UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

APLICACIONES DE LA DERIVADA

M. en E.M. MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

INTRODUCCIÓN

- A lo largo de la historia, la importancia de medir el cambio, es decir, la variación, condujo en el siglo XVII a la noción de derivada.

- En Matemáticas, la derivada de una función es la medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente.

- La derivada de una función es un concepto local, lo que significa que se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente es cada vez más pequeño.
- Por esta razón es que se habla del valor de la derivada de una cierta función en un intervalo dado.

- Un ejemplo habitual se presenta al estudiar el *movimiento* : si una función representa la posición de un objeto con respecto al tiempo, su derivada es la rapidez de variación de dicho objeto. *Sin embargo, puede estar viajando a velocidades mayores o menores en distintos tramos de la ruta.*

Un avión que realice un vuelo trasatlántico de 4500 km entre las 12:00 y las 18:00 h, viaja a una velocidad media de 750 km/h.

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{4500}{18-12} = 750\, km/h$$

- *Sin embargo, puede estar viajando a velocidades mayores o menores en distintos tramos de la ruta. En particular, si entre las 15:00 y las 15:30 h recorre 400 km, su* ***velocidad media*** *en ese tramo es*

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{400}{13.5 - 13.0} = 800\, km/h$$

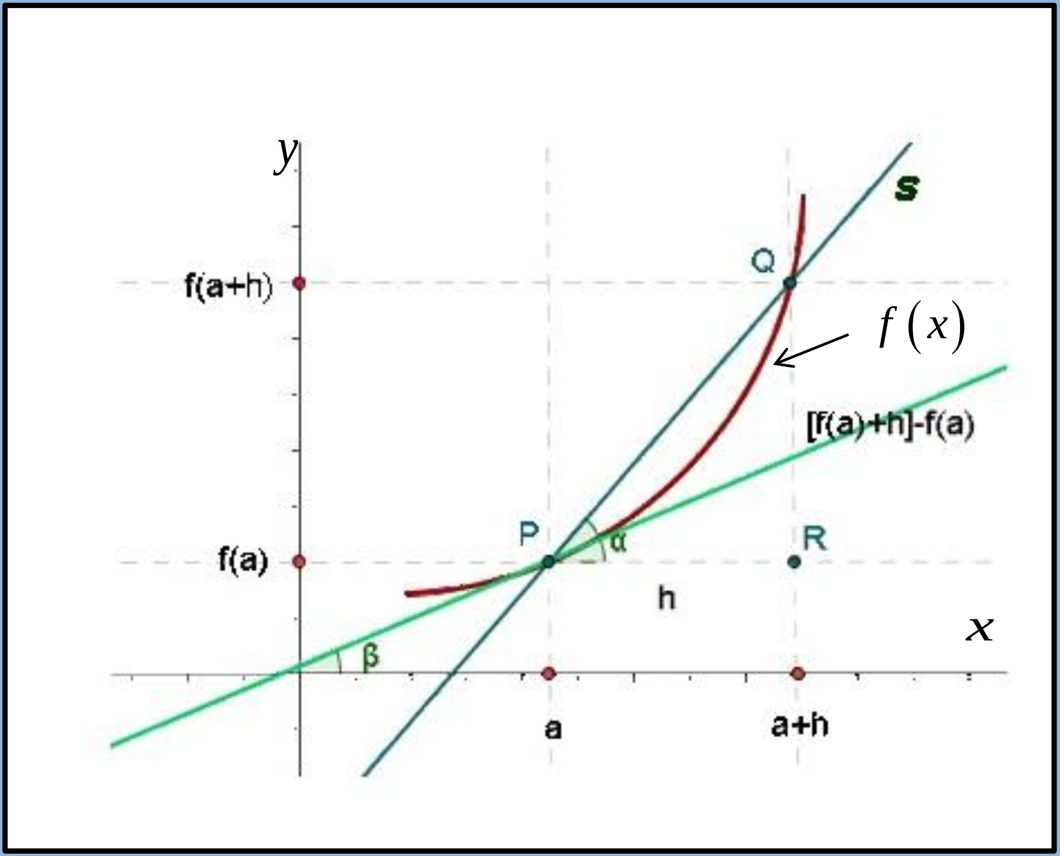
- Para conocer su ***velocidad instantánea*** a las *15:20 h*, por ejemplo, es necesario calcular la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores alrededor de esa hora*: entre las 15:15 y las 15:25; entre las 15:19 y las 15:21, etc.*

APLICACIONES DE LA DERIVADA

- **Aplicaciones Geométricas**:
- Pendiente de la Tangente a una curva
- Ángulo entre curvas
- Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a una curva
- **Aplicaciones Físicas:**
- La derivada como razón de cambio

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P. Entonces la **recta secante** tiende a ser la **recta tangente** a la función f(x) en P, y por tanto el **ángulo α tiende a ser β**.

$$f(a+h)-f(a)=\Delta y$$

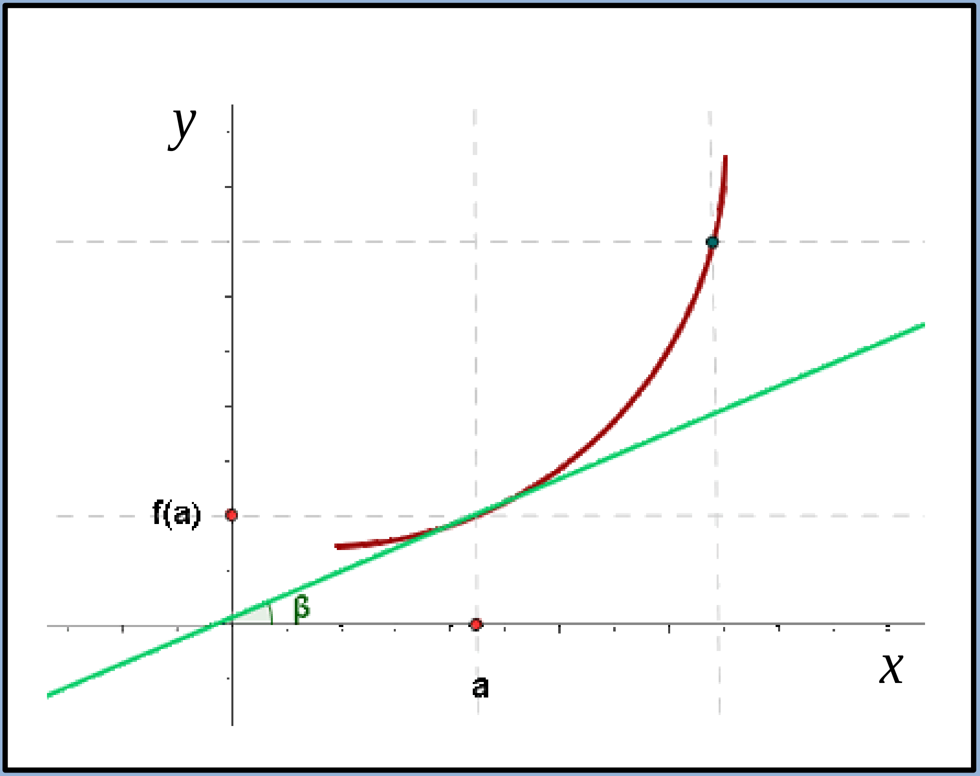
$$h=\Delta x$$

$$\tan\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)$$

Donde β es el ángulo que forma la recta tangente con el eje x

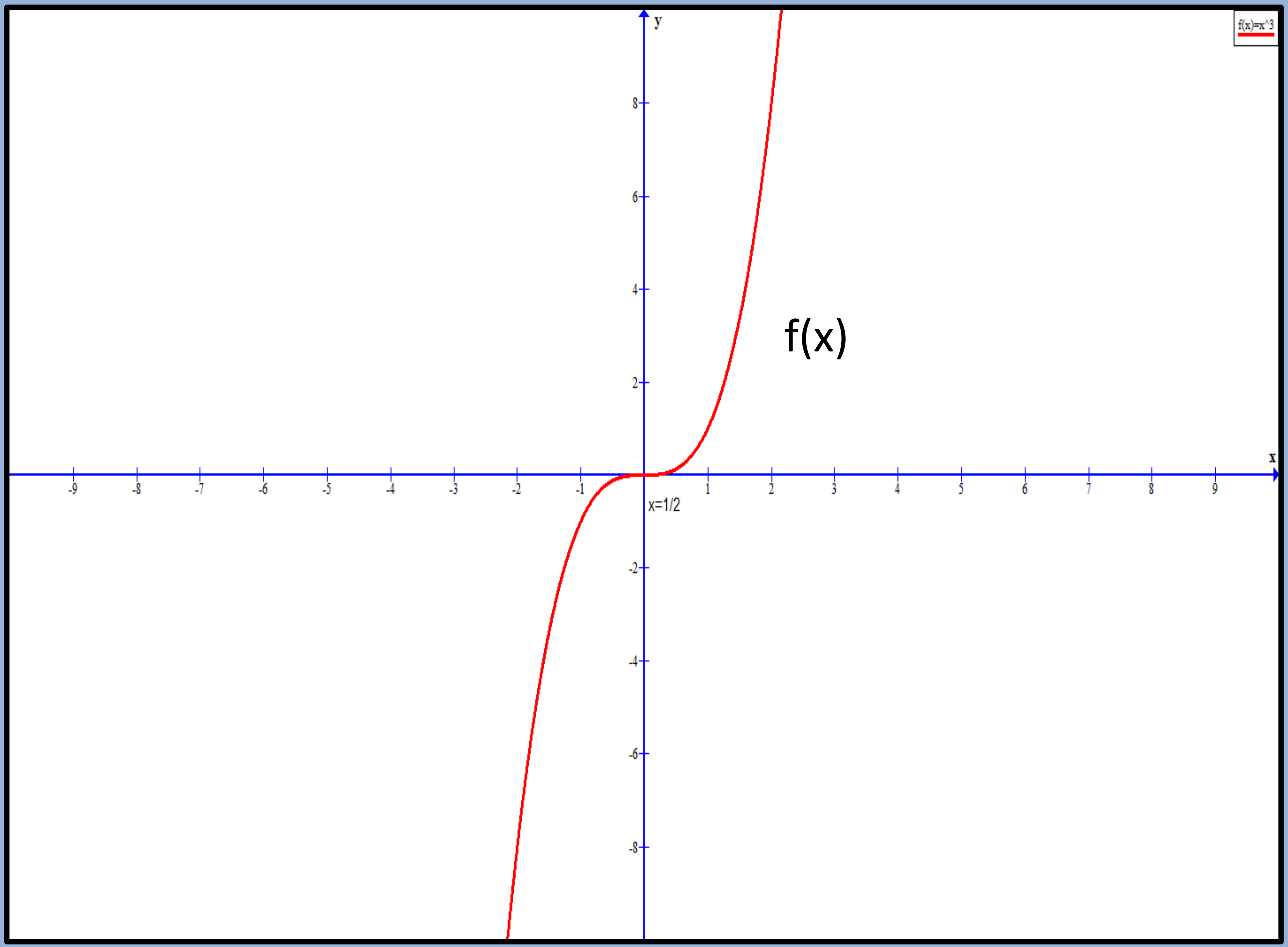
De lo anterior, la pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$m_T = f'(a)$$



Ejemplo: Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^3$ en $x=\frac{1}{2}$

Solución:

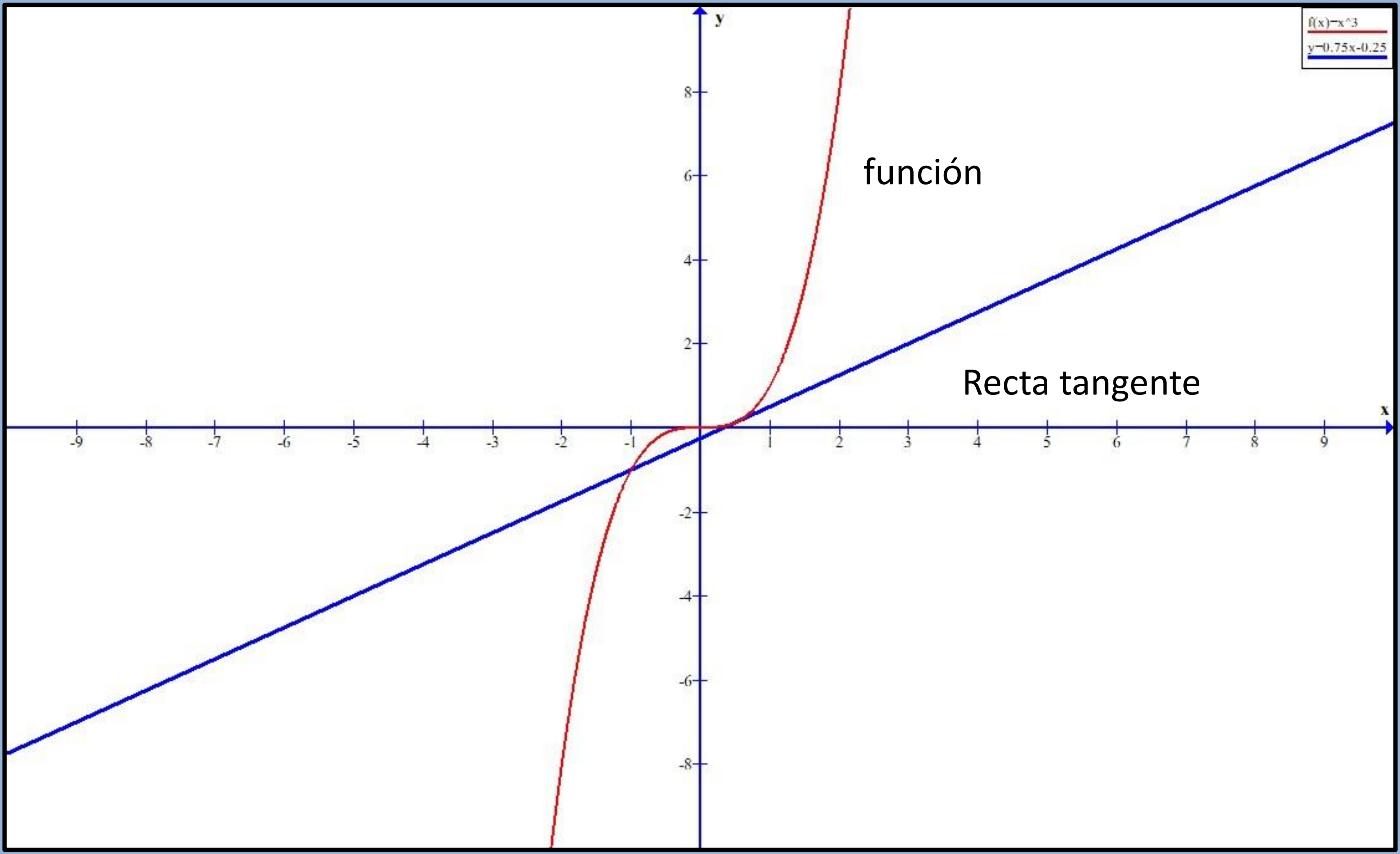


La derivada de la función es

$$\boxed{f'(x)=3x^2}$$

Al evaluar esta función en un punto, se obtiene la pendiente de la tangente a la curva f(x) en ese punto.

GRÁFICA DE LA CURVA Y DE LA TANGENTE



- Al evaluar en $x = \frac{1}{2}$, tanto a la función dada como a su derivada:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \longleftarrow$$

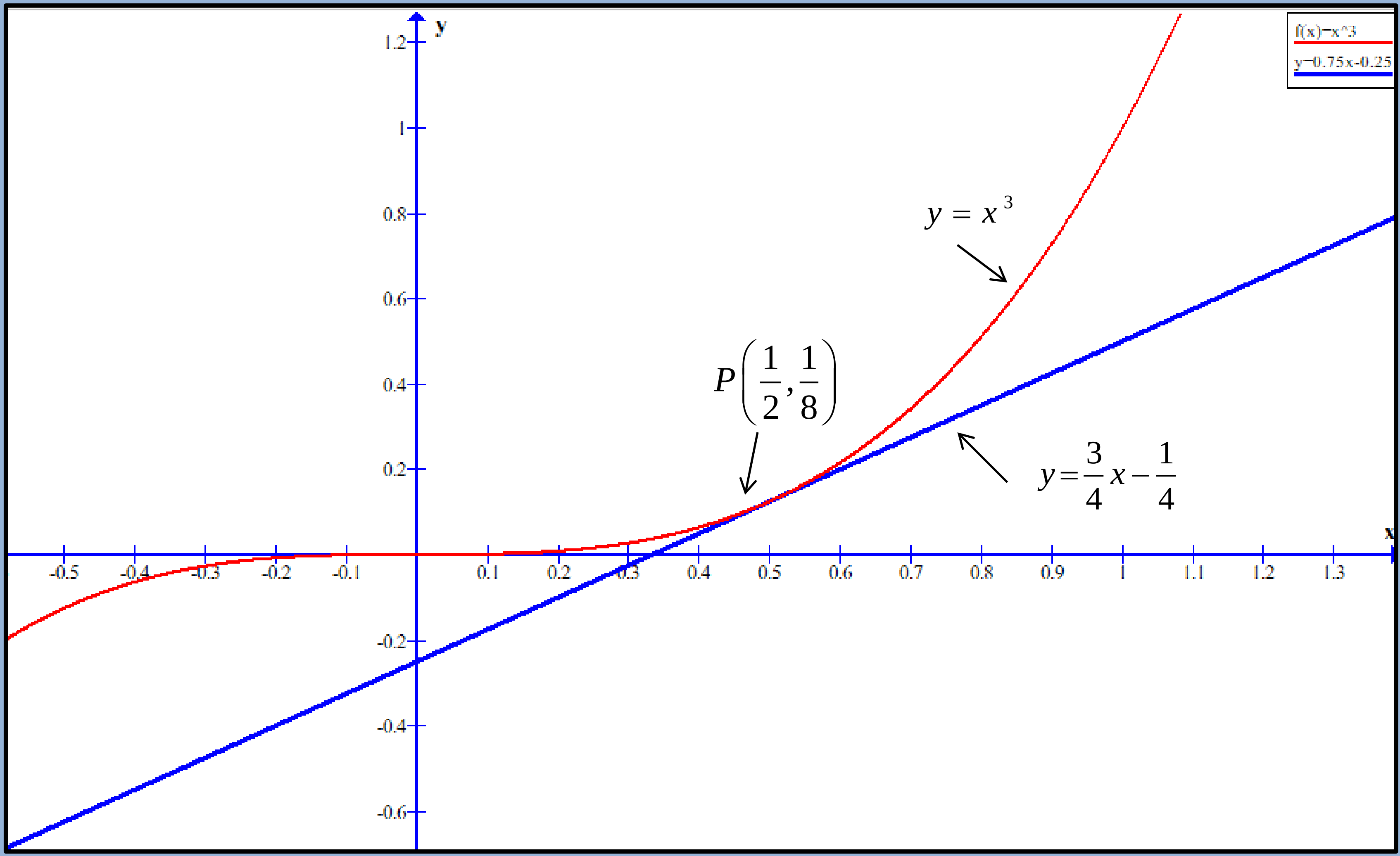
El punto de tangencia es (1/2,1/8)

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \longleftarrow$$

La pendiente de la recta tangente en (1/2,1/8) es 3/4

Para determinar la ecuación de la recta tangente: $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$

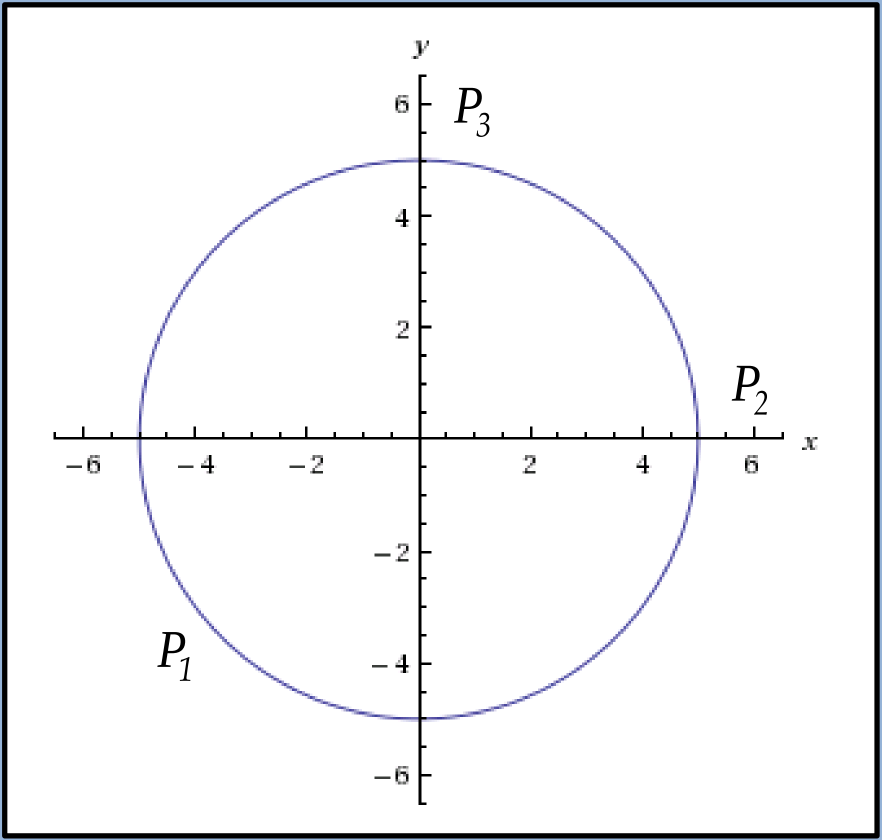
$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$



f(x)=x^3
y=0.75x-0.25
y
x
$y = x^3$
$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

Ejemplo:

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Encontrar las pendientes de las rectas tangentes a ella, en los puntos $P_1(-4,-3)$; $P_2(5,0)$; $P_3(0,5)$



Solución:

Sabemos que **la pendiente de la tangente a una curva en un punto es, geométricamente, la derivada de la curva en dicho punto.**

Derivando implícitamente

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

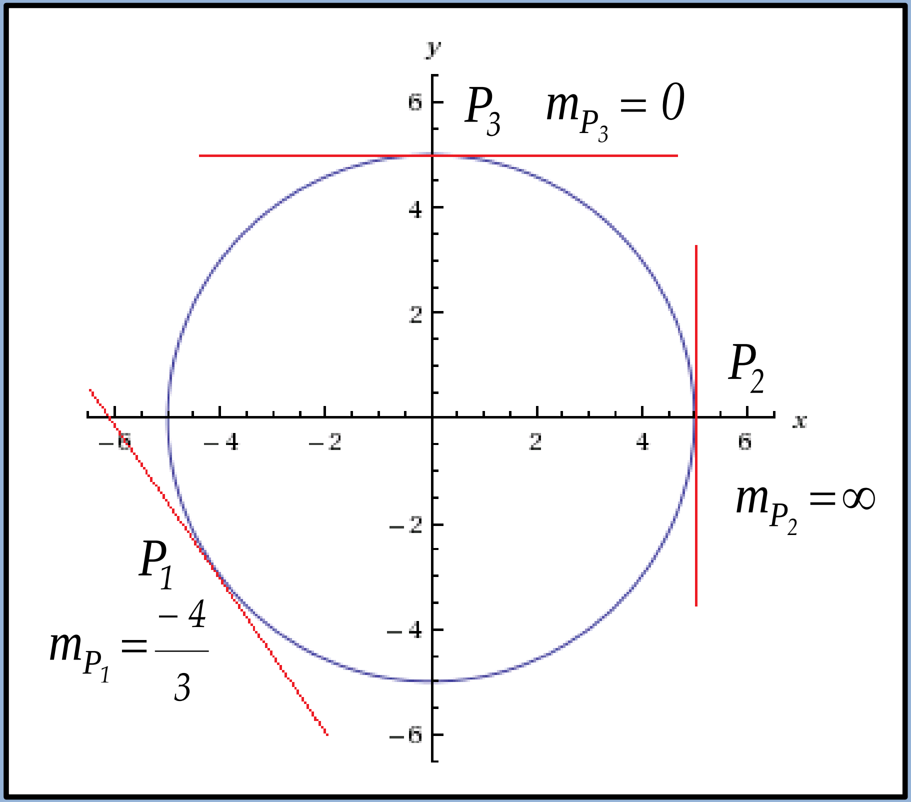
Al evaluar la derivada en cada punto, se tiene la pendiente de cada recta tangente en dicho punto :

$$m_{p_1} = -\frac{(-4)}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{p_2} = -\frac{5}{0} = \infty$$

$$m_{p_3} = -\frac{0}{5} = 0$$

GRÁFICA DE LA CURVA Y DE LAS RECTAS TANGENTES



Ejemplo: (Ángulo entre dos curvas)

Encontrar el ángulo de intersección entre las curvas de ecuación

$x^2 = y$ y $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

Solución:

El ángulo de intersección de dos curvas se define por el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.

Se obtienen los puntos de intersección:

$$x^2 = y \quad (1) \qquad\qquad x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$y + y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen los valores: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$

Sustituyendo cada valor obtenido en $x^2 = y \quad (1)$

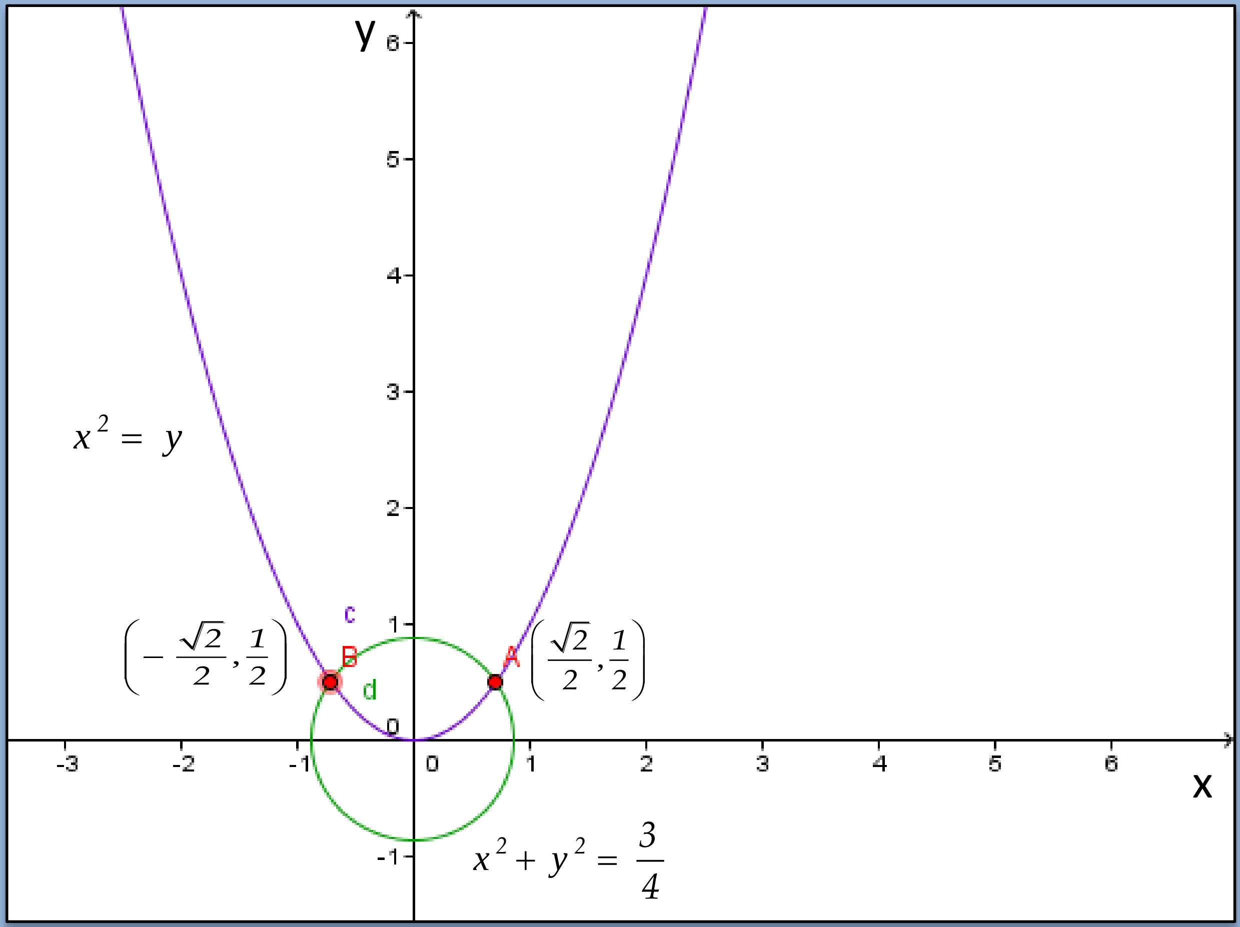
$x = \pm\sqrt{y}$ resulta $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

y $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ también $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2} = \pm\sqrt{\dfrac{-3}{2}}$

Estos valores
no son reales,
por lo que aquí
no se consideran

Entonces, únicamente se tienen dos puntos de intersección. Observando la gráfica:

Gráfica de las curvas y los puntos de intersección



Se hallan las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes a las curvas en cada punto de intersección, considerando que el ángulo entre dos rectas se calcula a partir de

$$\boxed{\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}}$$

Para cada curva considerando el punto de intersección $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se tiene:

$$x^2 = y \rightarrow \quad 2x = \frac{dy}{dx} \Rightarrow m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_A = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m_2 = -\left.\frac{x}{y}\right|_A = -\sqrt{2}$$

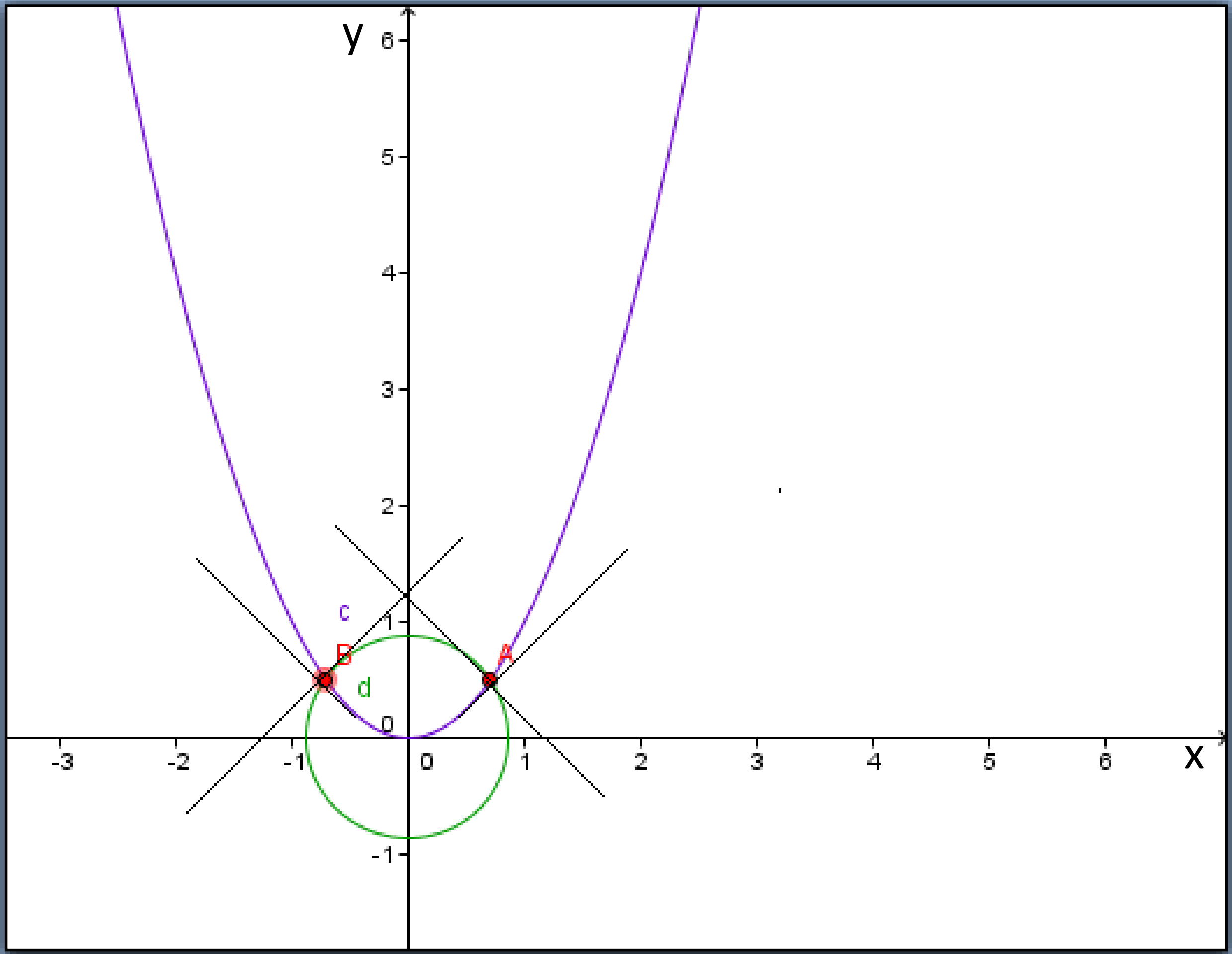
Sustituyendo los valores de las pendientes en la expresión para ángulo entre dos rectas:

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1 + \left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta_1 = ang\tan\left(2\sqrt{2}\right) = 70.528^o$$

Por simetría, para $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se tiene el mismo ángulo $\boxed{\Rightarrow \theta_2 = \theta_1}$

Finalmente



APLICACIONES FÍSICAS DE LA DERIVADA

Si una variable y depende del tiempo t entonces su derivada $\frac{dy}{dt}$ se denomina razón (tasa) de cambio respecto al tiempo. Si y mide la distancia, esta razón de cambio también se llama rapidez de variación.

En Ingeniería interesa conocer la razón a la cual el agua fluye en un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, etc.

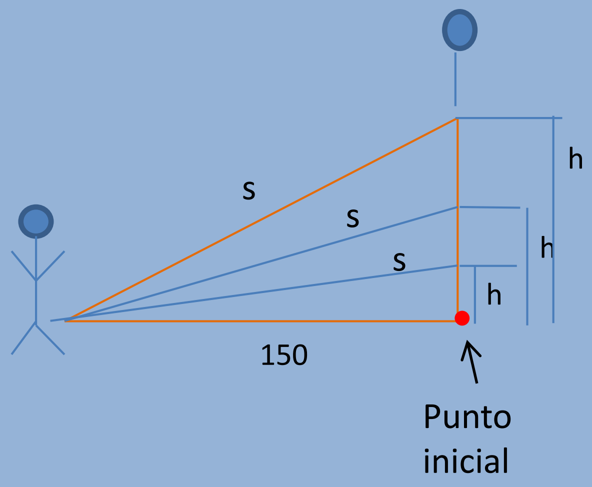
En diversos problemas, puede ser que se conozca una serie de datos que nos indiquen que existen tasas de cambio relacionadas (o razones afines).

Ejemplo:

Se suelta, desde el nivel de piso, un pequeño globo en un punto a 150 pies de un observador, quien también se encuentra al nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 pies por segundo**, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo, cuando el globo está a 50 pies de altura?**

Solución:

Consideremos realizar un modelo (figura) que permita relacionar los elementos del problema.



Datos:

t: número de segundos transcurridos a partir de que se soltó el globo

h: altura del globo

s: distancia del globo al observador

$$\frac{dh}{dt} = 8 \ \ pies \ \ por \ \ segundo$$

h y *s*: variables que dependen de *t* $\Rightarrow \ h = h(t) \ \ , \ \ s = s(t)$

Base del triángulo no cambia= 150

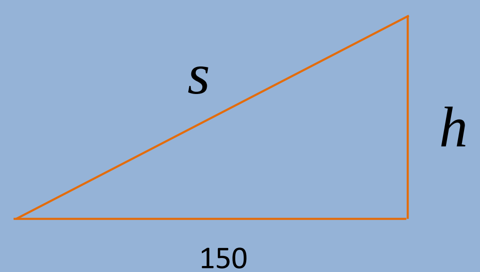
¿Qué se quiere conocer?

$$\boxed{\left.\frac{ds}{dt}\right|_{h=50}}$$

¿Cómo están relacionadas *h = h(t)* *y* *s = s(t) ?*

Del triángulo rectángulo y el Teorema de Pitágoras:

$$s^2 = h^2 + (150)^2$$



Derivando implícitamente

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt} \qquad \boxed{\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{h}{s}\frac{dh}{dt}}$$

En esta última expresión se observa que es necesario obtener el valor de *s* para *h = 50*
Del Teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$$

Teníamos:

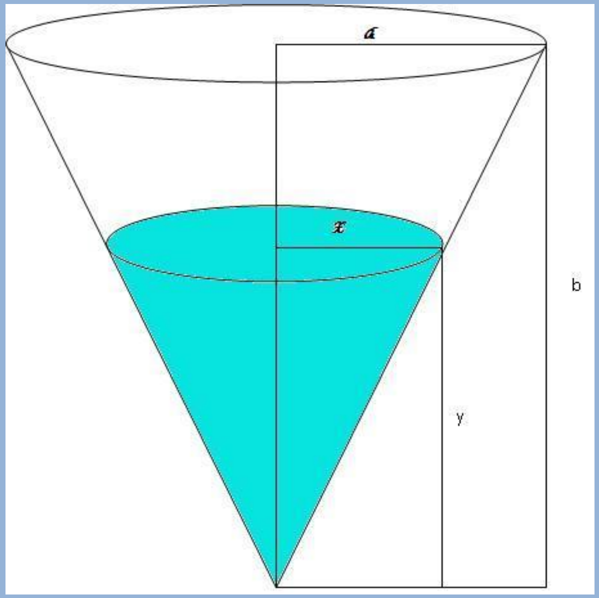
$$\frac{ds}{dt} = \frac{h}{s}\frac{dh}{dt}$$

Sustituyendo los datos

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{50}{50\sqrt{10}}(8) \approx 2.53 \ pies/seg}$$

Ejemplo:
En un depósito cónico de radio 6 dm y altura 18 dm, cae agua a razón de 2 litros por segundo. **¿Con qué rapidez se eleva el nivel del agua en el instante en que el depósito contiene la mitad de su capacidad total?**

Solución:
Inicialmente se dibuja una figura para identificar las variables y los datos del problema.



<u>Datos</u>
Las dimensiones del depósito cónico son:
Radio = r = a = 6 dm
Altura = h = b = 18 dm

Los datos del nivel del agua en el depósito son:
Altura = y = y(t)
Radio = x = x(t)

Gasto = $\frac{dV}{dt} = 2$ litros por segundo (l/s)

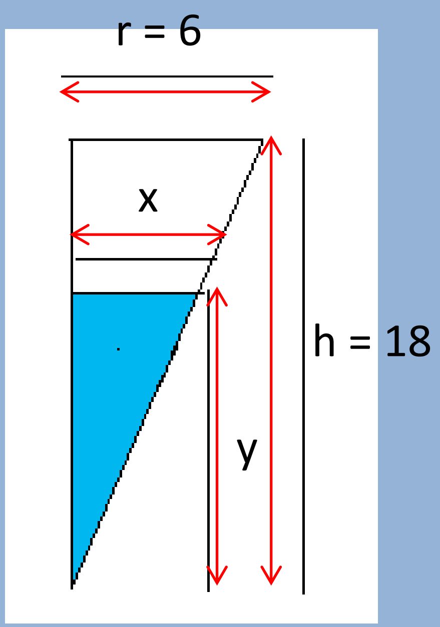
¿QUÉ SE BUSCA? $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{V=\frac{V_T}{2}}$ V_T es la capacidad total

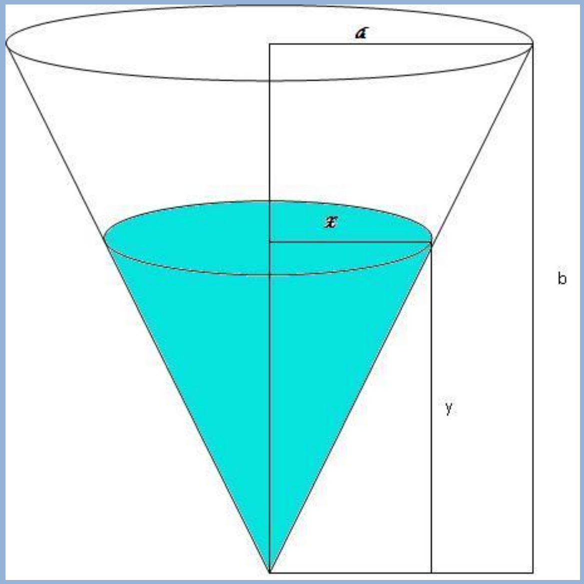
Para relacionar las razones de cambio:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \qquad (1)$$

Por triángulos semejantes

$$\frac{y}{x} = \frac{18}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{3} \qquad (2)$$





(2) en (1)

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{3}\right)^2 y = \frac{\pi y^3}{27} \longleftarrow$$ Se requiere ***y*** en términos de ***V***

Despejando a ***y:***

$$y = \sqrt[3]{\frac{27V}{\pi}} = 3\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Derivando con respecto a V

$$\frac{dy}{dV} = 3 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}\,\sqrt[3]{V^2}}$$

¿Qué se busca?

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{V=\frac{V_T}{2}}$$

¿Qué se conoce?

$$\frac{dV}{dt} = 2\,litros/segundo$$

¿QUÉ SE BUSCA? $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{V=\frac{V_T}{2}}$

¿QUÉ SE CONOCE? $\frac{dV}{dt} = 2\,litros/segundo$

Por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dV}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1(2)}{\sqrt[3]{\pi}\,\sqrt[3]{V^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}\,\sqrt[3]{V^2}}$$

Para evaluar en el instante en que $V = \frac{V_T}{2}$, se necesita la capacidad total del depósito: V_T

$$V_T = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6)^2(18) = 216\pi\ dm^3$$

Cuando el depósito está a la mitad de su capacidad total se tiene:

$$V = 108\pi\ dm^3$$

Entonces

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{V=\frac{V_T}{2}} = \left.\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}\ \sqrt[3]{V^2}}\right|_{V=108\pi} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}\ \sqrt[3]{(108\pi)^2}} = 0.28\ dm/s$$

Es la rapidez con que se eleva el nivel del agua en el momento indicado

Gracias