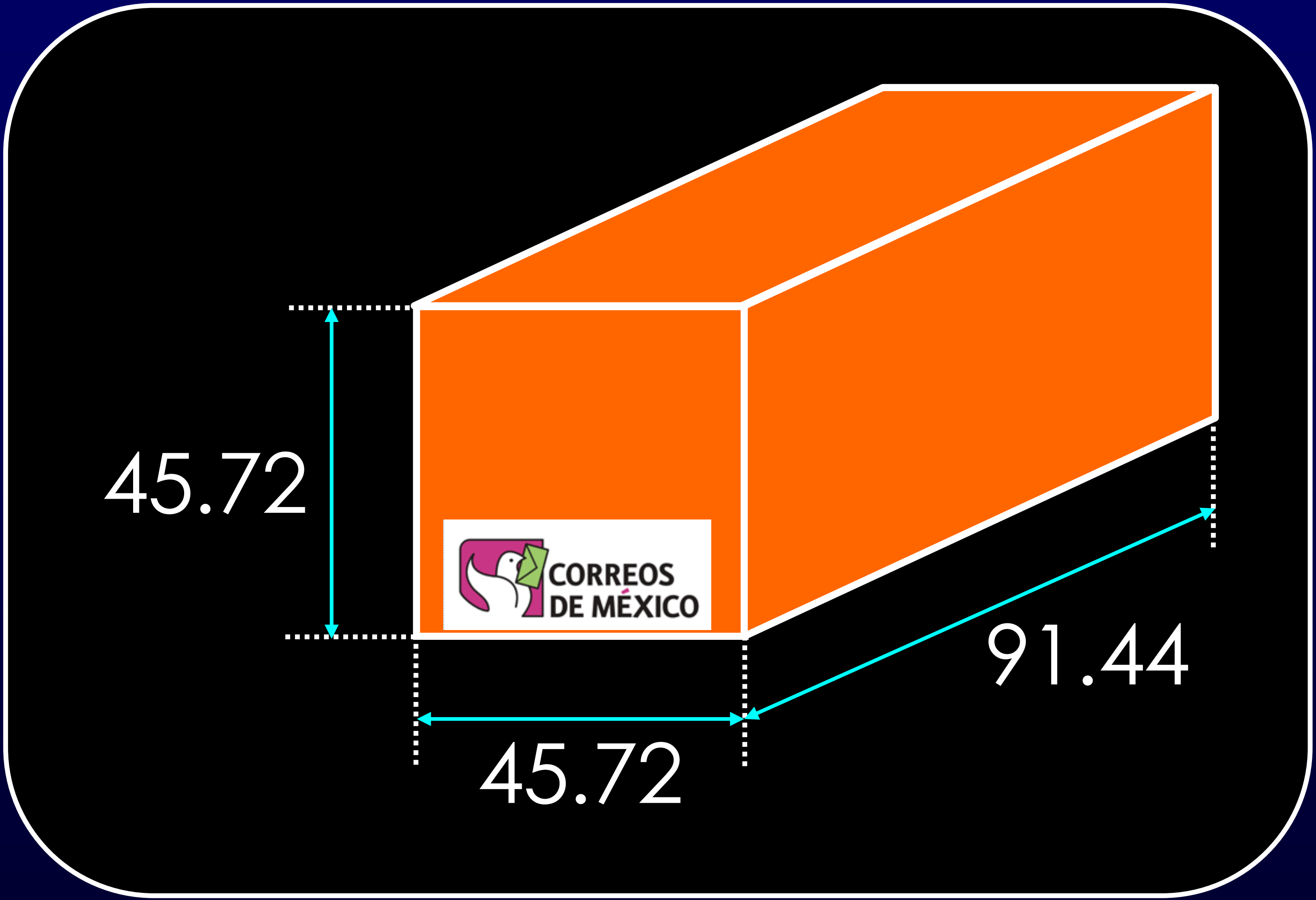
$$x+2y+2z-274.32=0$$

$$x+2\left(\frac{x}{2}\right)2+2\left(\frac{x}{2}\right)=274.32$$

$$3x=274.32 \quad \Rightarrow \quad x=91.44$$

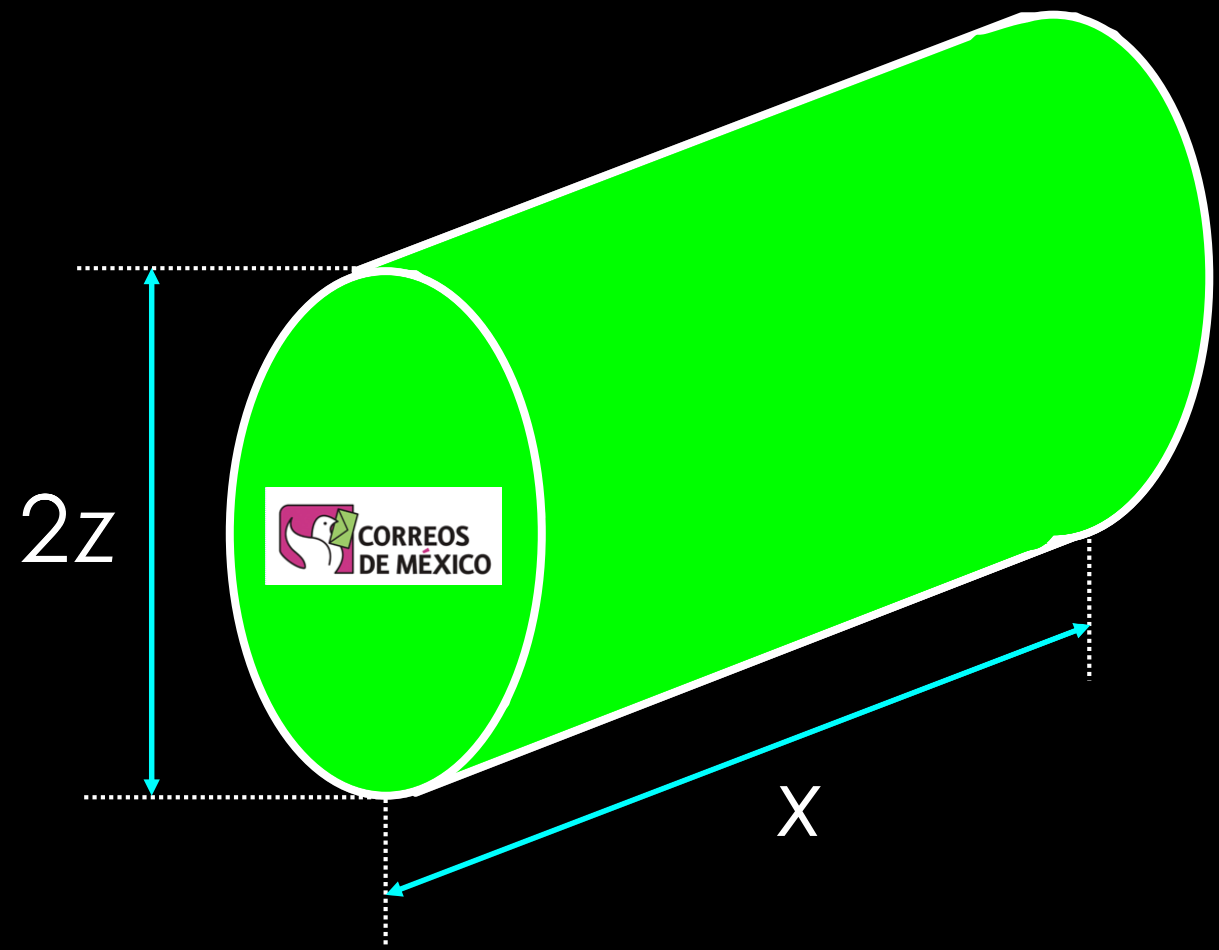
$$\boxed{\begin{array}{c} x=91.44\,cm \\ y=45.72\,cm \\ z=45.72\,cm \end{array}}$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

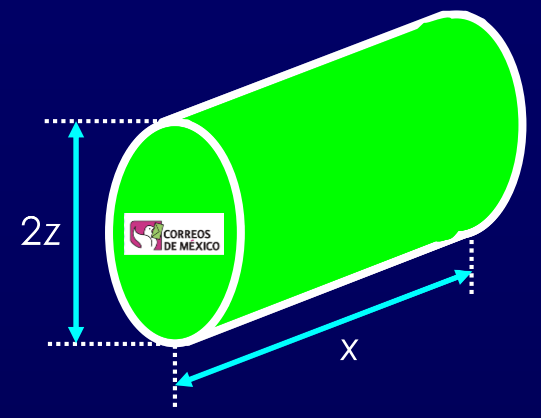


EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

(ii)



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN



$$V = \pi z^2 x$$

$$x + 2\pi z = 274.32$$

$$L = \pi z^2 x + \lambda\left(x + 2\pi z - 274.32\right)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$L = \pi z^2 x + \lambda\left(x + 2\pi z - 274.32\right)$$

$$L_x = \pi z^2 + \lambda$$

$$L_z = 2\pi z x + 2\pi\lambda$$

$$L_\lambda = x + 2\pi z - 274.32$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$\pi z^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\pi z^2$$

$$2\pi zx + 2\pi\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -zx$$

$$-\pi z^2 = -zx \quad \Rightarrow \quad x = \pi z$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

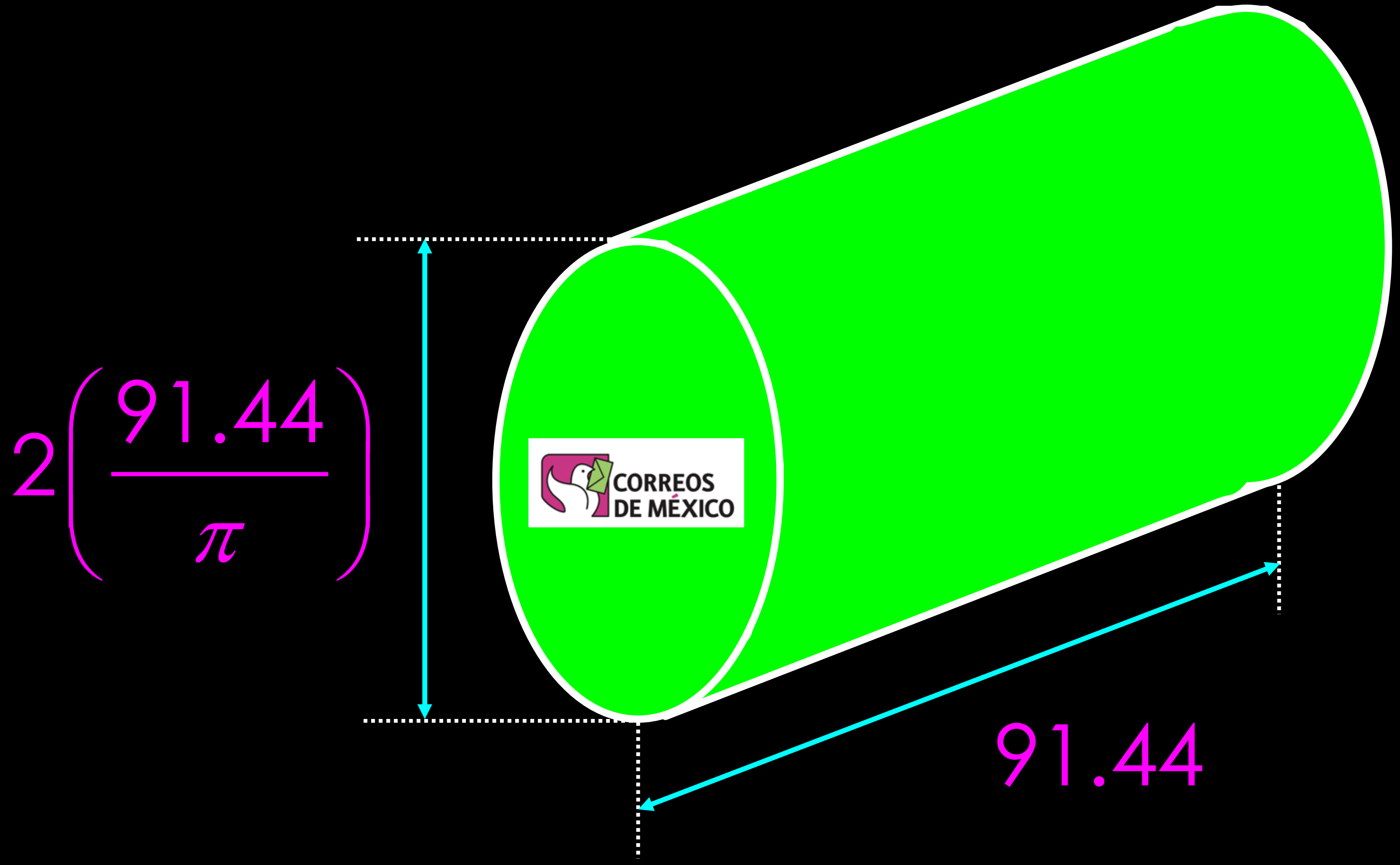
$$x + 2\pi z - 274.32 = 0$$
$$x = \pi z$$

$$\pi z + 2\pi z - 274.32 = 0$$

$$3\pi z - 274.32 = 0$$

$$z = \frac{91.44}{\pi} \quad \Rightarrow \quad x = 91.44$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

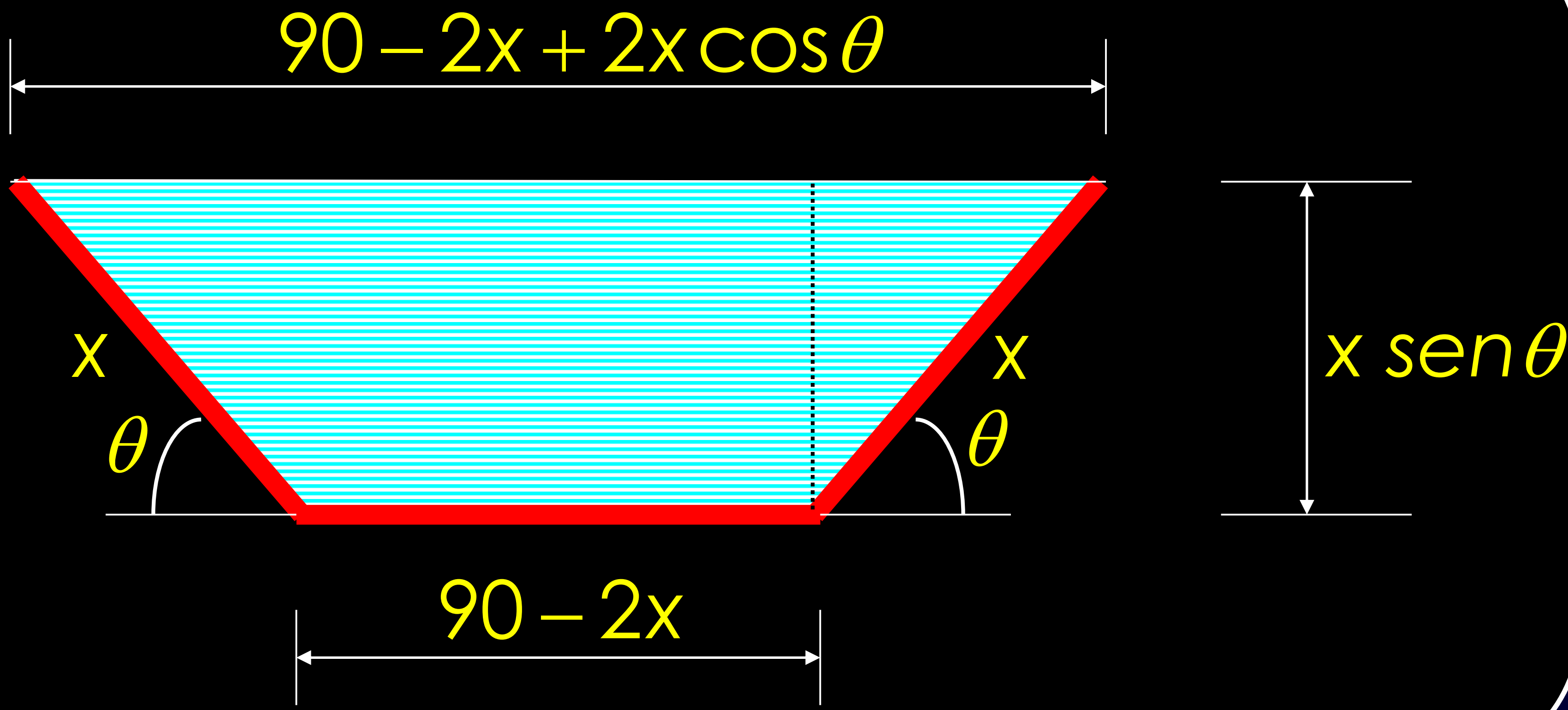
Problema de aplicación

Para conducir agua para riego, a través de una barranca, se necesita construir un canal de sección trapezoidal y esto se hace con una hoja de lámina cuyo ancho es de $90\,cm$. Calcular la longitud de la sección del canal en su base, así como el ángulo de inclinación de sus taludes, de tal manera que el canal tenga máxima capacidad

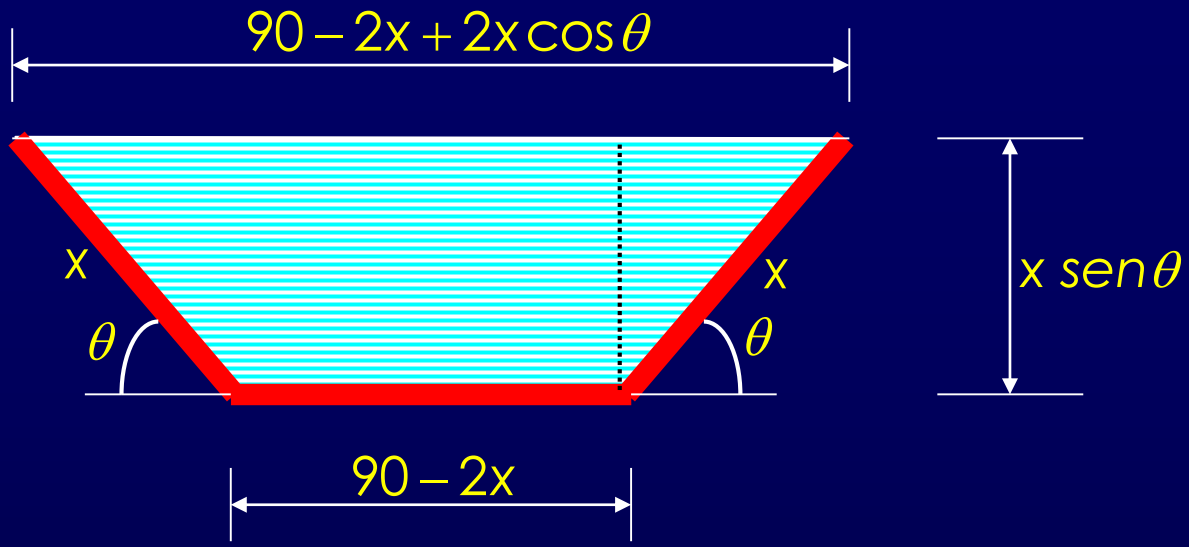
En problemas como éste, los modelos geométrico y matemático, así como una adecuada asignación de las variables, son fundamentales

La máxima capacidad del canal se presenta con la máxima área de su sección, por lo que la función a maximizar es el área de la sección que equivale, según el modelo y las variables en él contenidas, al área de un trapecio. Así, para este caso, se sugiere el siguiente modelo geométrico

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN



El área de un trapecio está dada por $A=\frac{1}{2}\left(B+b\right)h$

Y con los datos de este problema se tiene que

$$A=\frac{1}{2}\left[\left(90-2x+2x\cos\theta\right)+\left(90-2x\right)\right]x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[180-4x+2x\cos\theta\right]x\,\mathrm{sen}\,\theta=\left(90-2x+x\cos\theta\right)x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$A = 90x\,sen\,\theta - 2x^2 sen\,\theta + x^2 sen\,\theta \cos\theta$$

Ahora se deriva parcialmente con respecto a las variables "x" y "θ" con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 90\,sen\,\theta - 4x\,sen\,\theta + 2x\,sen\,\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2\,sen\,\theta\left(45 - 2x + x\cos\theta\right) = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 90x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2 sen^2\theta + x^2\cos^2\theta$$

$$= 90x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2\left(1 - \cos^2\theta\right) + x^2\cos^2\theta$$

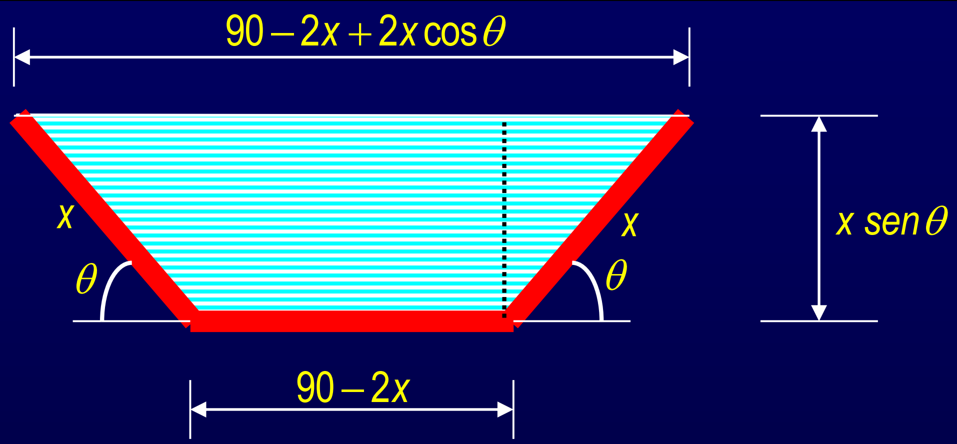
$$= 90x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2 + 2x^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad x\left(90\cos\theta - 2x\cos\theta - x + 2x\cos^2\theta\right) = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$2sen\theta\left(45-2x+x\cos\theta\right)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$x\left(90\cos\theta-2x\cos\theta-x+2x\cos^2\theta\right)=0 \quad \cdots \quad (2)$$



En estas ecuaciones se ve que ***sen θ*** y ***x*** no pueden ser nulas, es decir, valer cero ya que entonces no habría canal, luego estas expresiones quedan como:

$$45-2x+x\cos\theta=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$90\cos\theta-2x\cos\theta-x+2x\cos^2\theta=0 \quad \cdots \quad (4)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$45-2x+x\cos\theta=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$90\cos\theta-2x\cos\theta-x+2x\cos^2\theta=0 \quad \cdots \quad (4)$$

En la primera ecuación se despeja *cosθ* y se sustituye en la segunda de donde se obtiene:

$$\cos\theta=\frac{2x-45}{x}$$

$$90\left(\frac{2x-45}{x}\right)-2x\left(\frac{2x-45}{x}\right)-x+2x\left(\frac{2x-45}{x}\right)^2=0$$

$$180x^2-4050x-4x^3+90x^2-x^3+8x^3-360x^2+4050x=0$$

$$3x^3 - 90x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(x-30) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 30 \end{cases}$$

El único valor factible es el segundo por lo que:

$$x = 30\ cm$$

Se obtiene ahora el correspondiente valor del ángulo θ

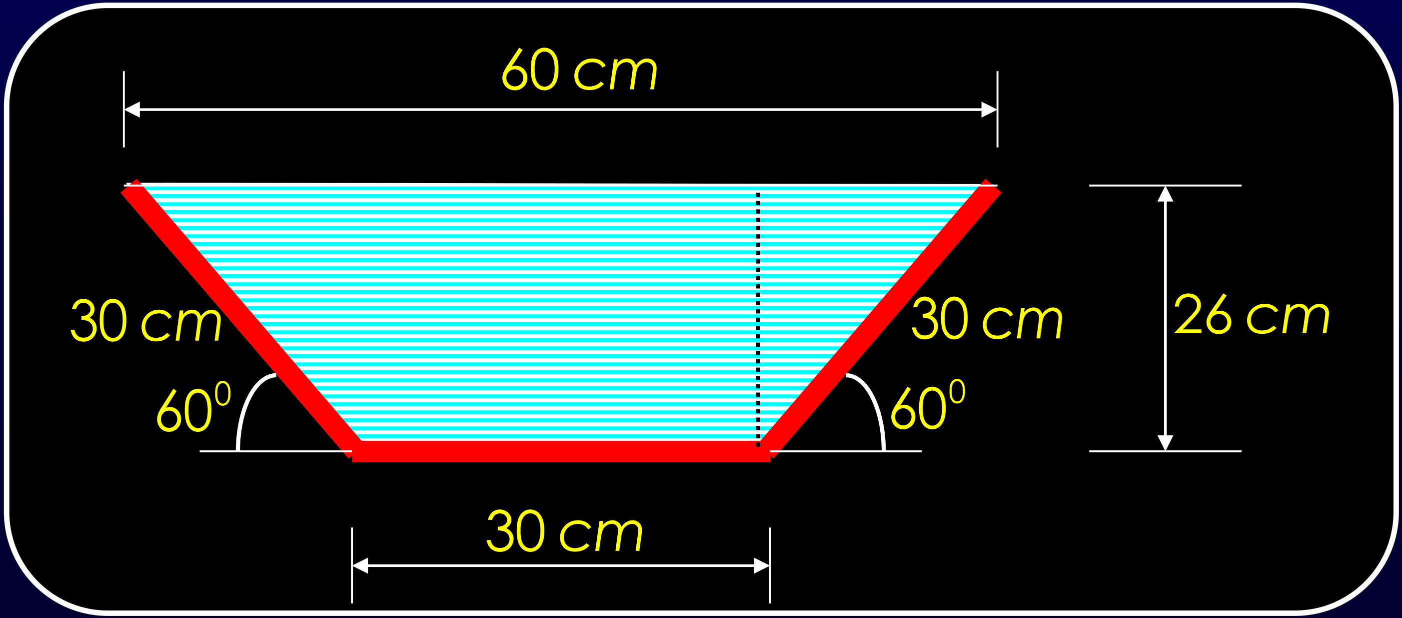
$$\cos\theta = \frac{2x-45}{x}; \quad \cos\theta = \frac{2(30)-45}{30}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = ang\cos(0.5) \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^0$$

Con estos valores, que constituyen el único punto crítico, se garantiza que la capacidad es máxima. Luego, la capacidad del canal es máxima cuando la longitud de su sección en la base es de:

$$90-2(30)=30\ cm$$

Y el ángulo de sus taludes es de $\theta = 60^0$



Problema de aplicación

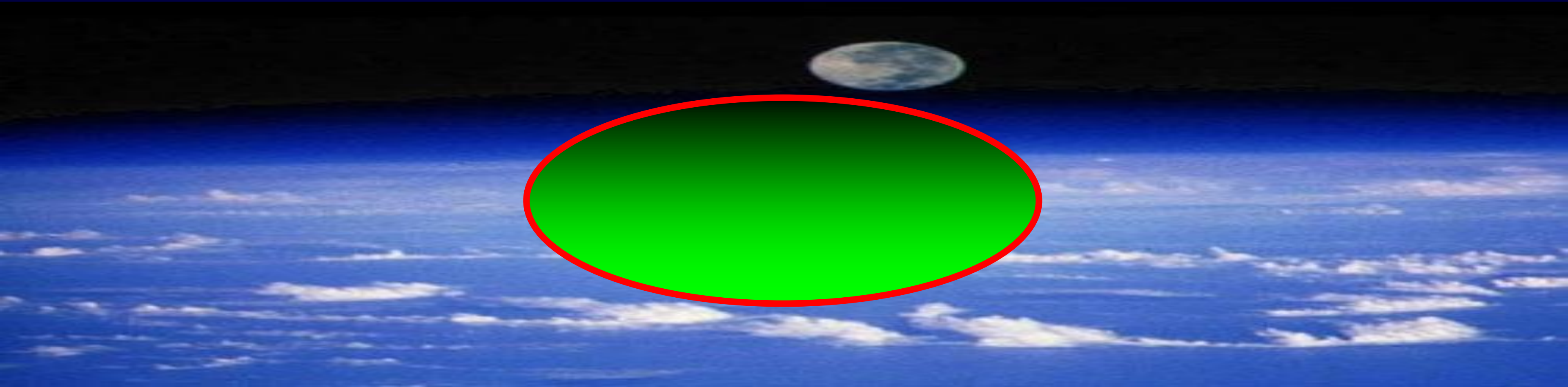
Una sonda espacial con la forma del elipsoide de ecuación $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ entra a la atmósfera de la Tierra y su superficie comienza a calentarse. Después de una hora, la temperatura en el punto (x, y, z) sobre la superficie de la sonda es

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

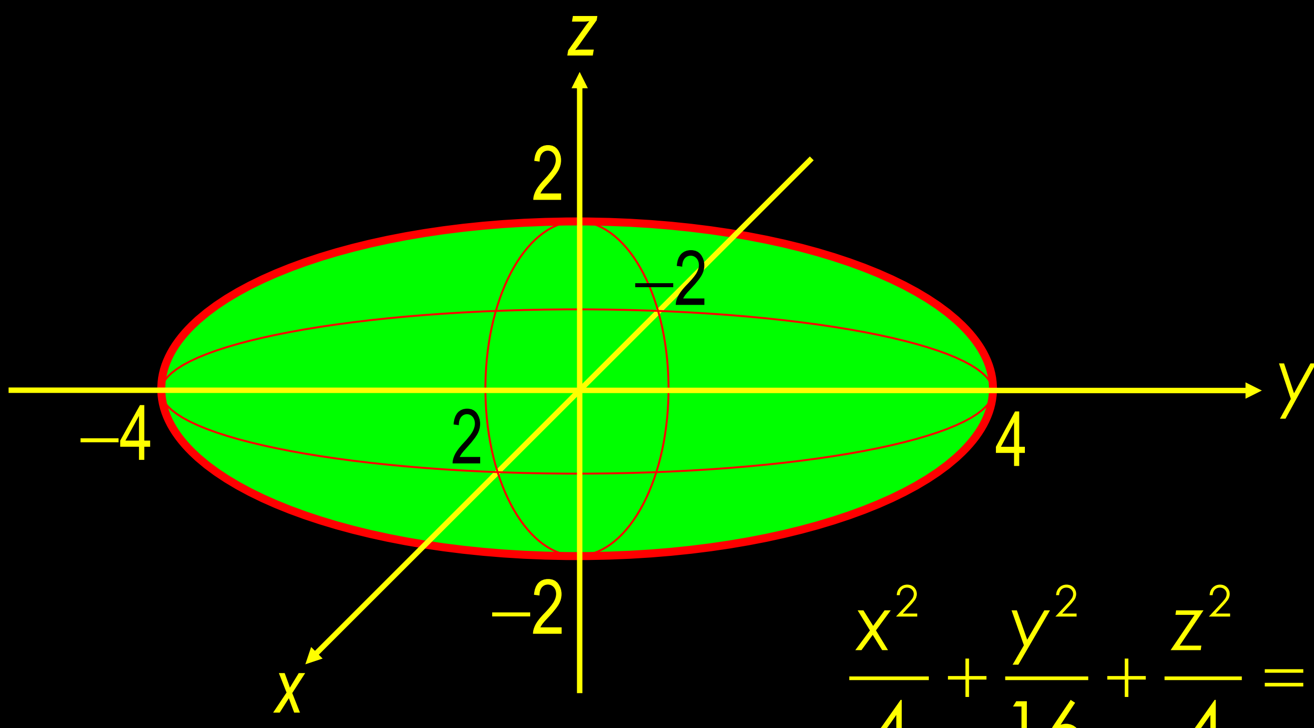
Determinar el punto más caliente sobre la superficie de la sonda y obtener esta temperatura máxima que alcanza en dicho punto

Para resolver este problema se considera que la función objetivo, es decir, la que se requiere optimizar, es la función temperatura. Y por otro lado, la ecuación que define geométricamente a esta sonda espacial es la restricción del problema

De acuerdo con lo expresado, la sonda en el espacio es como la de la figura



El modelo geométrico de la sonda, situado en el espacio cartesiano es como el de la figura



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$$

Se utiliza el método de los ***multiplicadores de Lagrange***, luego el modelo matemático con el que se trabaja considera a la función objetivo, es decir, la de la temperatura, más la restricción (la ecuación del elipsoide) por un multiplicador, de donde:

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda\left(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16\right)$$

Se obtienen las derivadas de esta función de Lagrange, se igualan a cero y se realizan operaciones algebraicas con las ecuaciones obtenidas, de donde:

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda\left(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16\right)$$

$$L_x = 16x + 8x\lambda$$

$$L_y = 4z + 2y\lambda$$

$$L_z = 4y - 16 + 8z\lambda$$

$$L_\lambda = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$16x + 8x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad \cdots \quad (1)$$

$$4z + 2y\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2z}{y} \quad \cdots \quad (2)$$

$$4y - 16 + 8z\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4-y}{2z} \quad \cdots \quad (3)$$

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

Al igualar se obtiene:

$$-2 = -\frac{2z}{y} \quad \Rightarrow \quad z = y \quad \cdots \quad (5)$$

$$-2 = \frac{4-y}{2z} \quad \Rightarrow \quad -4z = 4 - y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{y-4}{4} \quad \cdots \quad (6)$$

Se sustituye un resultado en el otro y

$$y = z \qquad z = \frac{y-4}{4}$$

$$z = \frac{z-4}{4} \quad \Rightarrow \quad 4z - z = -4 \quad \Rightarrow \quad 3z = -4$$

$$\therefore \quad z = -\frac{4}{3} \quad y \quad y = -\frac{4}{3}$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

y se obtiene:

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

$$4x^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4x^2 + \frac{16}{9} + \frac{64}{9} - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 = 16 - \frac{80}{9} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = \frac{64}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{4}{3}$$

Por lo tanto los puntos más calientes de la sonda son:

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \quad y \quad \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

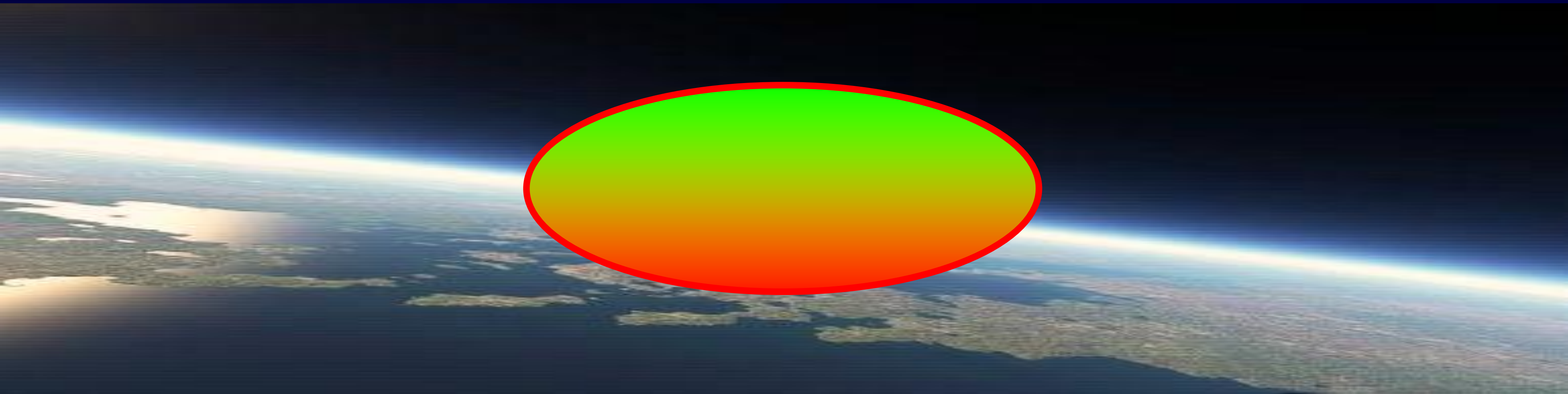
EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Y la temperatura en estos puntos es de:

$$T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

$$T\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = 8\left(\pm\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - 16\left(-\frac{4}{3}\right) + 600$$

$$T\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \approx 642.7^0$$



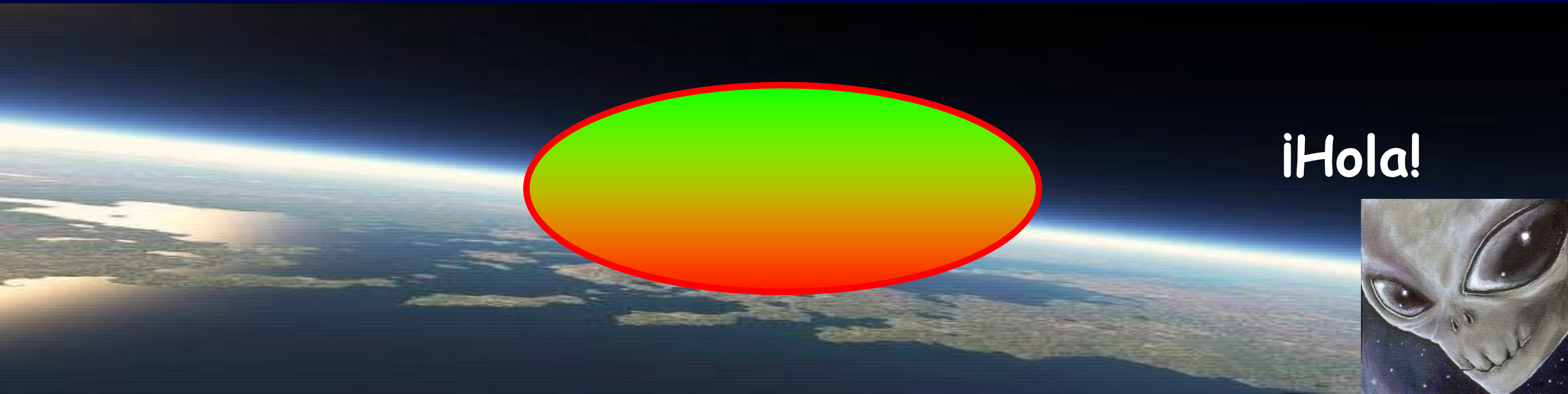
EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Y la temperatura en estos puntos es de:

$$T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$$

$$T\left(\pm\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=8\left(\pm\frac{4}{3}\right)^2+4\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)-16\left(-\frac{4}{3}\right)+600$$

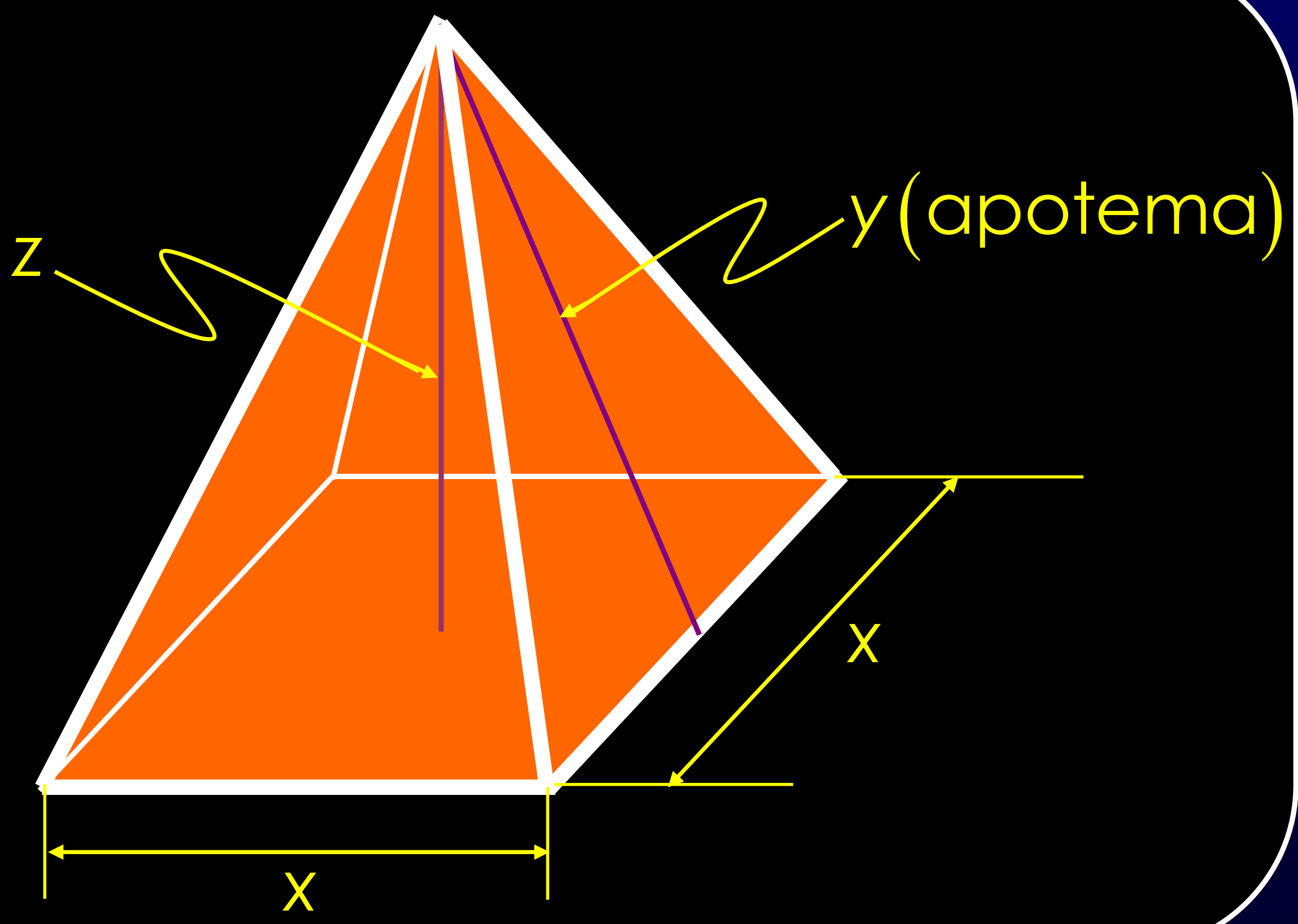
$$T\left(\pm\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)\approx 642.7^0$$



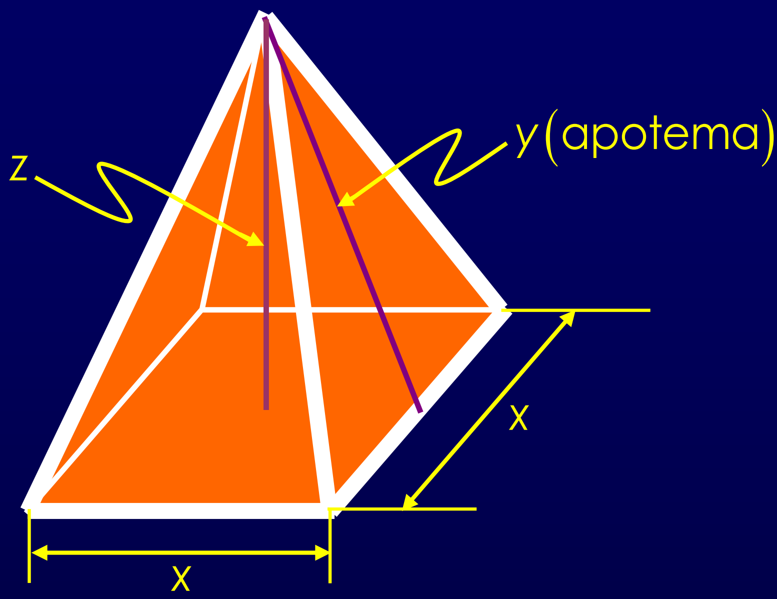
Problema de aplicación

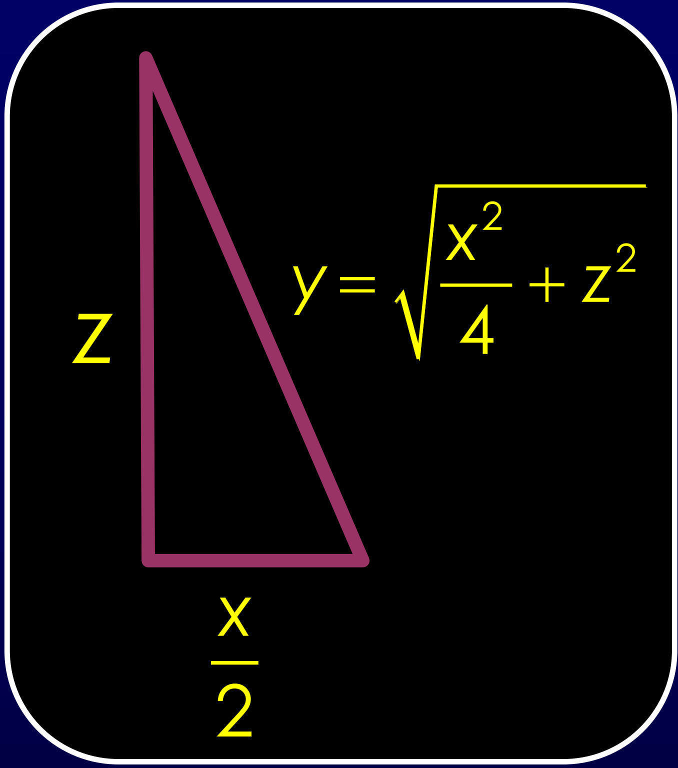
Una persona desea construir una pirámide energética de base cuadrada y con un cierto material especial que cuesta $\$100/m^2$. El volumen debe ser de $9\sqrt{2}\ m^3$. ¿Cuánto deben medir el lado de la base y la altura de la pirámide para que el costo del material empleado sea el mínimo?

El modelo geométrico es:



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN





$$y=\sqrt{\frac{x^2}{4}+z^2}$$

La base es un cuadrado y la superficie lateral se obtiene del producto del perímetro de la base por el apotema, dividido entre dos. Y el apotema se obtiene por el teorema de Pitágoras del triángulo de la figura. Así, el costo del material, que es la función objetivo, se obtiene como:

$$C = 100x^2 + 100\frac{4x\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + z^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 100x^2 + 100x\sqrt{x^2 + 4z^2}$$

Y la restricción es el volumen de la pirámide, es decir,

$$V = \frac{x^2 z}{3} \quad ; \quad \frac{x^2 z}{3} = 9\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 z = 27\sqrt{2}$$

Luego la ecuación de Lagrange queda como:

$$L = 100x^2 + 100x\sqrt{x^2 + 4z^2} + \lambda\left(x^2 z - 27\sqrt{2}\right)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$L = 100x^2 + 100x\sqrt{x^2+4z^2} + \lambda\left(x^2 z - 27\sqrt{2}\right)$$

Se calculan las derivadas parciales:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200x + 100x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4z^2}}\right) + 100\sqrt{x^2+4z^2} + 2xz\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{200x\sqrt{x^2+4z^2} + 100x^2 + 100\left(x^2+4z^2\right) + 2xz\lambda\sqrt{x^2+4z^2}}{\sqrt{x^2+4z^2}}$$

$$200x\sqrt{x^2+4z^2} + 200x^2 + 400z^2 + 2xz\lambda\sqrt{x^2+4z^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 100x\left(\frac{4z}{\sqrt{x^2+4z^2}}\right) + x^2\lambda$$

$$100x\left(\frac{4z}{\sqrt{x^2+4z^2}}\right) + x^2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{400xz}{\sqrt{x^2+4z^2}} + x^2\lambda = 0$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 z - 27\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 z - 27\sqrt{2} = 0$$

$$200x\sqrt{x^2 + 4z^2} + 200x^2 + 400z^2 + 2xz\lambda\sqrt{x^2 + 4z^2} = 0$$

$$\frac{400xz}{\sqrt{x^2 + 4z^2}} + x^2\lambda = 0$$

En la segunda ecuación se despeja el multiplicador y se sustituye el resultado en la primera, de donde:

$$\lambda = -\frac{400z}{x\sqrt{x^2 + 4z^2}}$$

$$200x\sqrt{x^2 + 4z^2} + 200x^2 + 400z^2 + 2xz\sqrt{x^2 + 4z^2}\left(-\frac{400z}{x\sqrt{x^2 + 4z^2}}\right) = 0$$

$$200x\sqrt{x^2+4z^2}+200x^2+400z^2-800z^2=0$$

$$x\sqrt{x^2+4z^2}+x^2-2z^2=0$$

$$x\sqrt{x^2+4z^2}=2z^2-x^2$$

$$x^2\left(x^2+4z^2\right)=4z^4-4x^2z^2+x^4$$

$$x^4+4x^2z^2=4z^4-4x^2z^2+x^4$$

$$8x^2z^2-4z^4=0 \quad \Rightarrow \quad 4z^2\left(2x^2-z^2\right)=0$$

$$z=0 \qquad y \qquad z=\pm\sqrt{2}x \quad \therefore \quad z=\sqrt{2}x$$

$$z=\sqrt{2}x$$

Se sustituye esta ecuación en la que se obtuvo al igualar a cero la derivada parcial con respecto al multiplicador y se tiene:

$$x^2z-27\sqrt{2}=0$$

$$x^2\sqrt{2}x-27\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^3=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

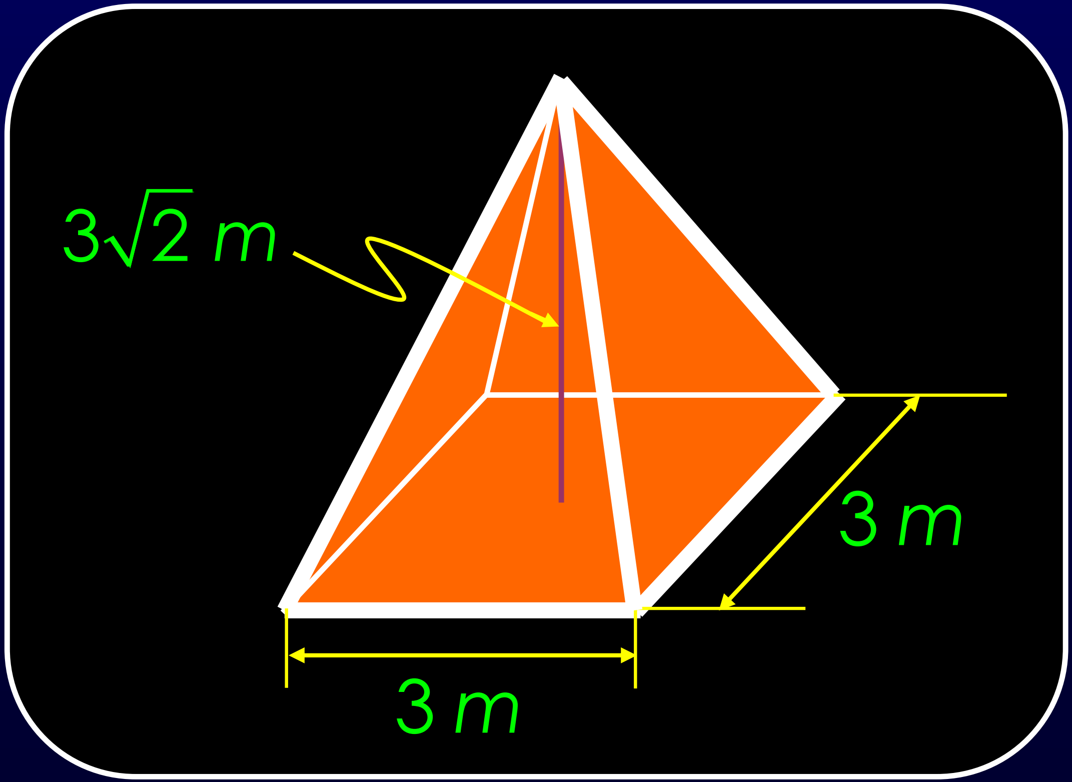
$$x=3 \quad ; \quad z=\sqrt{2}x \quad \Rightarrow \quad z=3\sqrt{2}$$

Con estas dimensiones el costo es mínimo y es igual a:

$$C=100x^2+100x\sqrt{x^2+4z^2}$$

$$C=100(3)^2+100(3)\sqrt{3^2+4\left(3\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad C=3600$$

Por lo tanto, el costo mínimo de la pirámide, que es de $\$\,3600$ se presenta cuando el volumen es de $9\sqrt{2}\ m^3$, el lado de la base de $3\ m$ y su altura de $3\sqrt{2}\ m$

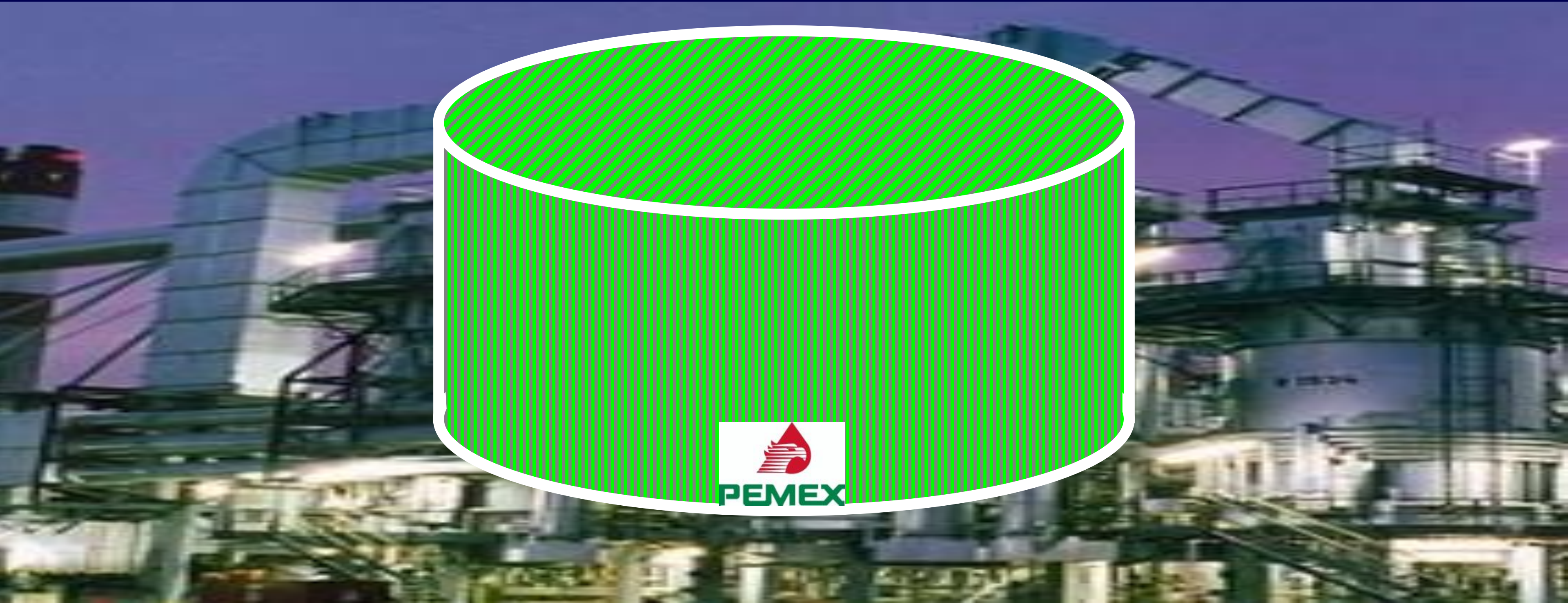


Problema de aplicación

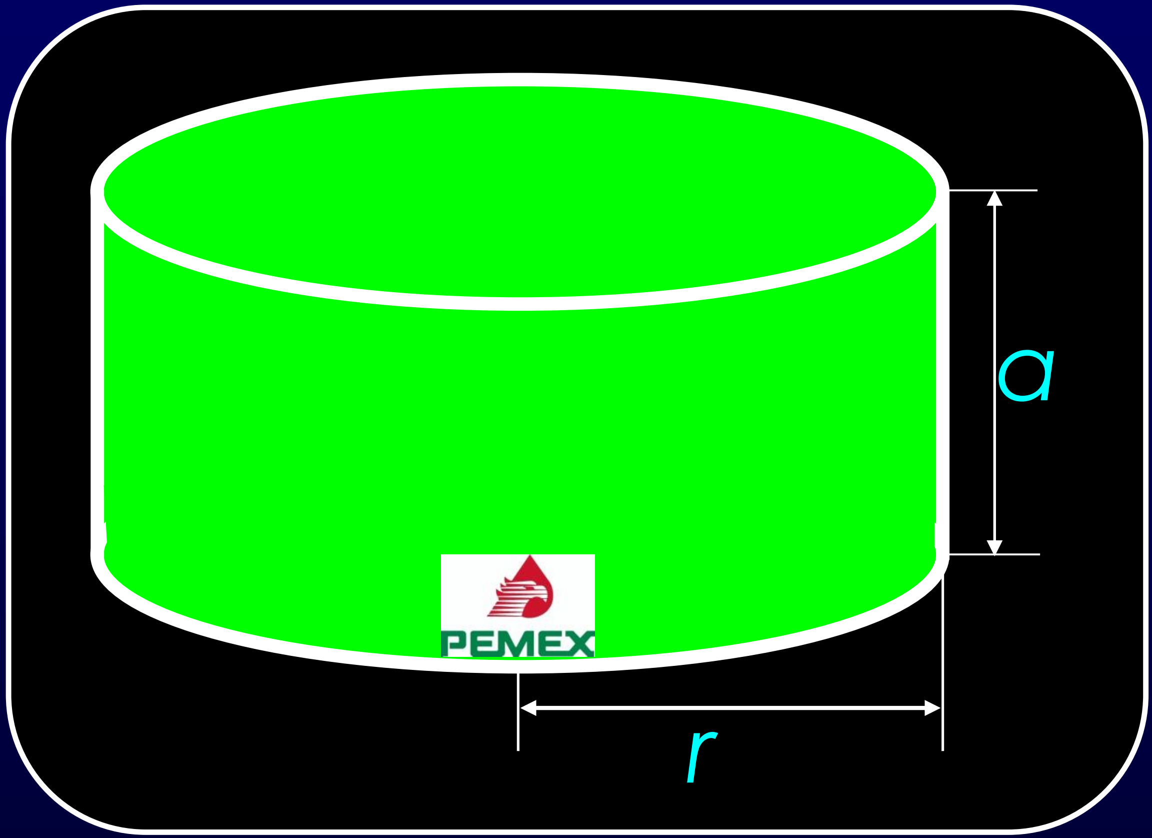
Se quiere construir un tanque para almacenar petróleo, con la forma de un cilindro circular recto, que debe tener una capacidad de $90,000\ \ell$. Los materiales empleados en su construcción, tienen un costo de: $\$\ 1,000\ /\ m^2$ para la base, $\$\ 500\ /\ m^2$ para la tapa y $\$\ 2500\ /\ m^2$ para la superficie lateral. ¿Qué dimensiones debe tener este tanque para que el costo de los materiales empleados sea el menor posible? Determinar también este costo mínimo

Solución

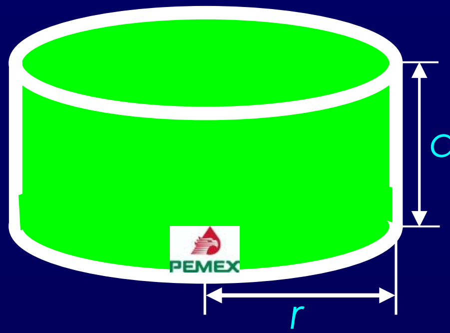
Para resolver este problema de optimización se utilizará el método de los multiplicadores de Lagrange y resulta evidente que el costo de los materiales constituye la función objetivo y el volumen fijo es la restricción a que debe sujetarse. El tanque es como:



Modelo geométrico con sus datos:



$$V = 90{,}000\ \ell = 90{,}000\ dm^3 = 90\ m^3$$



La ecuación de Lagrange es:

$$L = 1000\pi r^2 + 500\pi r^2 + 2500\left(2\pi r a\right) +$$

$$+\lambda\left(\pi r^2 a - 90\right)$$

$$L = 1500\pi r^2 + 5000\pi r a + \lambda\left(\pi r^2 a - 90\right)$$

Se obtienen las derivadas parciales y con ellas el o los puntos críticos

$$L = 1500\pi r^2 + 5000\pi ra + \lambda\left(\pi r^2 a - 90\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 3000\pi r + 5000\pi a + 2\pi ra\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 5000\pi r + \pi r^2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 a - 90$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$3000\pi r + 5000\pi a + 2\pi ra\lambda = 0$$

$$1500r + 2500a + ra\lambda = 0$$

$$5000\pi r + \pi r^2\lambda = 0$$

$$5000r + r^2\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{1500r + 2500a}{ra}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1500}{a} - \frac{2500}{r} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\lambda = -\frac{5000r}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{5000}{r} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\lambda = -\frac{1500}{a} - \frac{2500}{r} \quad \cdots \quad (1) \qquad \lambda = -\frac{5000}{r} \quad \cdots \quad (2)$$

Se igualan estas ecuaciones y

$$-\frac{1500}{a} - \frac{2500}{r} = -\frac{5000}{r}$$

$$\frac{1500}{a} = \frac{2500}{r} \quad \Rightarrow \quad 1500r = 2500a$$

$$r = \frac{2500a}{1500} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5a}{3}$$

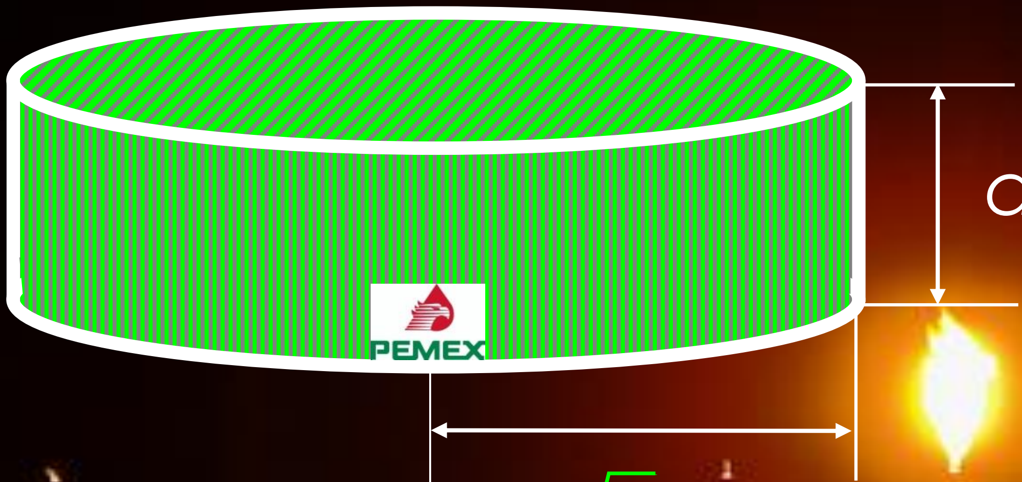
Se sustituye este valor en la ecuación aún no utilizada y

$$\pi r^2 a - 90 = 0 \qquad r = \frac{5a}{3}$$

$$\pi\left(\frac{5a}{3}\right)^2 a - 90 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25\pi a^3}{9} = 90$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{9(90)}{25\pi}} \quad \Rightarrow \quad a \approx 2.177$$

$$r = \frac{5a}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5(2.177)}{3} \quad \Rightarrow \quad r \approx 3.628$$



$$x = 3 \quad ; \quad z = \sqrt{2}x \quad \Rightarrow \quad z = 3\sqrt{2}$$

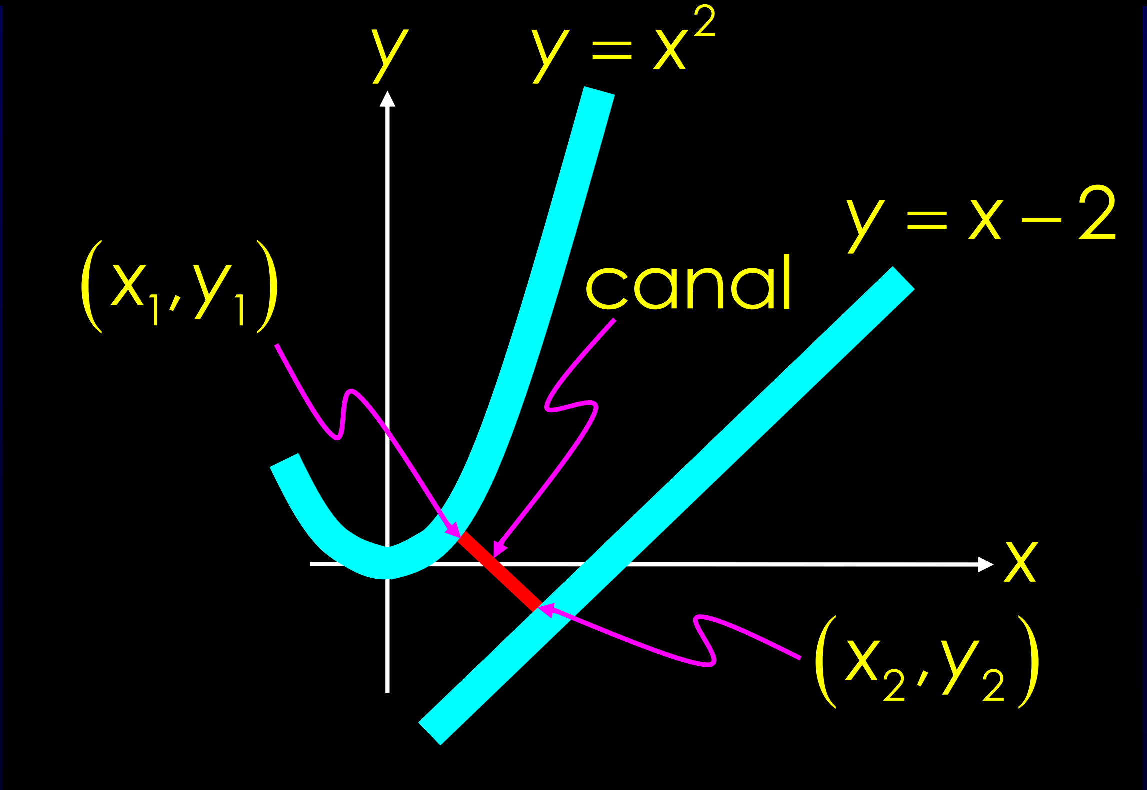
$$C = 1500\pi r^2 + 5000\pi r a$$

$$\therefore \quad C_m \approx \$\,186{,}090$$

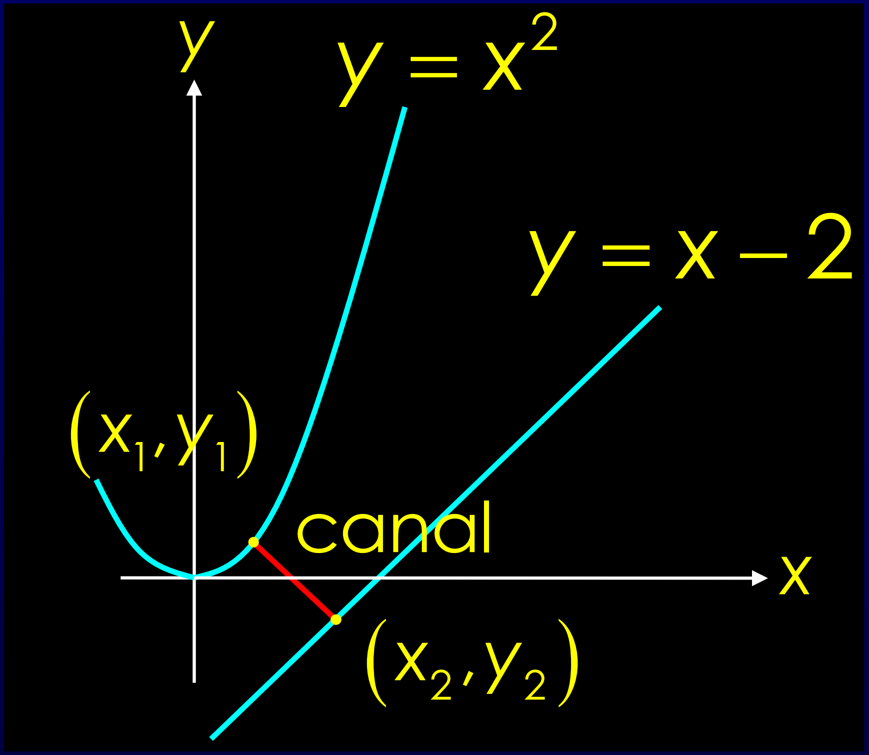
Problema de aplicación

Los cursos de dos ríos, dentro de los límites de una región determinada y con respecto a un sistema coordenado, son, en forma aproximada, una parábola $y = x^2$ y una recta $x - y - 2 = 0$. ¿cuál es la menor longitud de un canal recto con el que se pueden unir y cuáles son las coordenadas del canal en su unión con los ríos?

En este problema se desea saber cuál es la longitud mínima de un canal que una a estos dos ríos, luego esta es la función objetivo, la que se debe optimizar. Los ríos, de acuerdo con un sistema coordenado determinado se graficarían como:



El modelo geométrico es el siguiente



La distancia entre los dos ríos, que es el modelo matemático preliminar, está dada por:

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sea $L = \ell^2; \quad L = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Como los puntos de contacto del canal con los ríos pertenecen a sus trayectorias, entonces satisfacen sus ecuaciones, luego se puede escribir

$$y_2 = x_2 - 2 \quad y \quad y_1 = x_1^2$$

Luego el modelo matemático definitivo es:

$$L = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(x_2 - 2 - x_1^2\right)^2$$

$$L = x_1^4 + 5x_1^2 - 2x_1^2 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_2 + 4$$

Se deriva parcialmente la función y se igualan a cero las derivadas parciales para obtener los puntos críticos:

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$L = x_1^4 + 5x_1^2 - 2x_1^2x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_2 + 4$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1^{\,3} + 10x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1^{\,2} + 4x_2 - 2x_1 - 4$$

$$4x_1^{\,3} + 10x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$-2x_1^{\,2} + 4x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$4x_1^3 + 10x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$-2x_1^2 + 4x_2 - 2x_1 - 4 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

De la segunda ecuación se tiene que:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2} + 1$$

Se sustituye en la primera y:

$$4x_1^3 + 10x_1 - 4x_1\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2} + 1\right) - 2\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2} + 1\right) = 0$$

$$4x_1^3 + 10x_1 - 2x_1^3 - 2x_1^2 - 4x_1 - x_1^2 - x_1 - 2 = 0$$

$$2x_1^3 - 3x_1^2 + 5x_1 - 2 = 0$$

$$2x_1^3 - 3x_1^2 + 5x_1 - 2 = 0$$

Se obtienen las raíces y se llega a:

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(2x_1^2 - 2x_1 + 4\right) = 0$$

Como se observa, la ecuación tiene una raíz real y dos complejas, luego el punto crítico está dado por:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2} + 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2} + 1$$

$$x_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{11}{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{11}{8}$$

Es evidente que este punto crítico corresponde al mínimo de la función y para efectos de ilustrar el criterio de la segunda derivada se comprobará. Así,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1^3 + 10x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} = 12{x_1}^2 + 10 - 4x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 4x_2 - 2x_1 - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1 - 2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} = 12x_1^{\,2} + 10 - 4x_2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\,2}} = 4 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1 - 2$$

$$H(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\,2}} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2$$

$$H(x_1, x_2) = \left(12x_1^{\,2} + 10 - 4x_2\right)(4) - \left(-4x_1 - 2\right)^2$$

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right) > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\,2}} > 0$$

Por lo tanto se tiene un mínimo. Se obtienen los valores correspondientes de las ordenadas y

$$y_1 = x_1^2 \quad ; \quad y_2 = x_2 - 2 \quad ; \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{11}{8}$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad ; \quad y_2 = \frac{11}{8} - 2 = -\frac{5}{8}$$

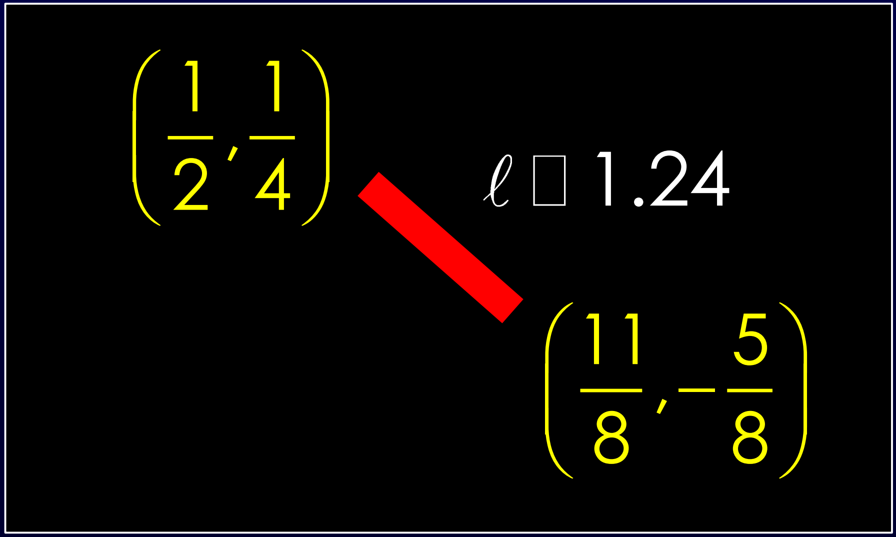
$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad y \quad \left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \quad y \quad \left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$$

$$\ell = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

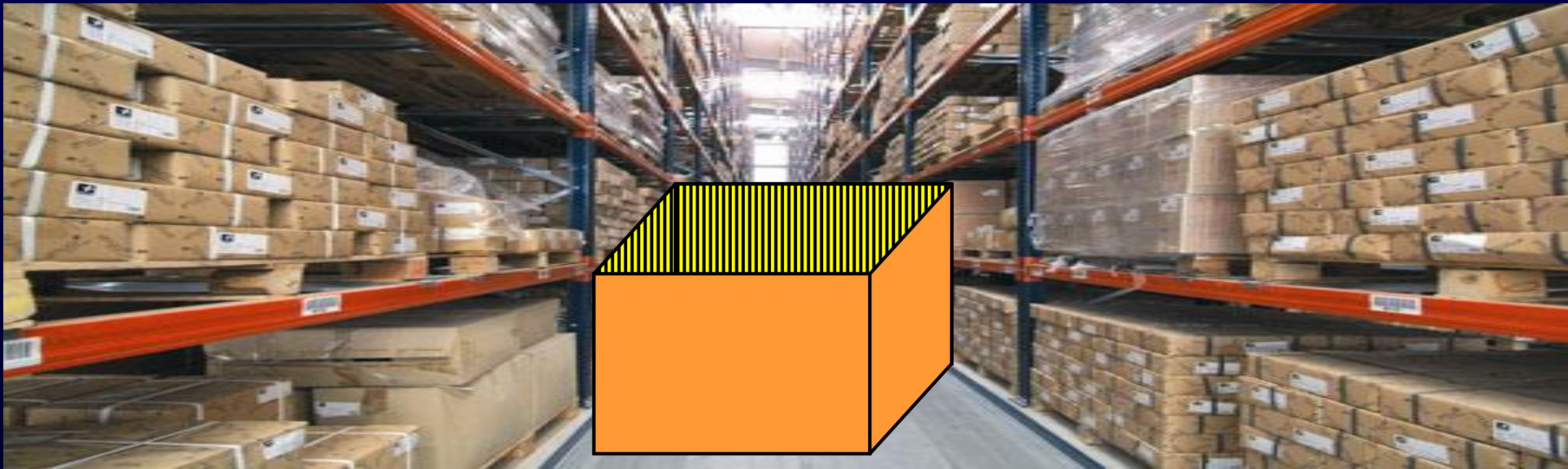
$$\ell = \sqrt{L} = \sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2} \;\therefore\quad \ell = \frac{7\sqrt{2}}{8} \quad \Rightarrow \quad \ell \approx 1.24$$



EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

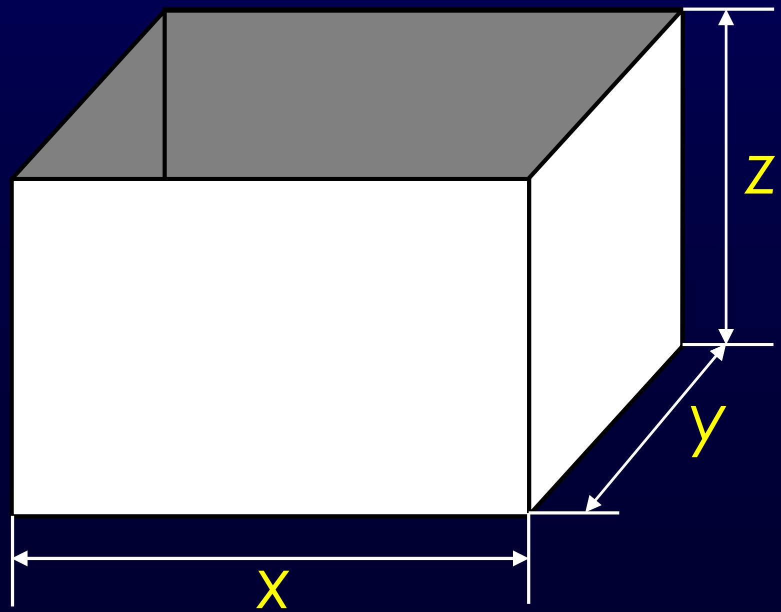
Problema de aplicación

En un almacén cuentan con $\$\,3600$ y deben construir una caja en forma de paralelepípedo rectangular. Los costos incluyen mano de obra y los procesos de unión de los materiales, que para la base tiene un costo de $\$\,75\,/\,m^2$, y para los lados de $\$\,150\,/\,m^2$. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen, sin tapa, que se puede construir con ese dinero y calcular también ese volumen máximo.



En este caso, se pide que el volumen sea máximo, luego es la función objetivo y el hecho de contar con una cantidad fija de dinero constituye una restricción. El modelo geométrico, con sus magnitudes variables y constantes es:

$ 3600



La función objetivo es:

$$V = xyz$$

y la restricción es:

$$75xy + 2(150)xz + 2(150)yz = 3600$$

$$75xy + 300xz + 300yz = 3600$$

$$xy + 4xz + 4yz = 48$$

Entonces la ecuación de Lagrange está dada por:

$$L = xyz + \lambda\left(xy + 4xz + 4yz - 48\right)$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$L = xyz + \lambda\left(xy + 4xz + 4yz - 48\right)$$

Se obtienen las derivadas parciales, se igualan a cero y con ellas se alcanza el o los puntos críticos que solucionan el problema

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + \left(y + 4z\right)\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + \left(x + 4z\right)\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + \left(4x + 4y\right)\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy + 4xz + 4yz - 48$$

EXTREMOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

$$yz + (y + 4z)\lambda = 0$$

$$xz + (x + 4z)\lambda = 0$$

$$xy + (4x + 4y)\lambda = 0$$

$$xy + 4xz + 4yz - 48 = 0$$

$$yz + (y + 4z)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{yz}{y + 4z}$$

$$xz + (x + 4z)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xz}{x + 4z}$$

$$xy + (4x + 4y)\lambda = 0 \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xy}{4x + 4y}$$

$$-\frac{yz}{y+4z}=-\frac{xz}{x+4z}\quad\Rightarrow\quad xy+4yz=xy+4xz$$

$$\therefore\quad y=x$$

$$-\frac{yz}{y+4z}=-\frac{xy}{4x+4y}\quad\Rightarrow\quad 4xz+4yz=xy+4xz$$

$$\therefore\quad z=\frac{1}{4}x$$

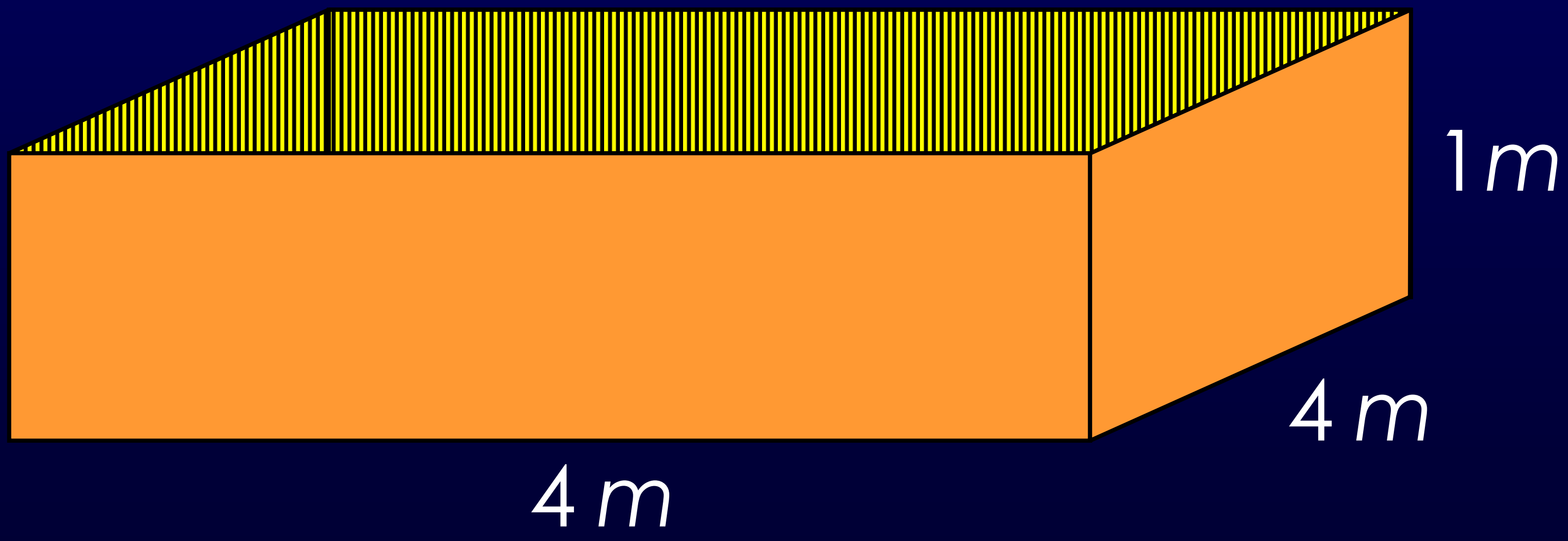
Se sustituyen estas ecuaciones en la última derivada parcial igualada a cero y

$$xy+4xz+4yz-48=0$$

$$x(x)+4x\left(\frac{1}{4}x\right)+4(x)\left(\frac{1}{4}x\right)-48=0$$

$$3x^2 = 48 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$$

$$x = 4\,m \quad ; \quad y = 4\,m \quad ; \quad z = 1\,m$$



$$V_M = 4 \times 4 \times 1 \quad \therefore \quad V_M = 16\,m^3$$

MUCHAS GRACIAS

Pablo García y Colomé