Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas

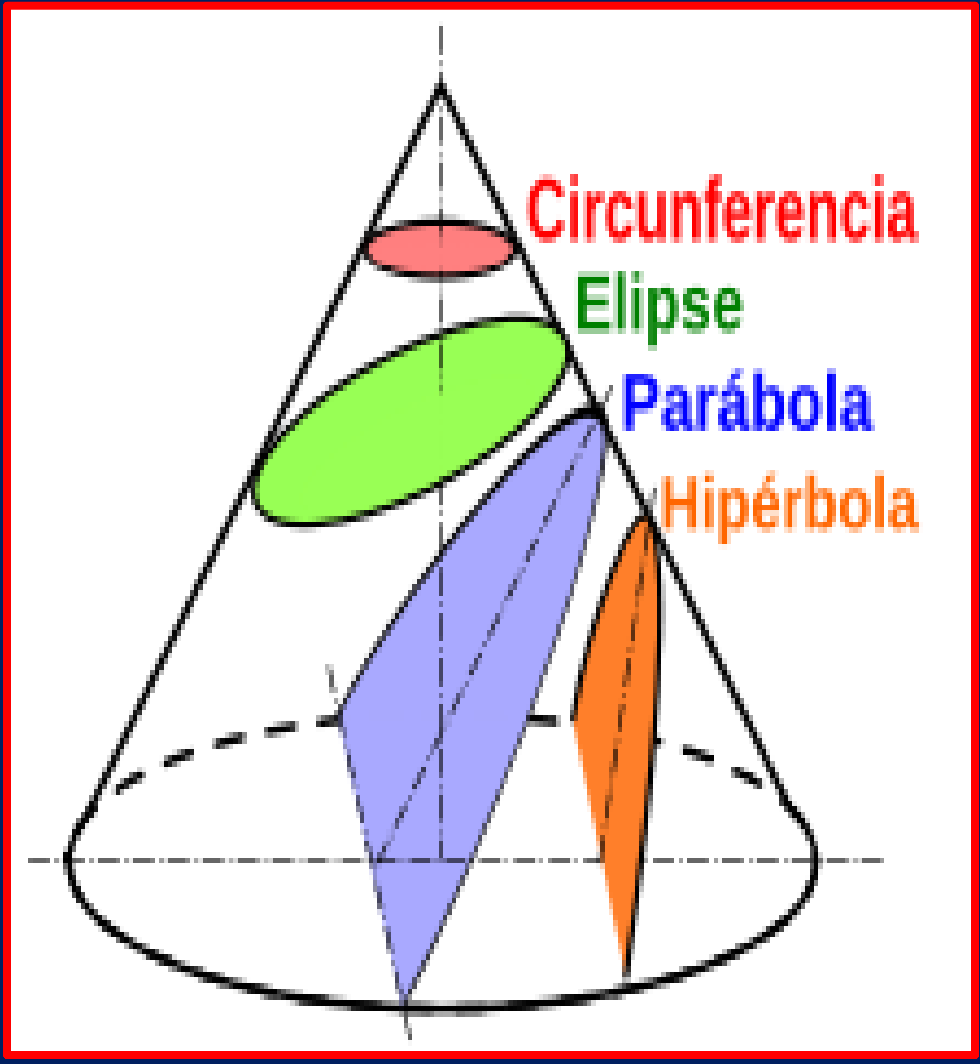
Academia de Cálculo y Geometría Analítica

Las Cónicas

Pablo García y Colomé

LAS CÓNICAS

Menecmo (380 - 320 a.C.), matemático y geómetra griego, discípulo de Platón y tutor de Alejandro Magno, descubrió estas curvas y fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) de Perga, quien primero las estudió detalladamente. Al considerar intersecciones entre un cono y un plano, llegó a la interpretación geométrica de estas curvas, lo que se observa en la siguiente figura



LA CIRCUNFERENCIA

La invención de la rueda revolucionó la vida humana. Su primera representación está fechada en 3500 a.C en una placa de arcilla. Fue encontrada por arqueólogos en las ruinas de la ciudad-estado de la región de Ur, actual Irak

La circunferencia inició con René Descartes, al asignarle valores a los puntos externos de un círculo

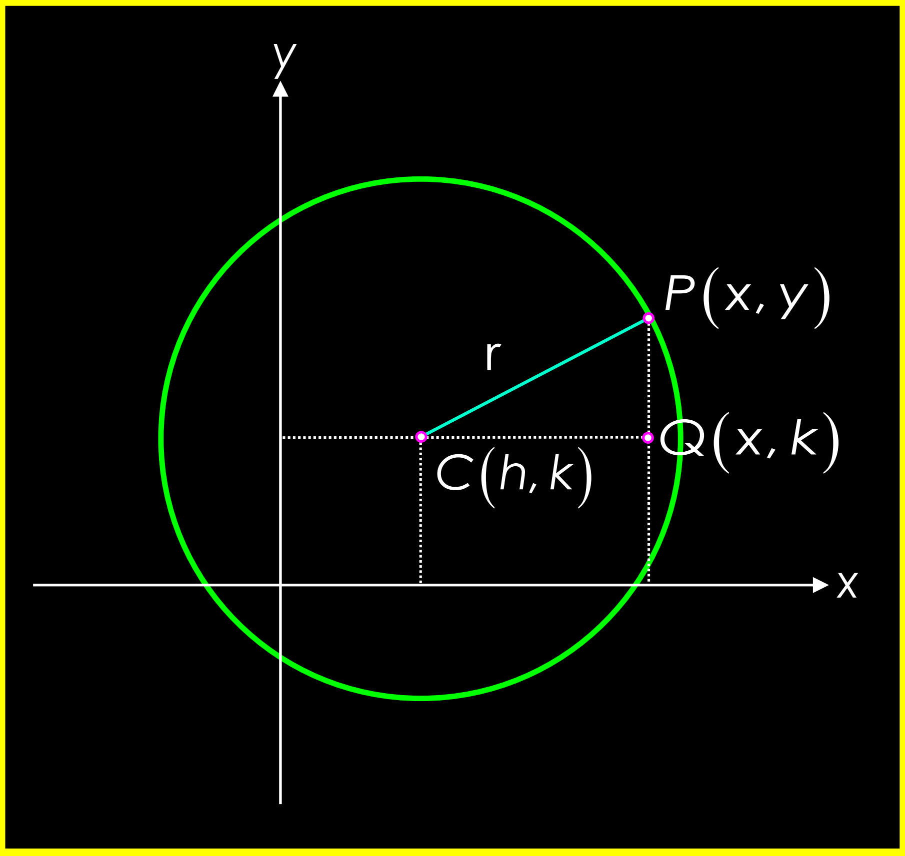
LAS CÓNICAS

Es el lugar geométrico en el plano, formado por todos los puntos que equidistan de un punto fijo conocido como centro

$$r^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{PQ}^2$$

$$\overline{CQ}^2 = (x-h)^2 \quad y \quad \overline{PQ}^2 = (y-k)^2$$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$



Cuando el centro coincide con el origen su ecuación queda entonces de la forma

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

LAS CÓNICAS

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$$

$$D=-2h \quad ; \quad E=-2k \quad ; \quad F=h^2+k^2-r^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

Ejemplo. *Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo radio es* 3 *y cuyo centro es la intersección entre las rectas cuyas ecuaciones son:*

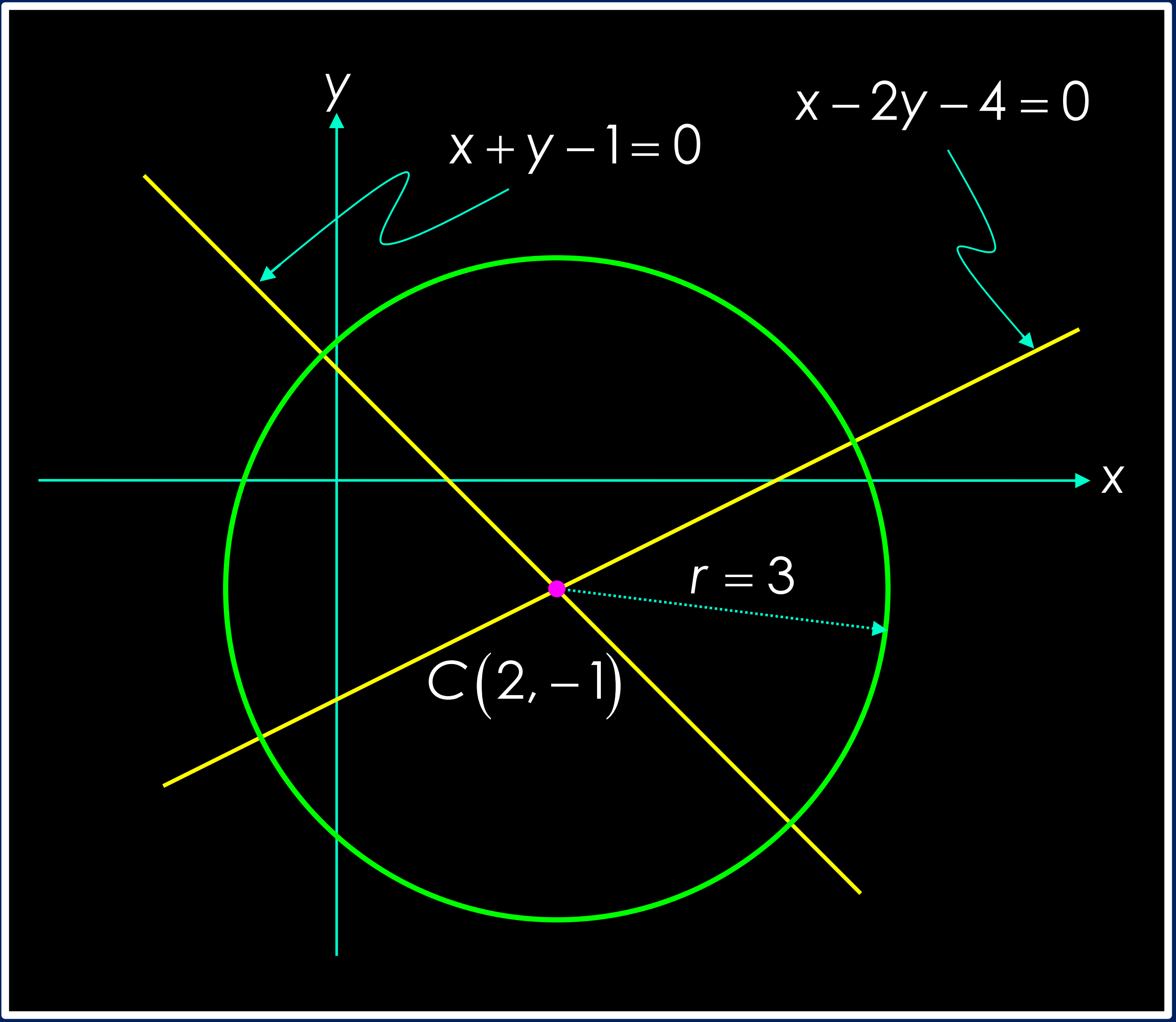
$$x-2y-4=0 \quad y \quad x+y-1=0$$

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \; ; \quad 2y+4-x=0 \;\Rightarrow\; 2y+4+y-1=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(2,-1) \\ r=3 \end{cases} \;\Rightarrow\; \boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=9}$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=0 \quad \therefore \quad \boxed{x^2+y^2-4x+2y-4=0}$$

LAS CÓNICAS



LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Dada la ecuación general siguiente que representa una circunferencia, determinar su centro, su radio y hacer un trazo aproximado de su gráfica***

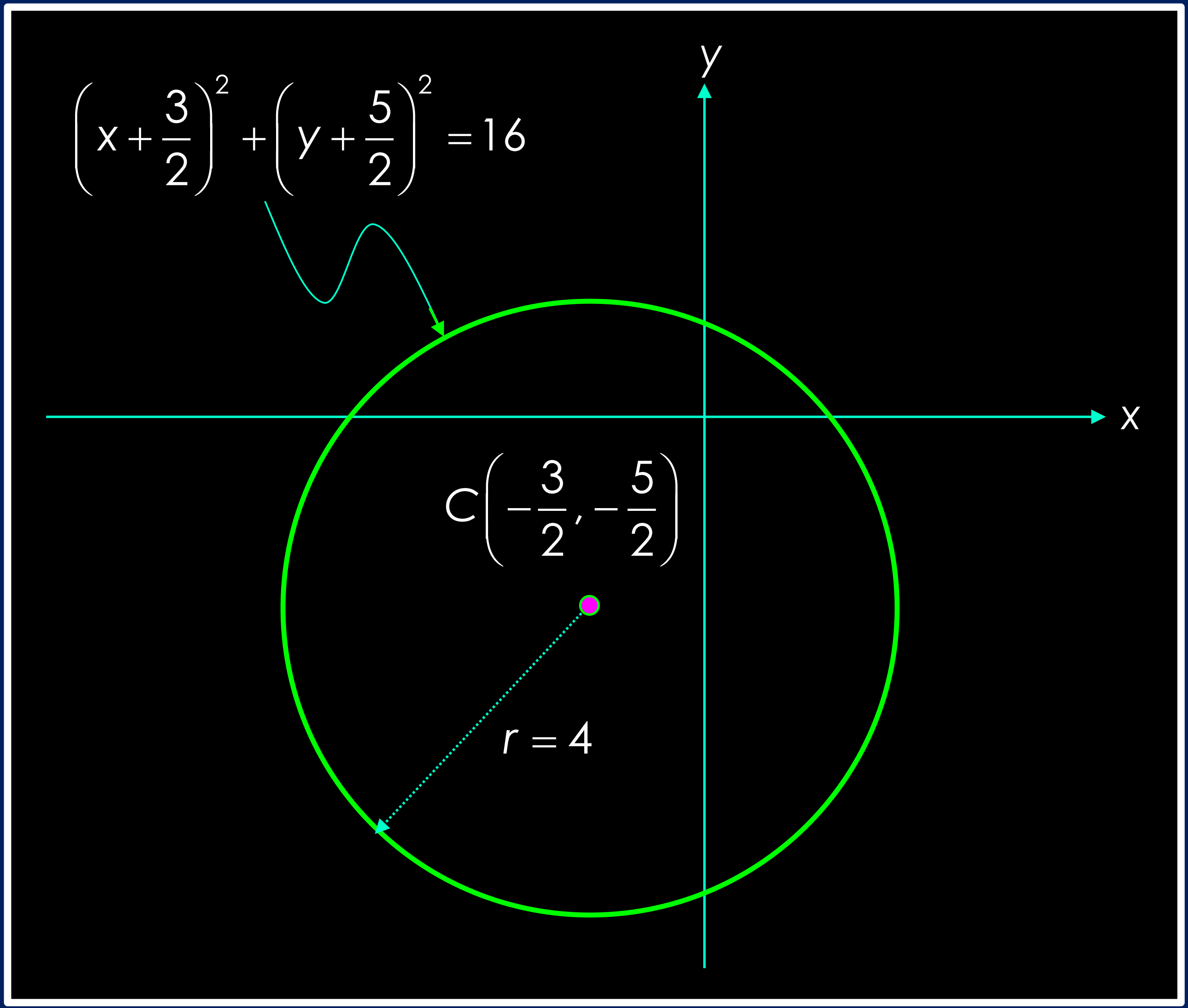
$$x^2+y^2+3x+5y-\frac{15}{2}=0$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-\frac{15}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{34}{4}-\frac{15}{2}=0 \quad \therefore \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=16$$

$$\boxed{C\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right) \quad ; \quad r=4}$$

LAS CÓNICAS


$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=16$$
y
x
$C\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$
$r=4$

Ejemplo. **Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos**

$$\left(-2,2\right),\left(0,2+2\sqrt{3}\right) \text{ y } \left(2+2\sqrt{3},0\right)$$

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$4+4-2D+2E+F=0 \quad \Rightarrow \quad 2D-2E-F=8 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)E+F=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)D+F=0 \quad \cdots \quad (3)$$

De (2) y (3) $\quad \left(2+2\sqrt{3}\right)E+F=\left(2+2\sqrt{3}\right)D+F \quad \Rightarrow \quad D=E$

LAS CÓNICAS

$$En\,(1)\quad \therefore\quad F=-8\quad y\ en\,(2)$$

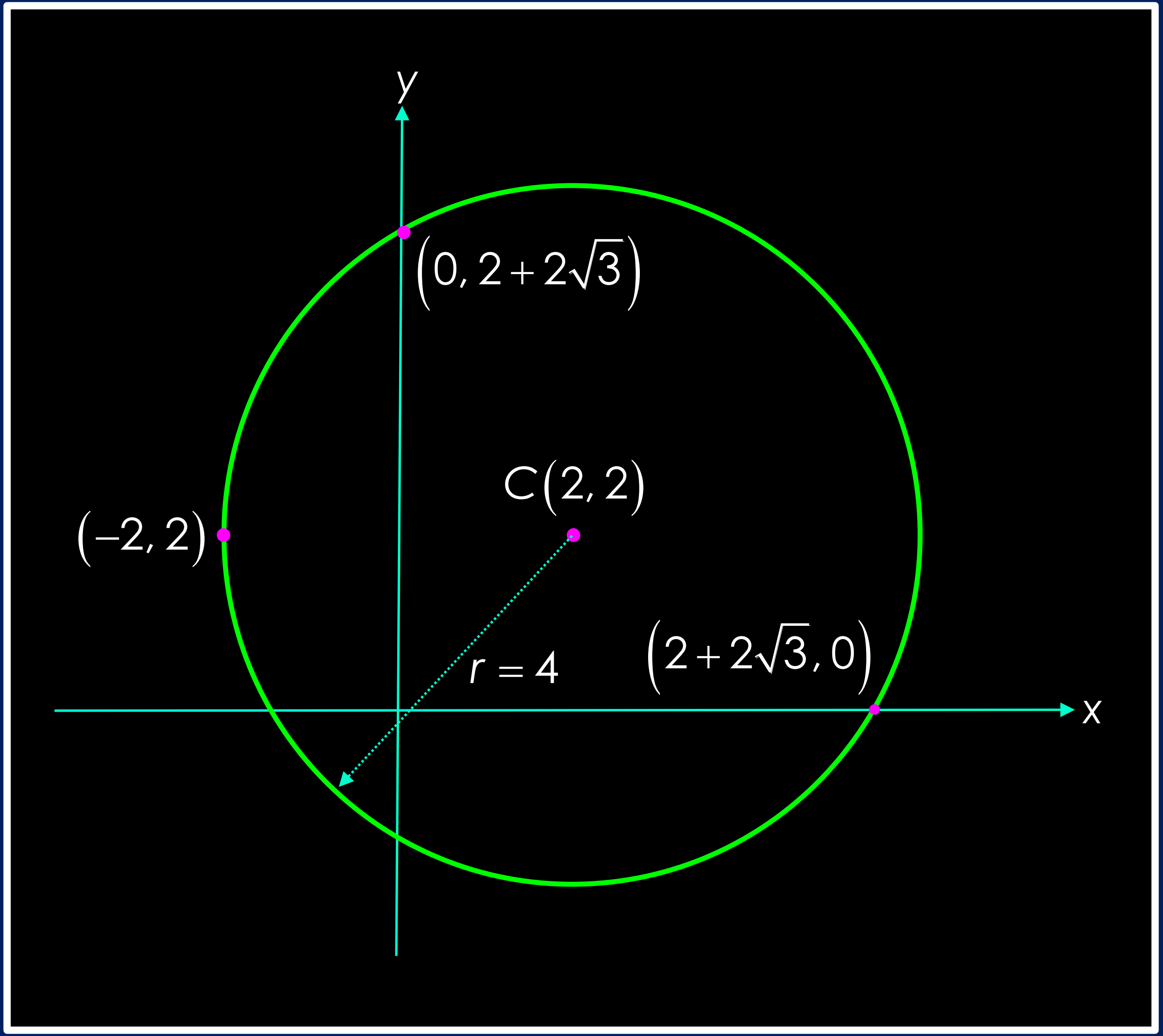
$$\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)E=8\quad\Rightarrow\quad E=\frac{8-4-8\sqrt{3}-12}{2+2\sqrt{3}}$$

$$E=\frac{-8\sqrt{3}-8}{2+2\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{-4\left(2+2\sqrt{3}\right)}{2+2\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad E=-4\quad y\quad D=-4$$

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

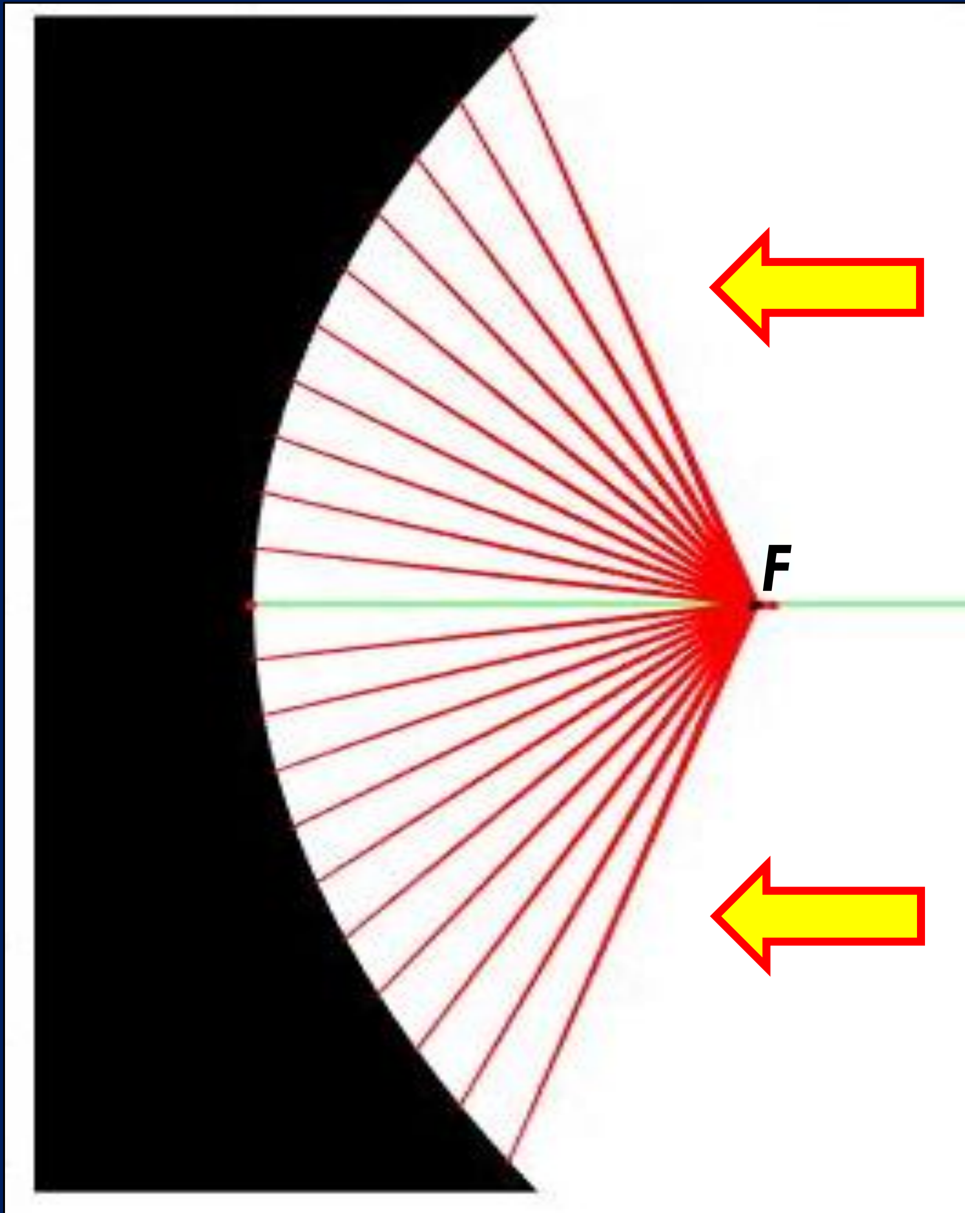
$$x^2+y^2-4x-4y-8=0\quad\therefore\quad\boxed{\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=16}$$

LAS CÓNICAS



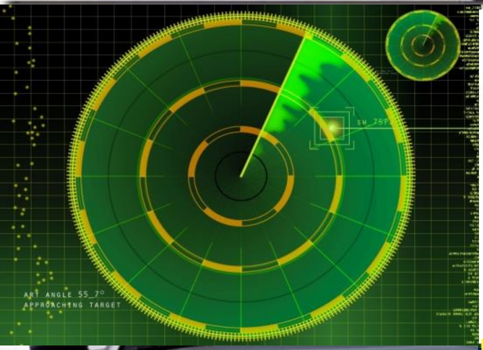
LA PARÁBOLA

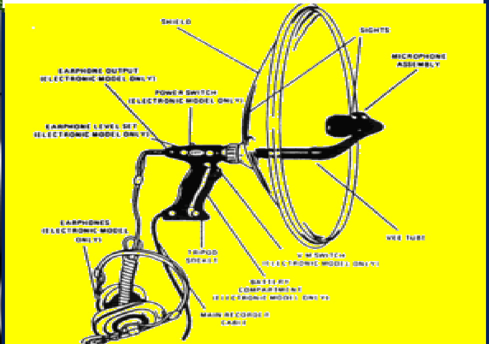
Parábola viene del griego parabolé, comparación, semejanza. Está formada por la palabra para, al margen y bolé, arrojar, o sea, lanzar al margen de algo. Apolonio argumentó que si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico con los rayos luminosos paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se aglomera en el foco



LAS CÓNICAS

Se cuenta que Arquímedes quemó los barcos romanos al defender Siracusa con espejos parabólicos

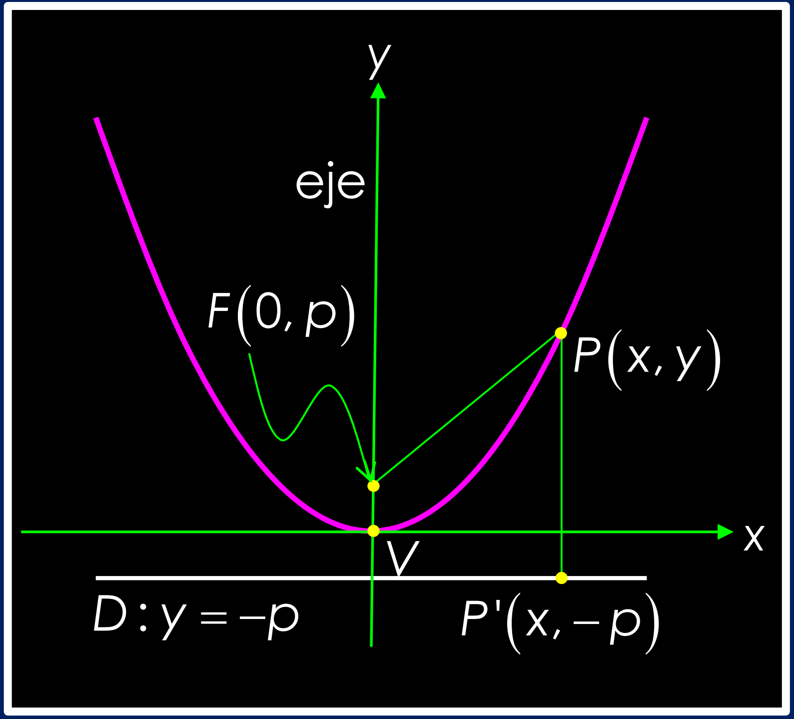




Actualmente esta propiedad se utiliza en radares, antenas de televisión, espejos solares, estufas, faros de los automóviles, micrófonos de largo alcance

LAS CÓNICAS

Es el conjunto de todos los puntos que se mueven en un plano de tal forma que su distancia a una recta fija (D) llamada directriz, es siempre igual a su distancia a un punto fijo que no pertenece a la recta y que se llama foco (F)



$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

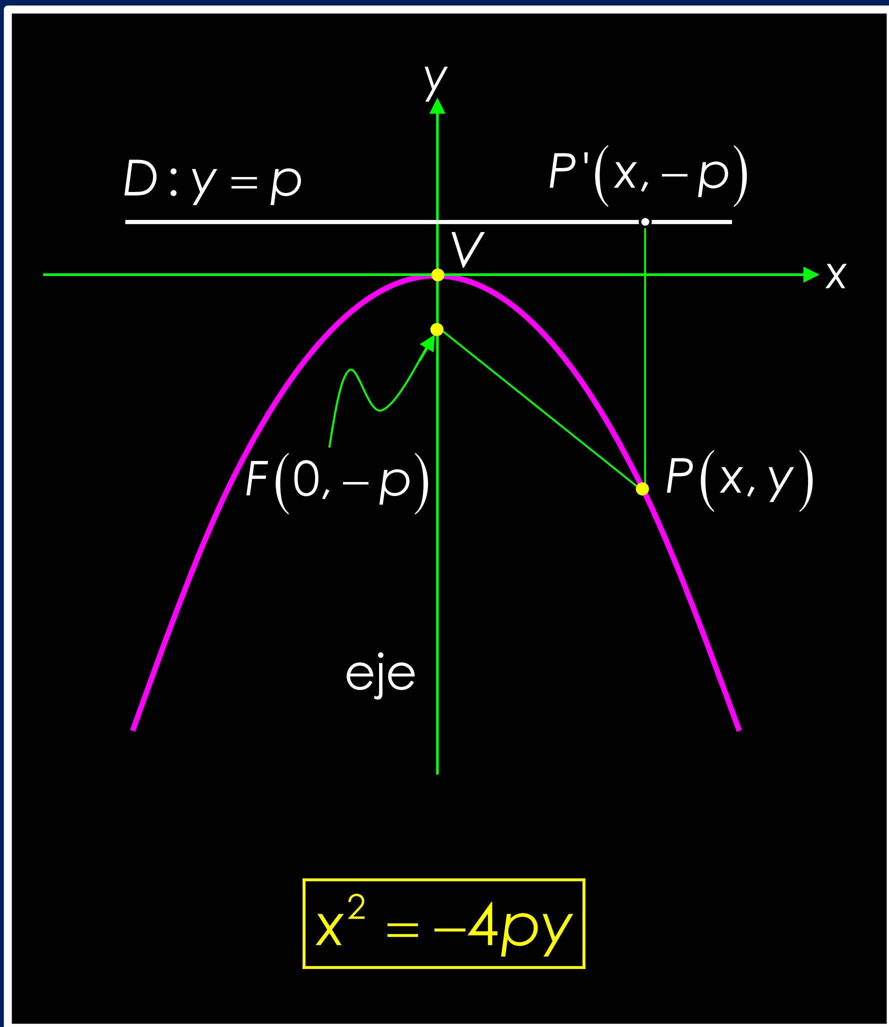
$$(x-0)^2+(y-p)^2=(x-x)^2+(y+p)^2$$

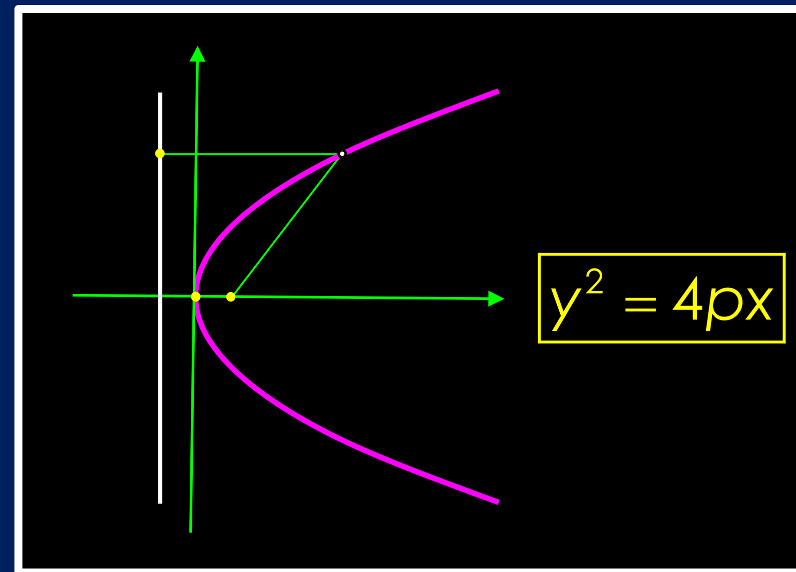
$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

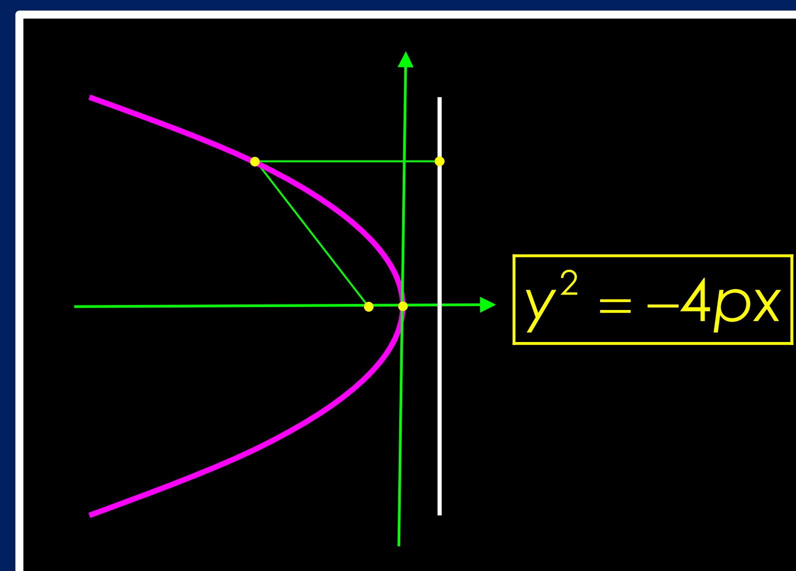
$$\therefore \quad \boxed{x^2=4py}$$

$y^2 = -4px$

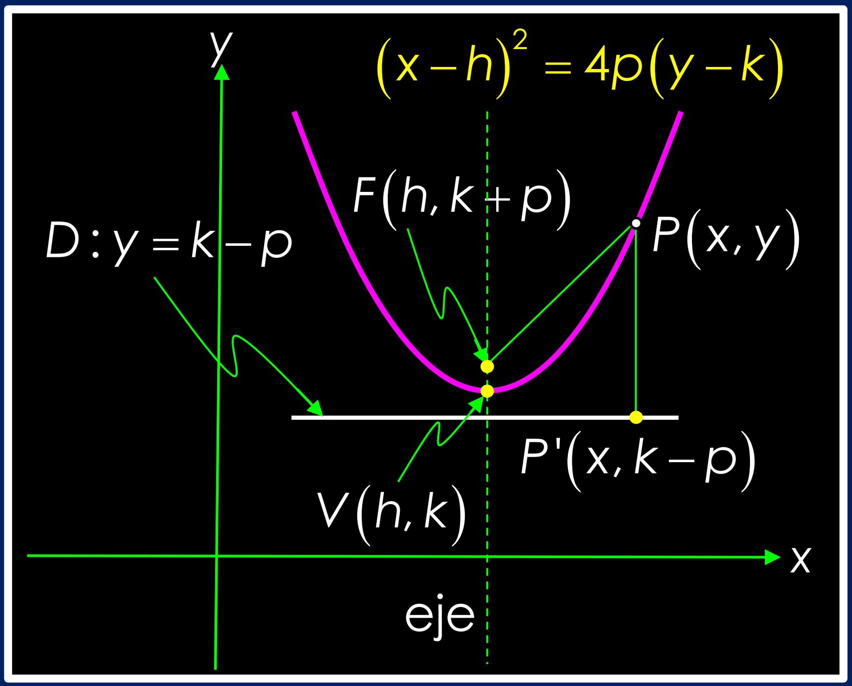
LAS CÓNICAS



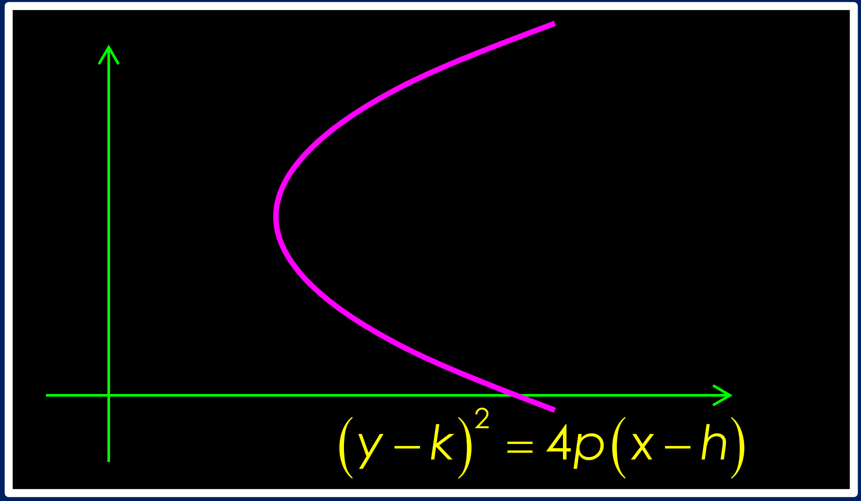




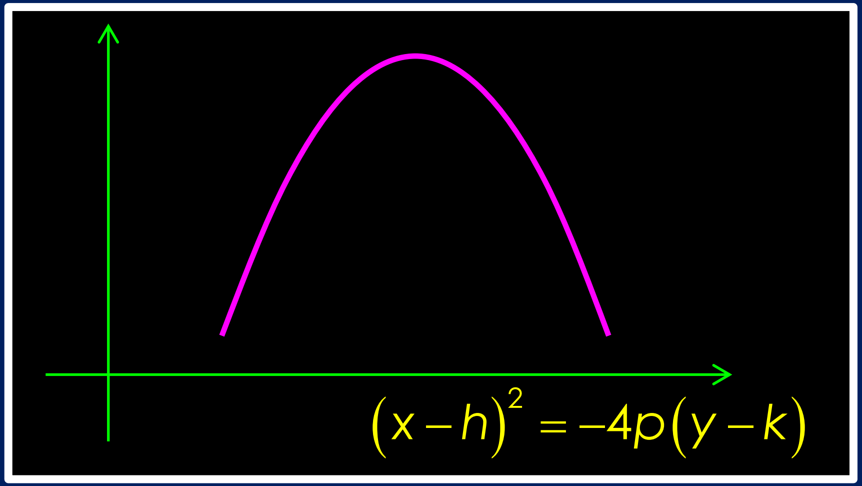
LAS CÓNICAS



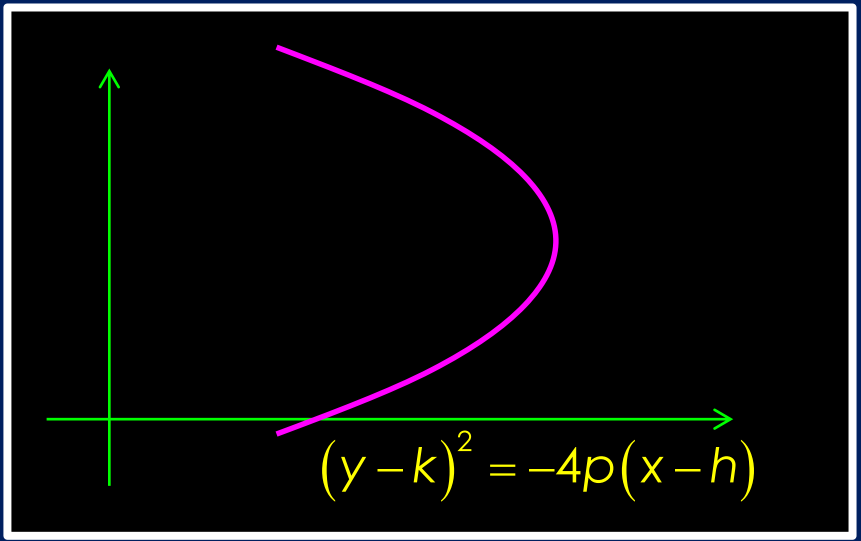
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
$F(h, k+p)$
$D: y = k-p$
$P(x, y)$
$P'(x, k-p)$
$V(h, k)$
y
x
eje



$(y-k)^2 = 4p(x-h)$



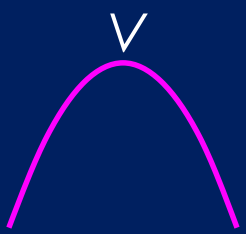
$(x-h)^2 = -4p(y-k)$



$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Determinar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, su eje de simetría en el eje de las ordenadas y que pasa por el punto*** $P(-2,-1)$***. Determinar directriz, foco, lado recto y gráfica***



$$x^2 = -4py$$

$$P(-2,-1)$$

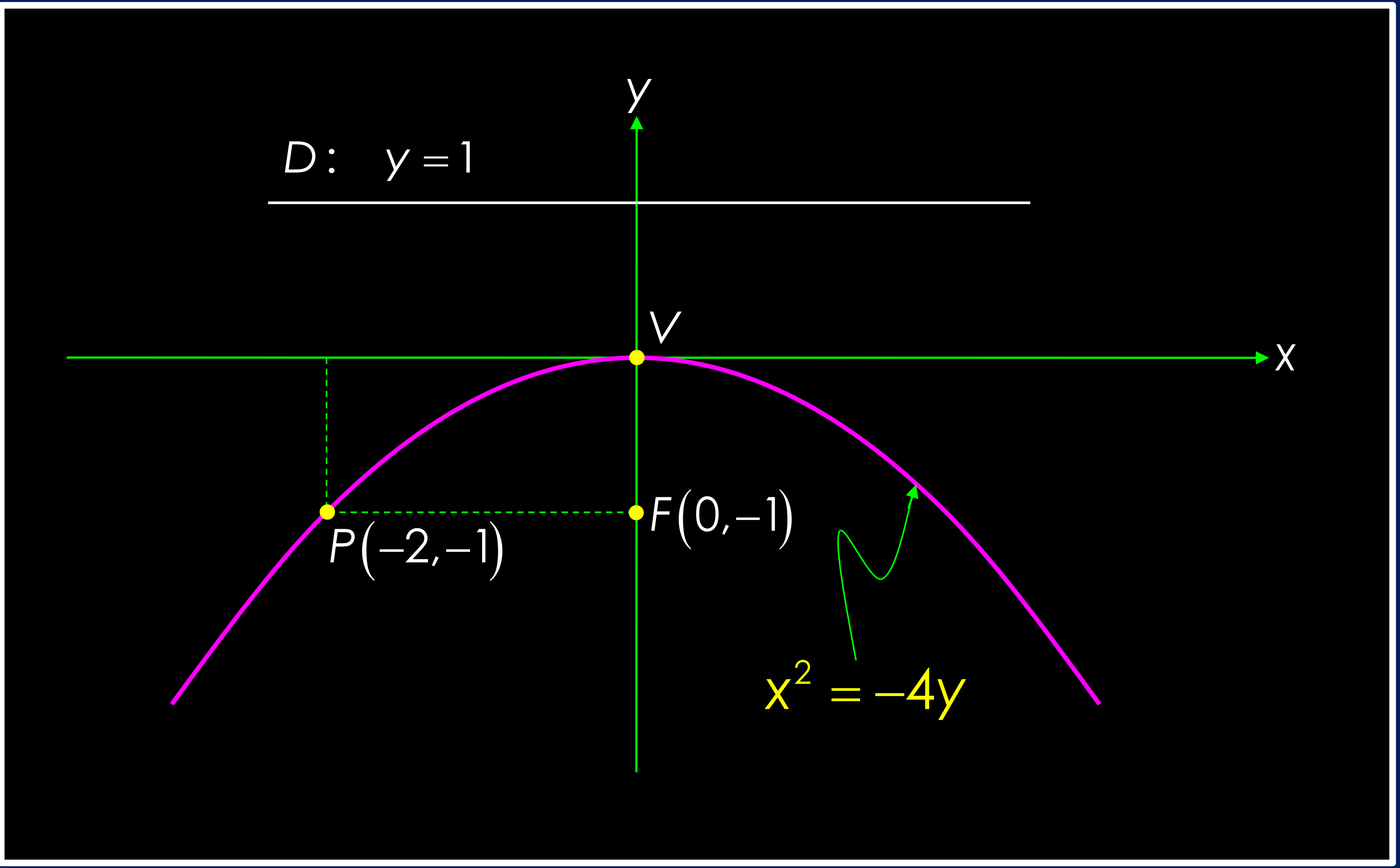
$$x^2 = -4py \quad \Rightarrow \quad (-2)^2 = -4p(-1) \quad \Rightarrow \quad 4 = 4p \quad \therefore \quad p = 1$$

$$x^2 = 4(-1)y \quad \therefore \quad \boxed{x^2 = -4y}$$

$$D: \quad y = 1 \quad : \quad F(0,-1)$$

$$LR = 4|p| \quad \Rightarrow \quad LR = 4$$

LAS CÓNICAS



LAS CÓNICAS

Ejemplo. Dada la ecuación $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$***, que representa a una parábola, expresarla en su forma canónica, determinar vértice y foco, su eje de simetría, su directriz y hacer un trazo aproximado de su gráfica***

$$y^2 - 2y - 4x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 - 1 - 4x + 9 = 0$$

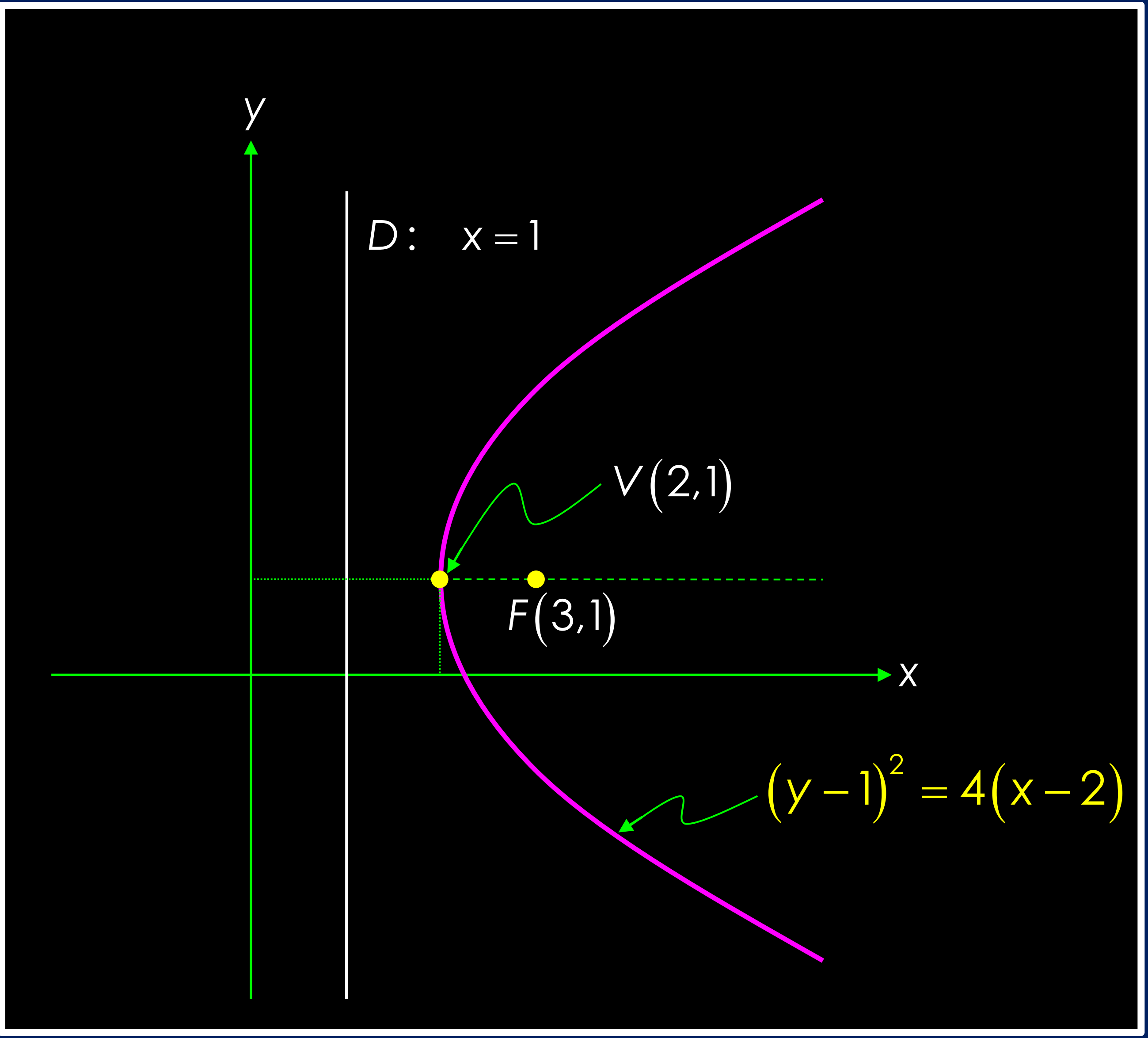
$$y^2 - 2y + 1 - 1 - 4x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = 4x - 8$$

$$\therefore \quad \boxed{(y-1)^2 = 4(x-2)}$$

$$V(2,1) \quad : \quad F(3,1) \quad ; \quad \text{eje de simetría}: y = 1$$

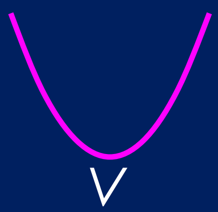
$$4p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 1 \quad ; \quad D: x = 1$$

LAS CÓNICAS



LAS CÓNICAS

Ejemplo. Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(-2,-4)$ si su eje de simetría es la recta $x=-2$ y pasa por el punto $P(0,-2)$. Graficar de manera aproximada y dar la ecuación de su directriz



$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 = 4p(y+4)$$

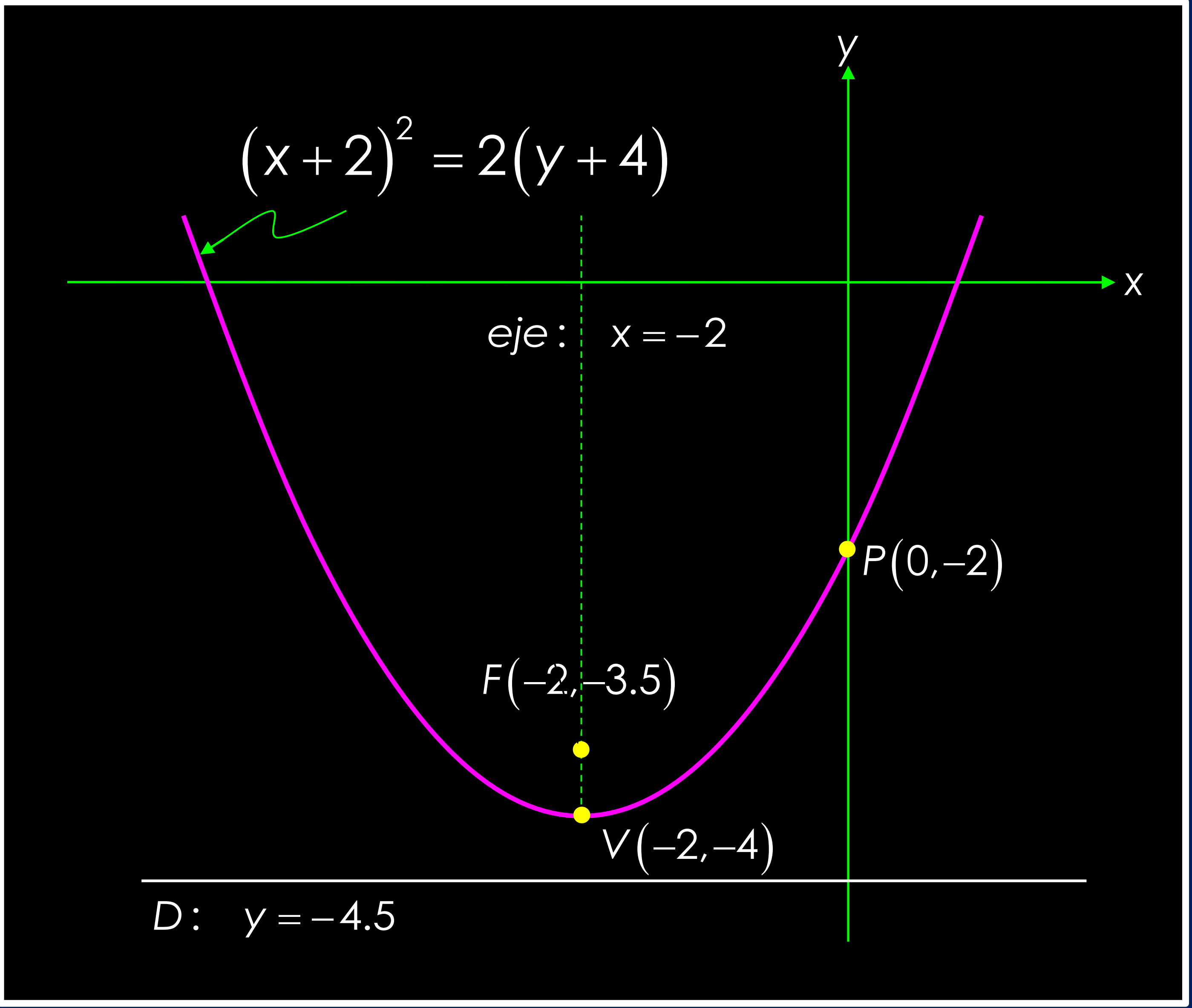
$$P(0,-2)$$

$$(0+2)^2 = 4p(-2+4) \quad \Rightarrow \quad 4 = 8p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2 = 4p(y+4) \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(y+4)$$

$$\therefore \quad \boxed{(x+2)^2 = 2(y+4)}$$

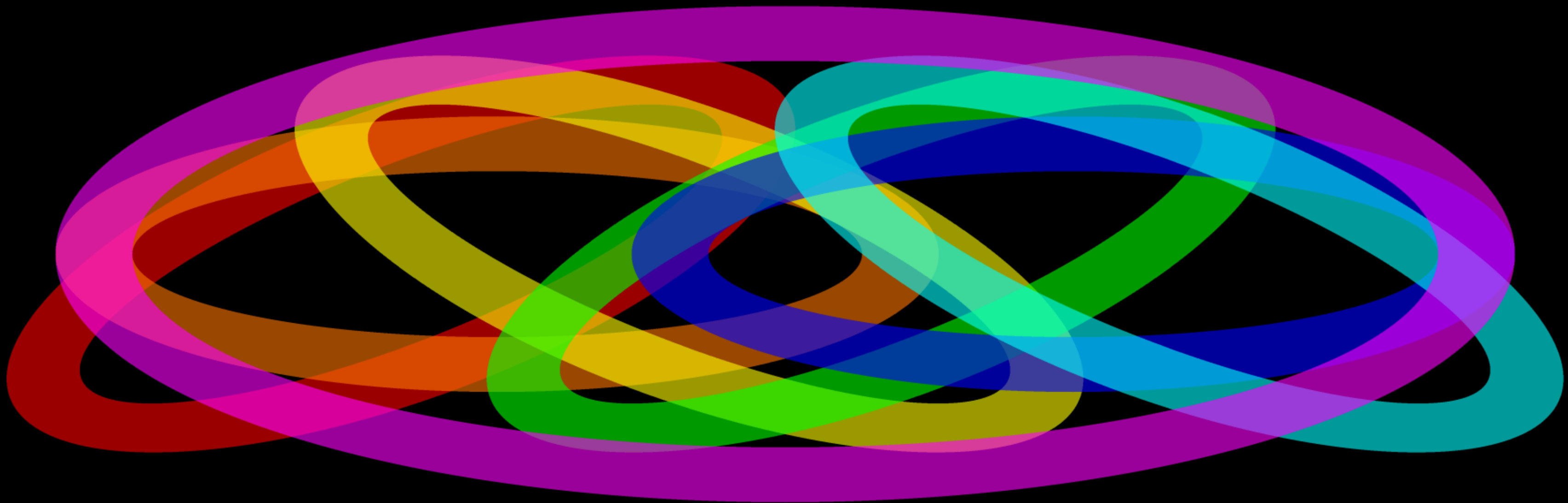
LAS CÓNICAS



LAS CÓNICAS

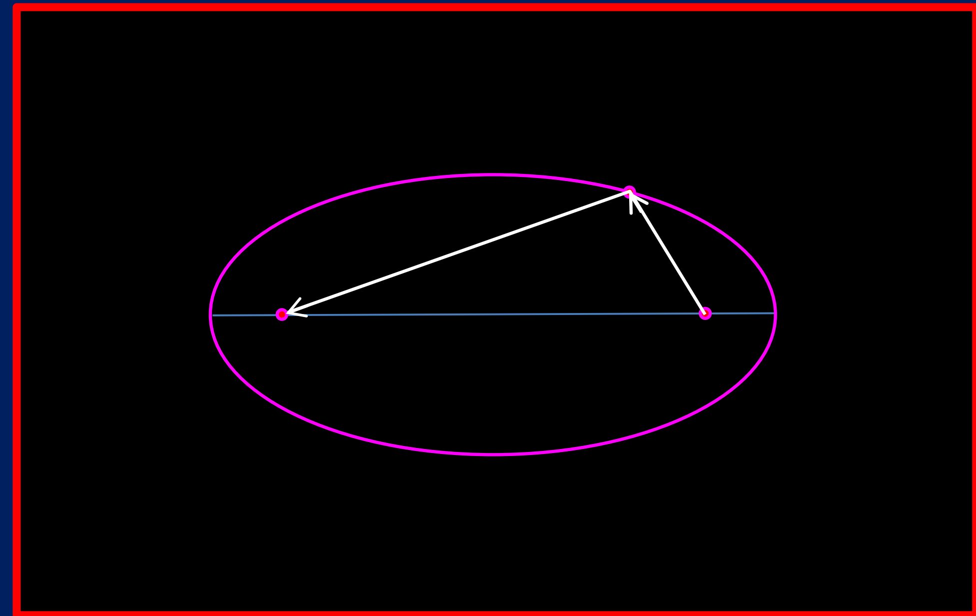
LA ELIPSE

Cuando falta algo en la oración o cuando en una película dos secuencias no tienen continuidad cronológica, hay elipsis, porque falta algo. La palabra viene del latín ***ellipsis*** *y esta voz del griego* ***elleipsis*** *(falta). Esta curva cerrada, llamada elipse, debe su nombre al ser una "circunferencia imperfecta"*

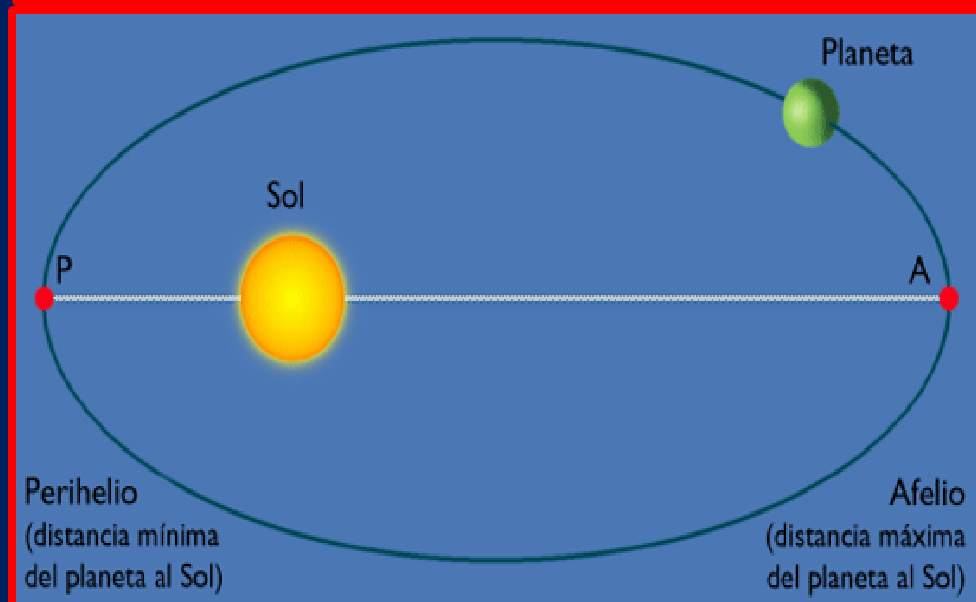


LAS CÓNICAS

Apolonio argumentó que si se emplaza una luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se junta en el otro foco



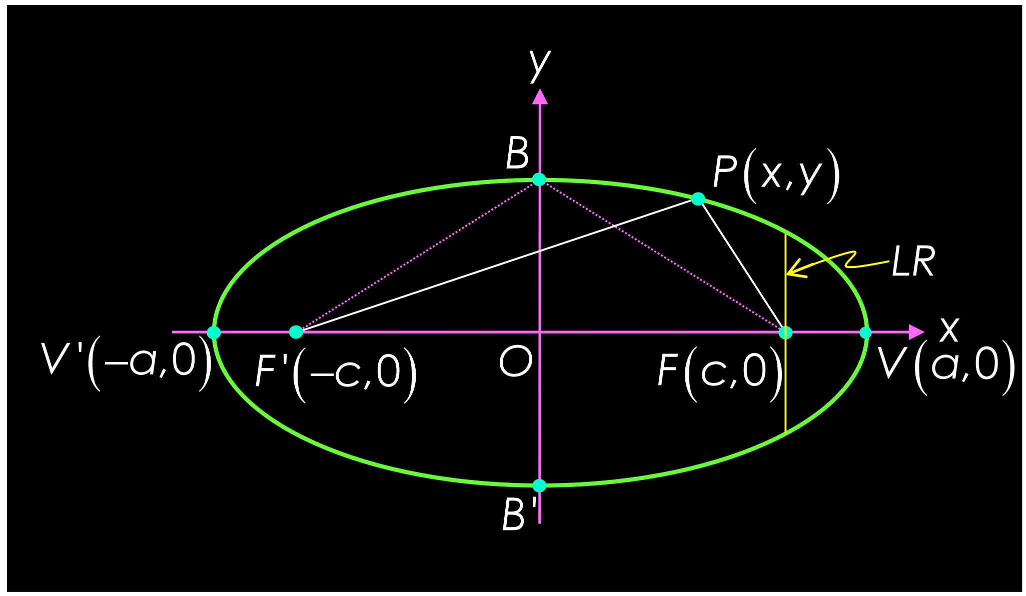
El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos



LAS CÓNICAS

Es el conjunto de todos los puntos que se mueven en un plano tales que la suma de sus respectivas distancias a dos puntos fijos del mismo plano llamados focos $(F \text{ y } F')$ ***es una constante***

$$\boxed{d(PF)+d(PF')=\text{constante}}$$



$$d(PF)+d(PF')=2a$$

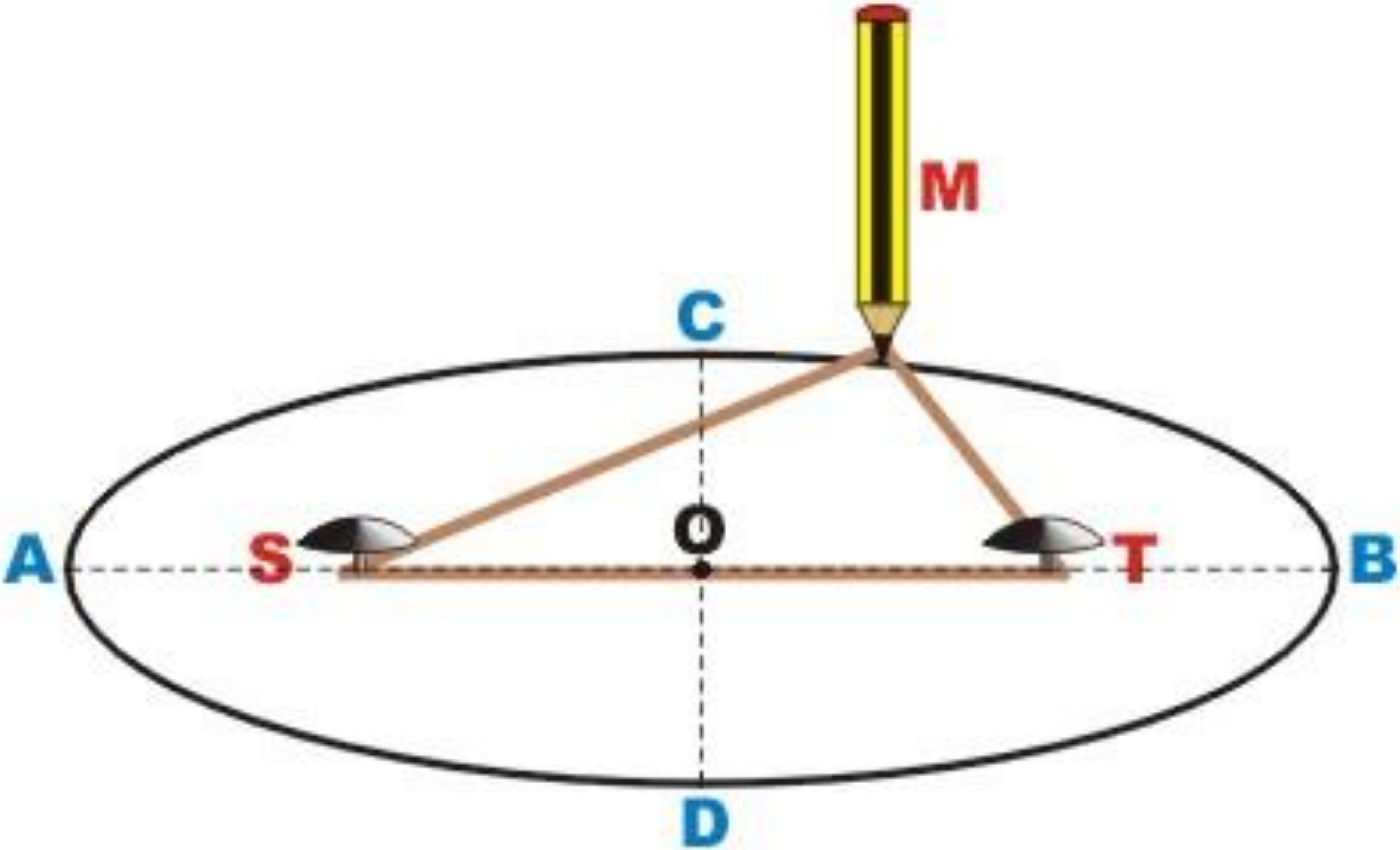
$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

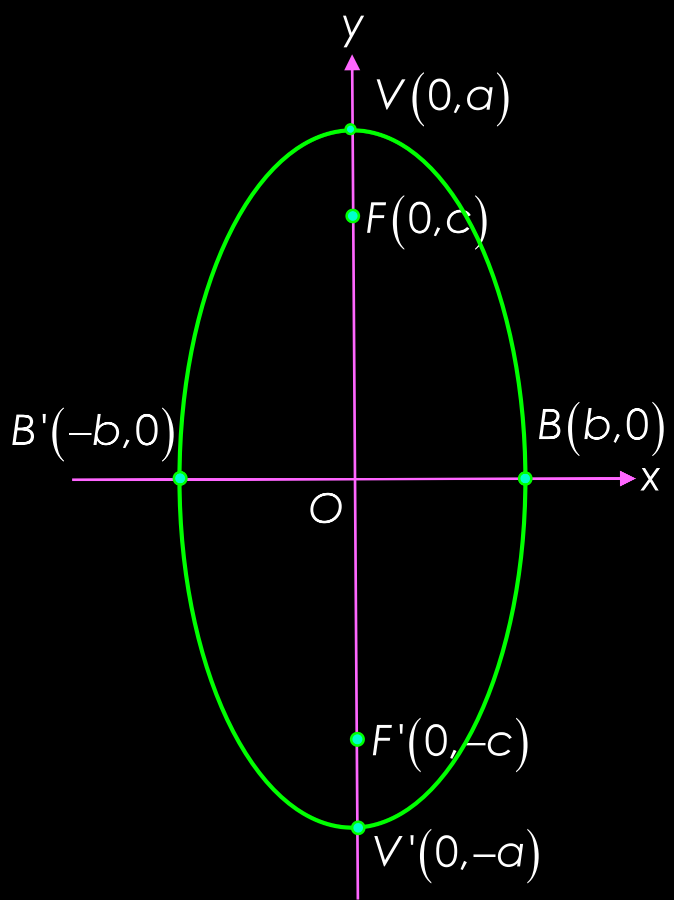
$$\boxed{e=\frac{c}{a}} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad ; \quad c<a \quad \Rightarrow \quad e<1$$

$$\boxed{LR=\frac{2b^2}{a}}$$

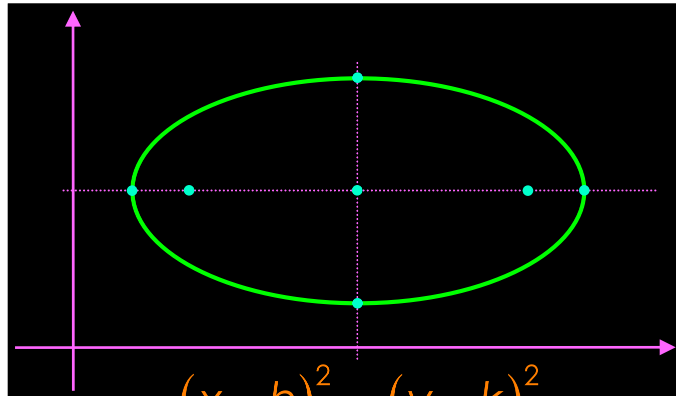
LAS CÓNICAS



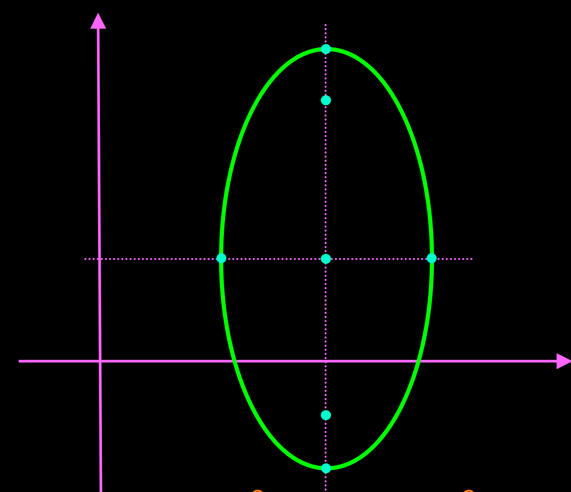
LAS CÓNICAS



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

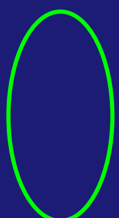


$$\therefore\quad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ejemplo. *Dada la siguiente ecuación de una elipse, determinar las coordenadas de sus vértices, de sus focos, su excentricidad, la longitud de su lado recto y hacer un trazo aproximado de su gráfica*



$$9x^2+4y^2=36$$

$$9x^2+4y^2=36 \;\Rightarrow\; \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{\frac{36}{9}}+\frac{y^2}{\frac{36}{4}}=1 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}$$

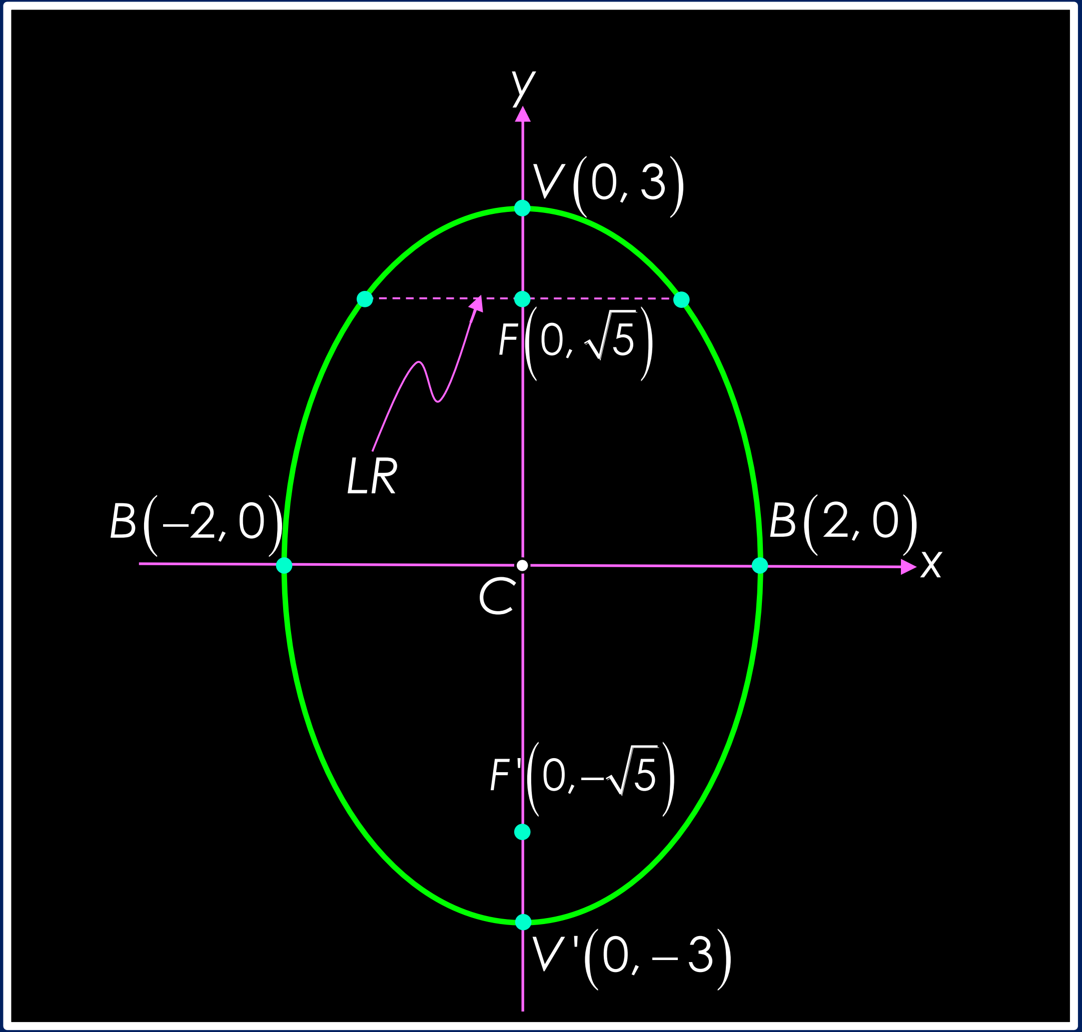
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad ; \quad a^2=9 \;\Rightarrow\; a=3 \qquad y \qquad b^2=4 \;\Rightarrow\; b=2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \;\Rightarrow\; c=\sqrt{9-4} \;\Rightarrow\; c=\sqrt{5}$$

$$e=\frac{c}{a} \;\Rightarrow\; e=\frac{\sqrt{5}}{3} \;\therefore\; \boxed{e\approx 0.745} \quad ; \quad LR=\frac{2b^2}{a} \;\Rightarrow\; LR=\frac{8}{3} \;\therefore\; \boxed{LR\approx 2.67}$$

LAS CÓNICAS

$$V(0,3) \quad ; \quad V'(0,-3) \quad ; \quad F\left(0,\sqrt{5}\right) \quad ; \quad F'\left(0,-\sqrt{5}\right)$$

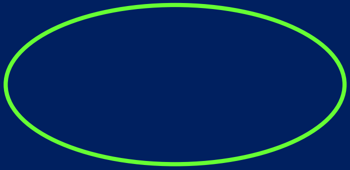


Ejemplo. Dada la siguiente ecuación general de una elipse, dar las coordenadas del centro, vértices, focos, y las longitudes de sus ejes mayor, menor, de cada lado recto y la excentricidad

$$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$$

$$x^2-6x+9-9+4\left(y^2+4y+4-4\right)+21=0 \;\Rightarrow\; (x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\therefore\;\boxed{\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1}$$

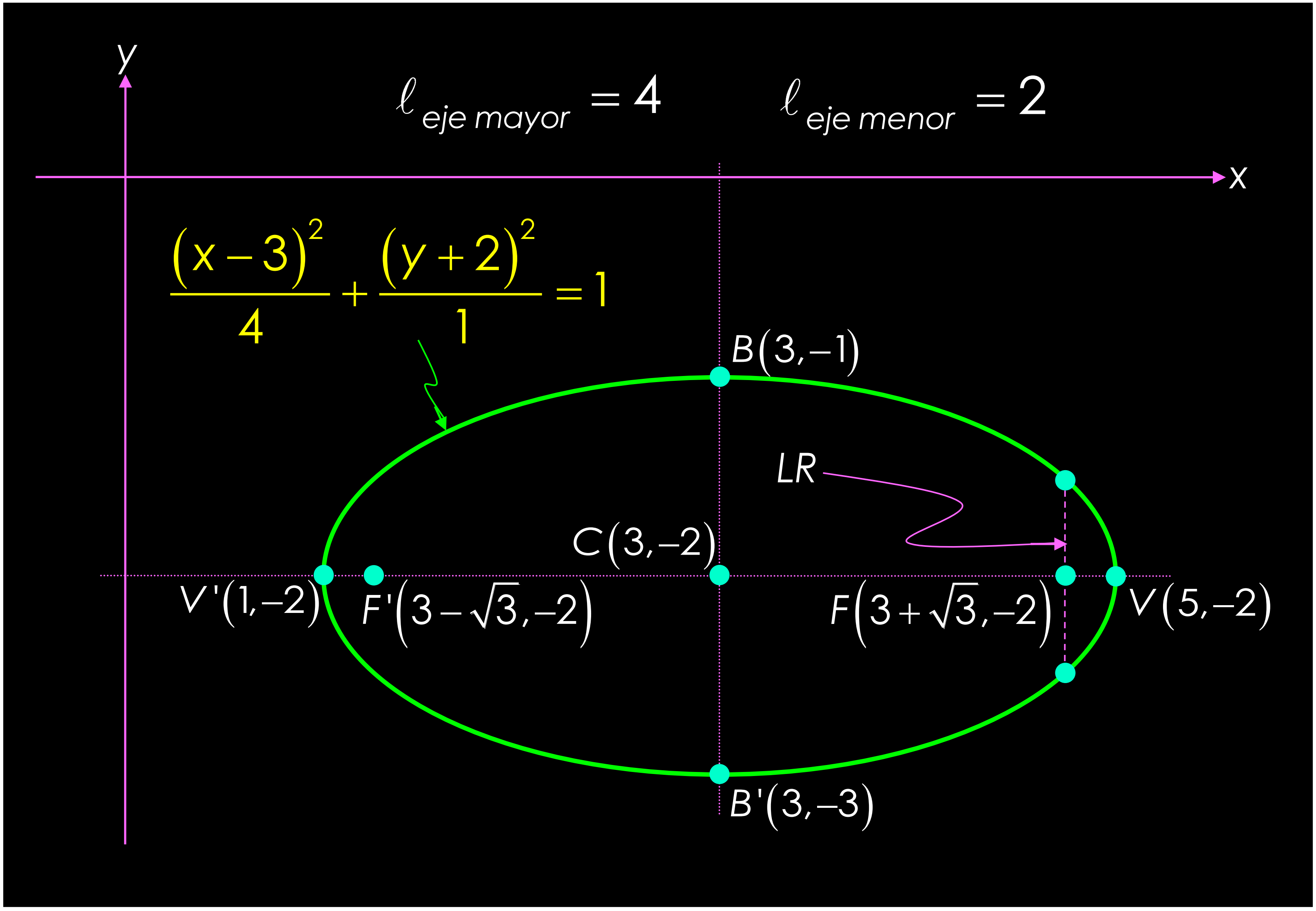


$$a^2=4 \;\Rightarrow\; a=2\;;\; b^2=1 \Rightarrow\; b=1\;;\; c=\sqrt{4-1} \;\Rightarrow\; c=\sqrt{3}$$

$$\boxed{C(3,-2)\;;\;V(5,-2)\;;\;V'(1,-2)\;;\;F\left(3+\sqrt{3},-2\right)\;;\;F'\left(3-\sqrt{3},-2\right)}$$

$$e=\frac{c}{a} \;\Rightarrow\; \boxed{e=\frac{\sqrt{3}}{2}}\;\therefore\; e=0.745\;;\; LR=\frac{2b^2}{a} \;\Rightarrow\; LR=\frac{2}{2}\;\therefore\;\boxed{LR=1}$$

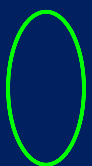
LAS CÓNICAS



y
x
$\ell_{eje\ mayor} = 4$
$\ell_{eje\ menor} = 2$
$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$
$B(3,-1)$
LR
$C(3,-2)$
$V'(1,-2)$
$F'\left(3-\sqrt{3},-2\right)$
$F\left(3+\sqrt{3},-2\right)$
$V(5,-2)$
$B'(3,-3)$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***El centro de una elipse es el punto $C(-2,-2)$, su semieje menor es 3, su excentricidad es $\frac{4}{5}$ y su eje focal es paralelo al eje de las ordenadas. Determinar su ecuación ordinaria y general, así como las coordenadas de sus vértices y focos. Graficar***



$$b=3 \;\Rightarrow\; c^2=a^2-9 \;\cdots\; (1) \quad ; \quad e=\frac{c}{a} \;\Rightarrow\; \frac{c}{a}=\frac{4}{5} \;\cdots\; (2)$$

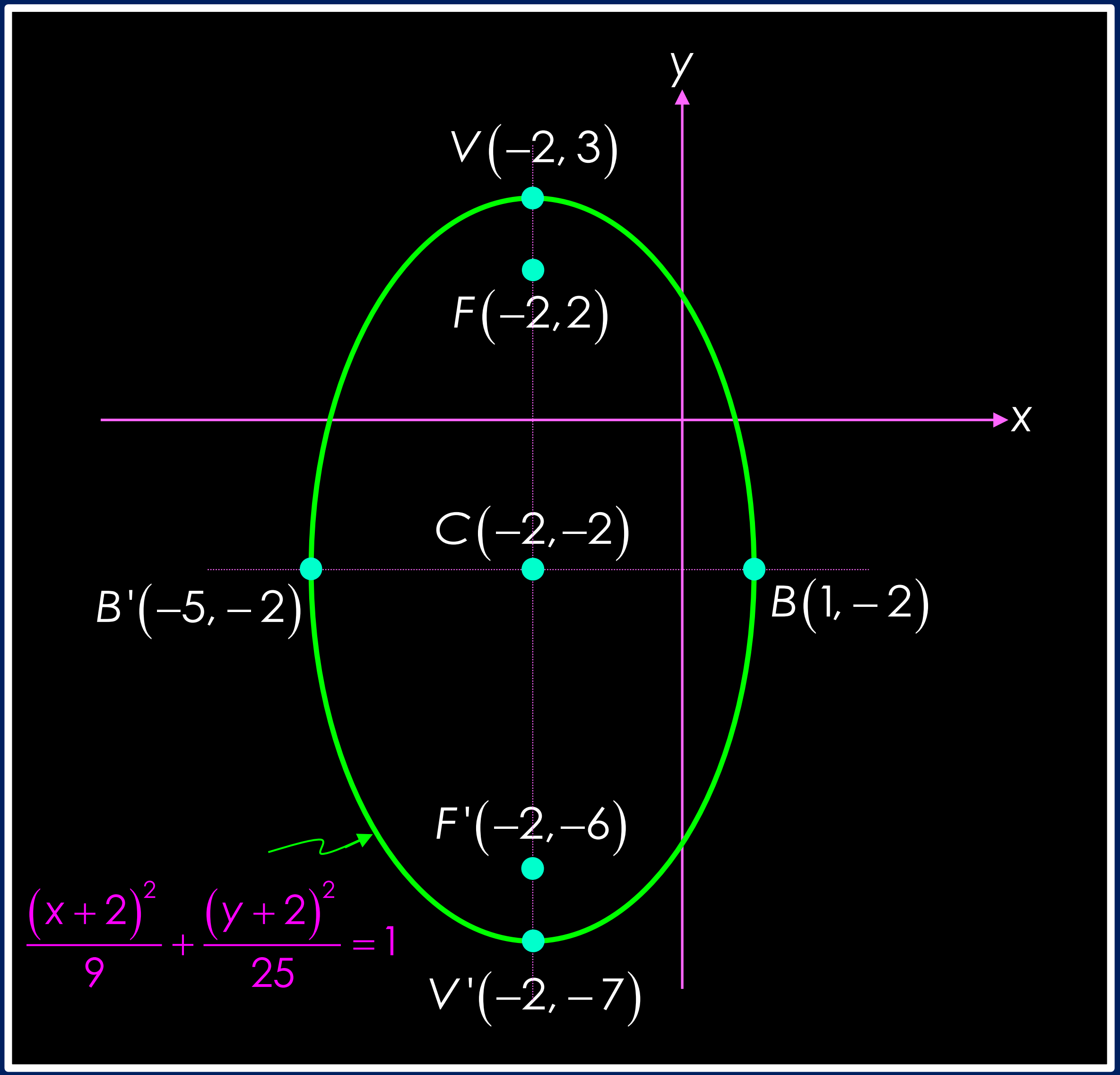
$$c=\frac{4}{5}a \quad ; \quad \frac{16}{25}a^2=a^2-9 \;\Rightarrow\; a^2=25 \;\Rightarrow\; a=5 \;\therefore\; c=4$$

$$\boxed{V(-2,3) \quad ; \quad V'(-2,-7) \quad ; \quad F(-2,2) \quad ; \quad F'(-2,-6)}$$

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1}$$

$$25(x+2)^2+9(y+2)^2=225 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{225x^2+9y^2+100x+36y-89=0}$$

LAS CÓNICAS

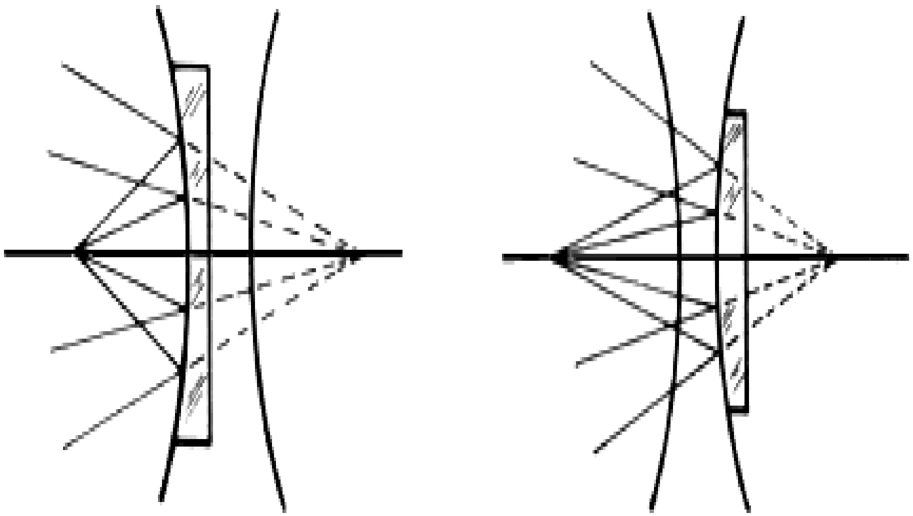


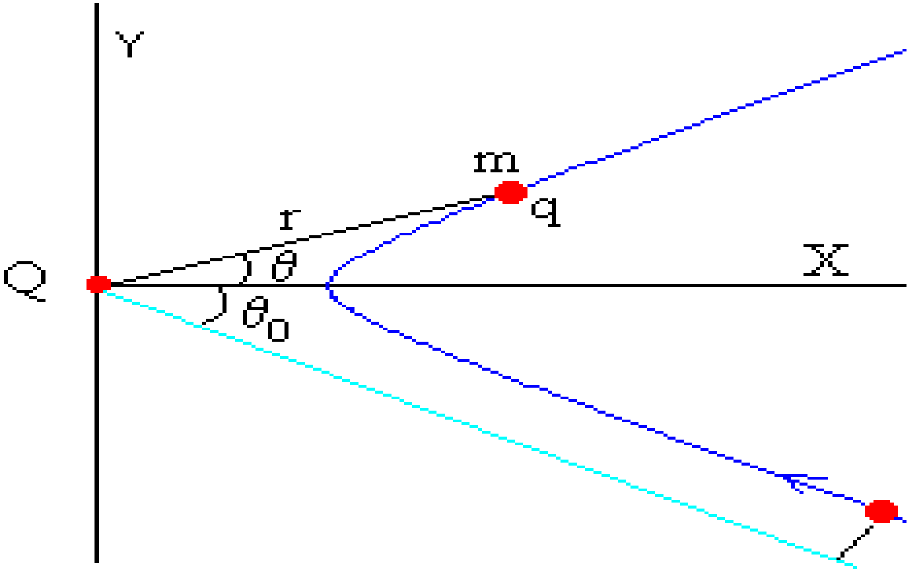
LAS CÓNICAS

LA HIPÉRBOLA

*El término Hipérbole proviene del griego "hyperbole" que está formada por el sufijo "**hyper**", sobre, por encima de y de "**bole**", lanzamiento, arrojar, lanzar, por lo que el significado sería "tirar encima“*

LAS CÓNICAS



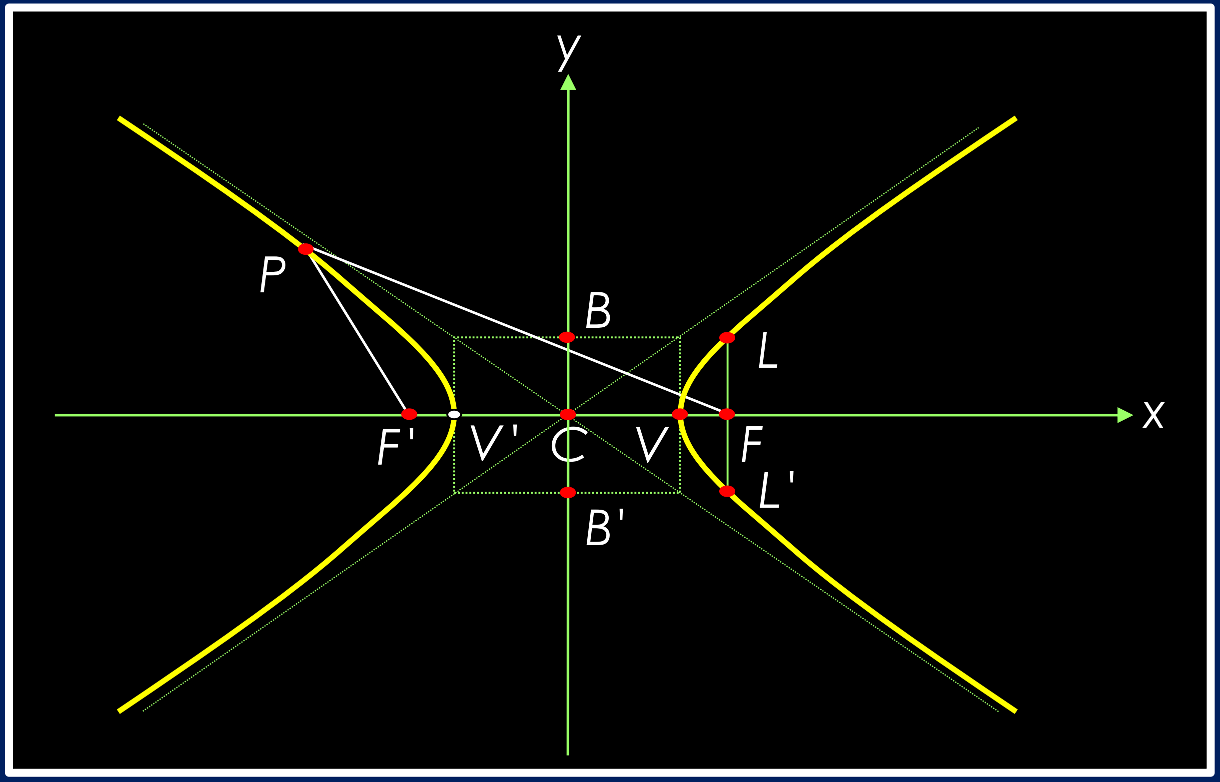


En los espejos hiperbólicos, la luz que llega de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, lo que se usa en los grandes estadios para aumentar la superficie iluminada

La hipérbola se utiliza para describir la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico producido por el núcleo de un átomo

LAS CÓNICAS

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, se mantiene constante, evidentemente positiva, y menor que la distancia entre los dos puntos fijos (focos)



LAS CÓNICAS

$$\left\| \overline{FP} \right| - \left| \overline{F'P} \right\| = 2a \quad ; \quad \left| \overline{FP} \right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad y \quad \left| \overline{F'P} \right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

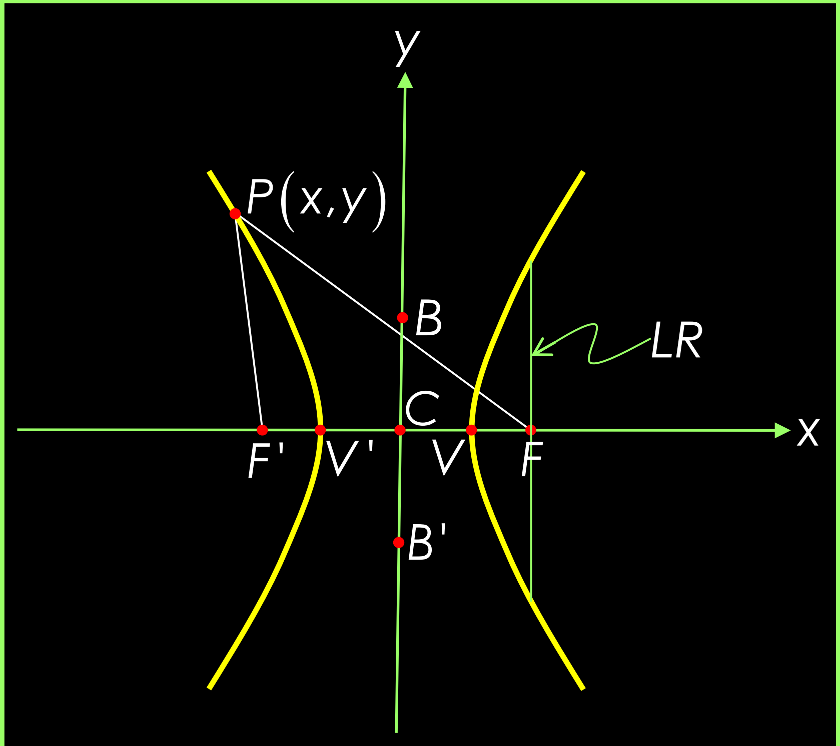
$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

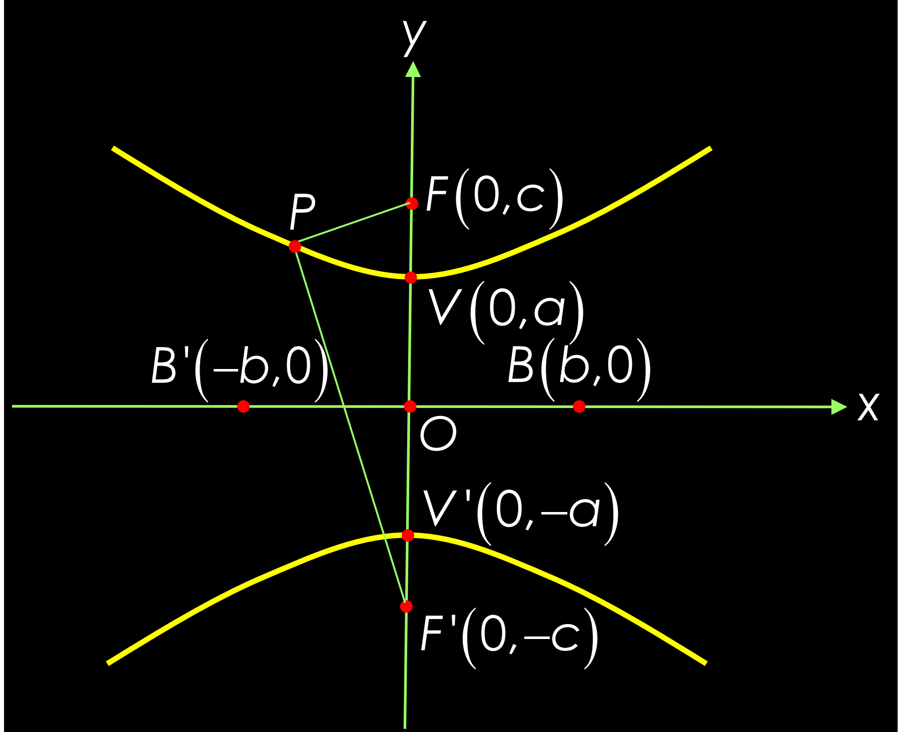
$$\boxed{LR = \frac{2b^2}{a}} \quad ; \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} = \text{constante}$$



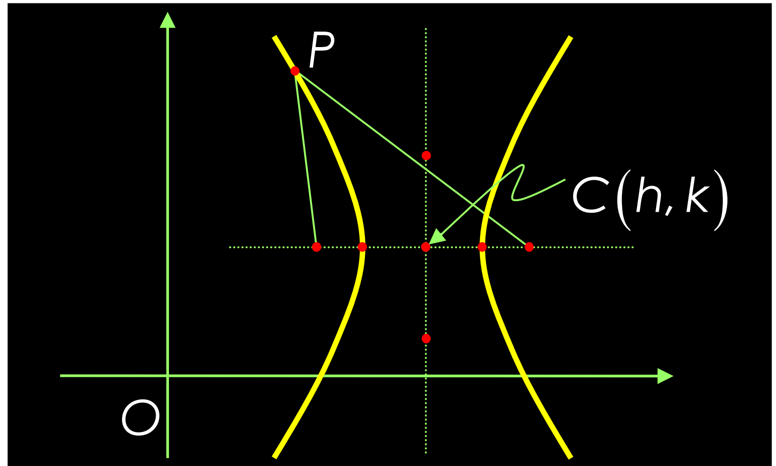
$F(c,0)\,;F'(-c,0) \qquad B(0,b)\,;B'(0,-b)$

$V(a,0)\,;V'(-a,0)$

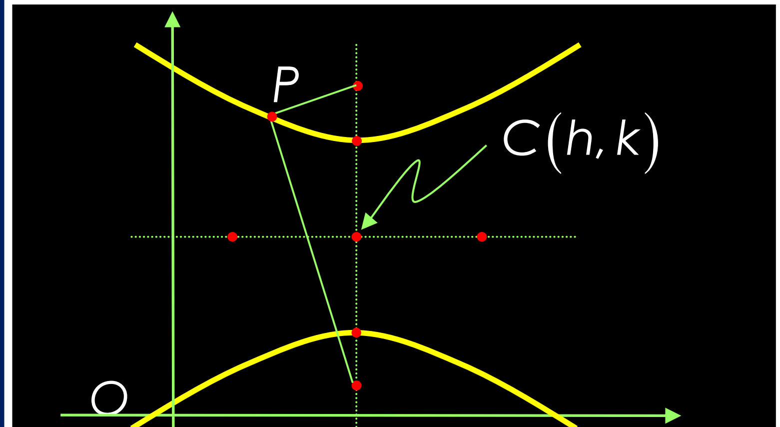
LAS CÓNICAS



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



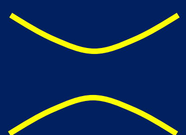
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. En una hipérbola, sus vértices y sus focos se localizan, respectivamente, en los puntos cuyas coordenadas son

$$V(0,3), \quad V'(0,-3), \quad F(0,5) \quad y \quad F'(0,-5)$$

Determinar: la ecuación de la cónica, las longitudes de sus ejes conjugado y transverso, su excentricidad y la longitud de cada lado recto



Vértices y focos están en el eje $"y" \quad ; \quad \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

Longitud de eje transverso: $\boxed{2a=6}$

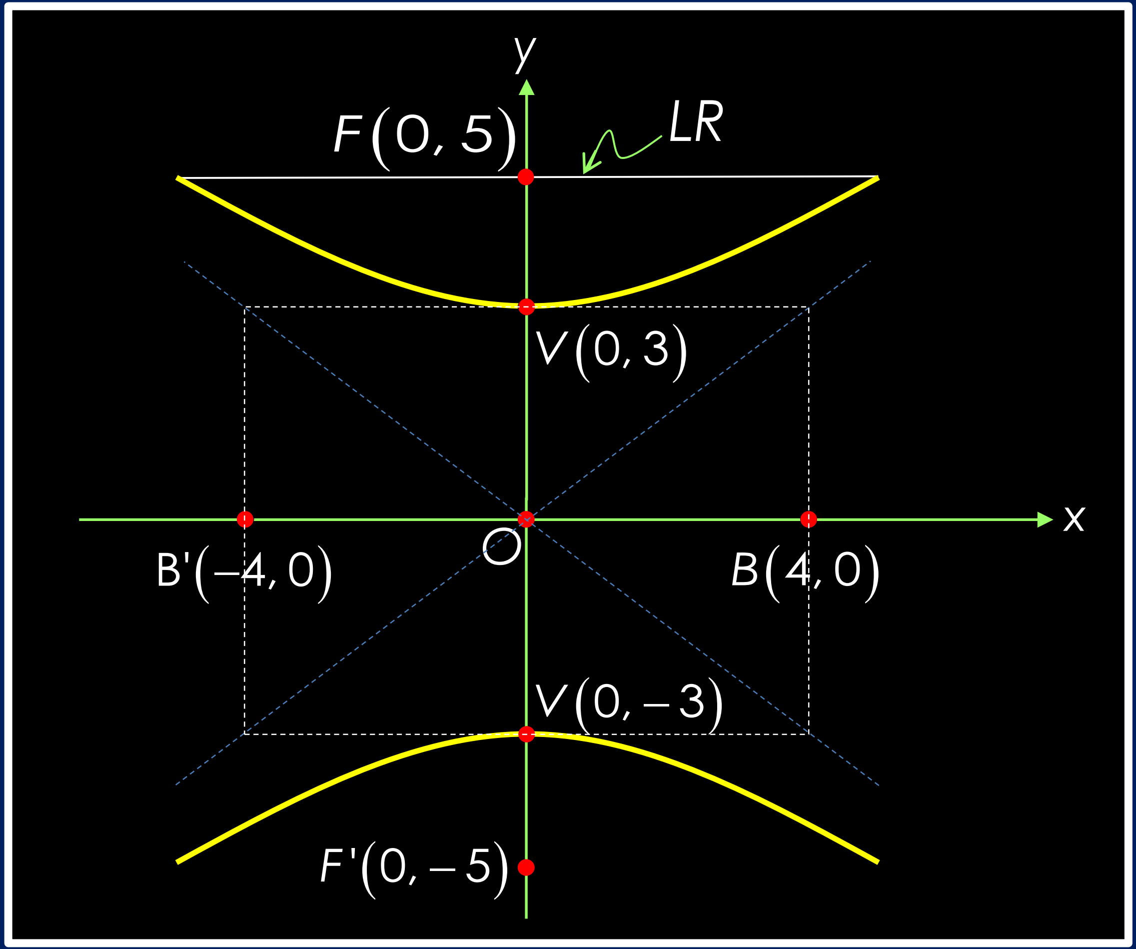
$$c=5 \quad ; \quad b^2=c^2-a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=5^2-3^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=16 \quad \therefore \quad b=4$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1}$$

Longitud de eje conjugado: $\boxed{2b=8}$

LAS CÓNICAS

$$\therefore\ \boxed{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1}\ ;\ e=\frac{c}{a}\ \Rightarrow\ \boxed{e=\frac{5}{3}}\ ;\ LR=\frac{2b^2}{a}\ \Rightarrow\ \boxed{LR=\frac{32}{3}}$$



Ejemplo. Dada la hipérbola cuya ecuación general es

$$4x^2 - 25y^2 - 24x + 100y - 164 = 0$$

Obtener su ecuación en su forma simétrica, determinar las coordenadas de su centro, vértices y focos, la longitud de sus ejes transverso, conjugado y del lado recto, calcular su excentricidad y dar las ecuaciones de sus asíntotas y el ángulo agudo de intersección entre ellas. Graficar

$$4\left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) - 25\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) - 164 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(x-3\right)^2 - 25\left(y-2\right)^2 = 100 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\left(x-3\right)^2}{25} - \frac{\left(y-2\right)^2}{4} = 1}$$

$$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad \therefore \quad \text{eje transverso} = 2a = 10$$

$$b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \therefore \quad \text{eje conjugado} = 2b = 4$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{5^2 + 2^2} \quad \therefore \quad c = \sqrt{29}$$

LAS CÓNICAS

$$\boxed{C(3,2)\ ;\ V(8,2)\ ;\ V'(-2,2)\ ;\ F\left(3+\sqrt{29},2\right)\ ;\ F'\left(3-\sqrt{29},2\right)}$$

$$LR=\frac{2b^2}{a}\quad\Rightarrow\quad LR=\frac{2(2)^2}{5}\quad\Rightarrow\quad LR=\frac{8}{5}\quad\therefore\quad\boxed{LR=1.6}$$

$$e=\frac{c}{a}\quad\Rightarrow\quad e=\frac{\sqrt{29}}{5}\quad\Rightarrow\quad e=\frac{5.39}{5}\quad\therefore\quad\boxed{e\approx 1.078}$$

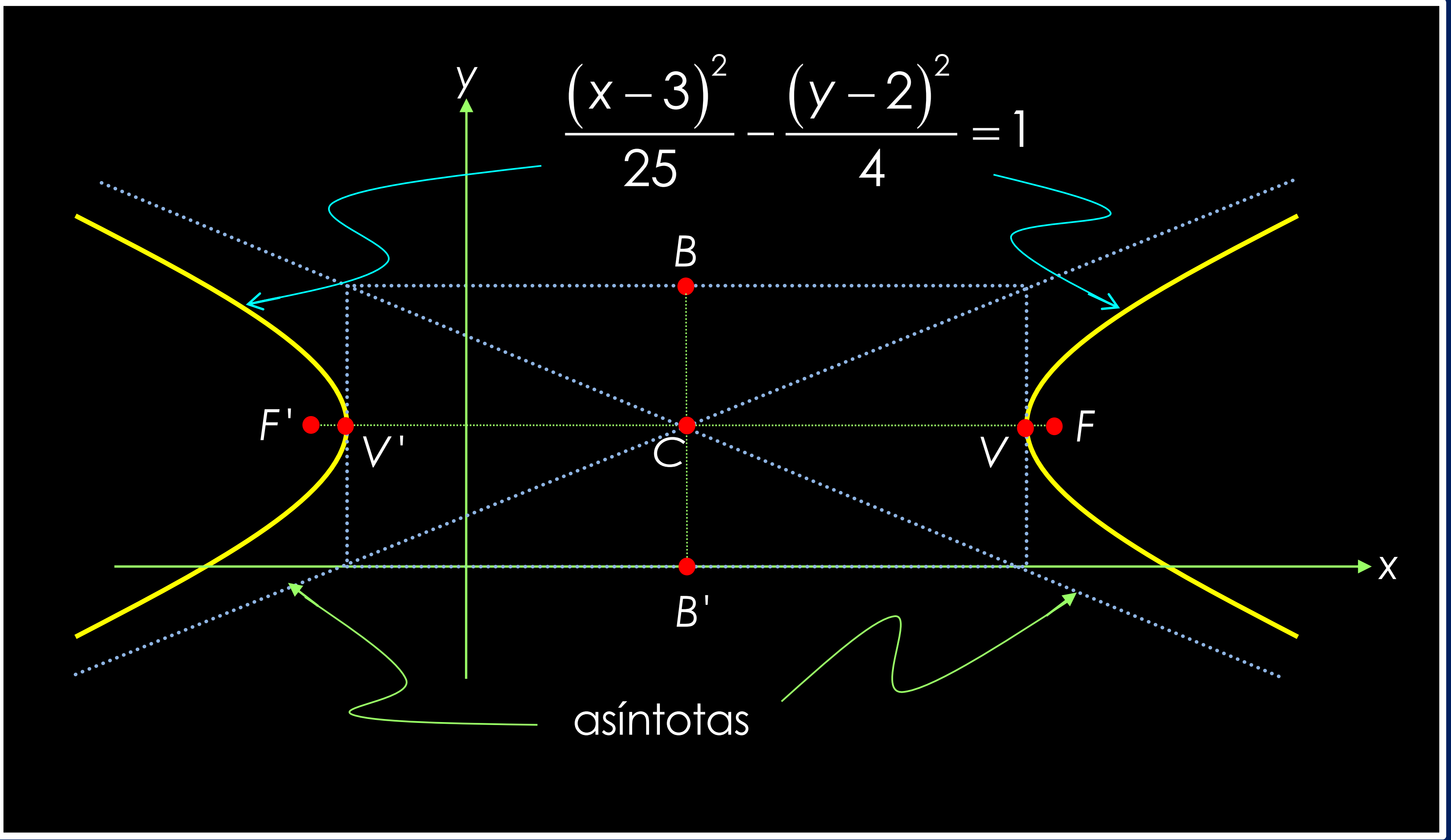
$$y-k=\frac{b}{a}(x-h)\quad\Rightarrow\quad y-2=\frac{2}{5}(x-3)\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=\frac{2x+4}{5}}$$

$$y-k=-\frac{b}{a}(x-h)\quad\Rightarrow\quad y-2=-\frac{2}{5}(x-3)\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=\frac{-2x+16}{5}}$$

$$m_1=-\frac{2}{5}\quad;\quad m_2=\frac{2}{5}\quad;\quad \theta=\text{ang}\tan\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

$$\theta=\text{ang}\tan\frac{20}{21}\quad\therefore\quad\boxed{\theta\approx 43.6^0}$$

LAS CÓNICAS

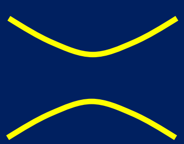


LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Determinar las ecuaciones simétrica y general de la hipérbola cuyo eje transverso es igual a "4" si sus focos están situados en $F(3,0)$; $F'(3,6)$. Obtener las coordenadas de su centro y vértices, las longitudes de su eje conjugado, de su lado recto, su excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas. Graficar***

$$\text{Eje transverso} = 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad ; \quad 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad b = \sqrt{3^2 - 2^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5} \quad ; \quad C(3,3)$$



$$\boxed{\text{Eje conjugado} = 2b = 2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1}$$

$$5(y-3)^2 - 4(x-3)^2 = 20$$

LAS CÓNICAS

$$\Rightarrow \quad 5y^2-30y+45-4x^2+24x-36-20=0$$

$$\therefore \quad \boxed{4x^2-5y^2-24x+30y+11=0}$$

$$\boxed{C(3,3) \quad ; \quad V(3,5) \quad ; \quad V'(3,1)}$$

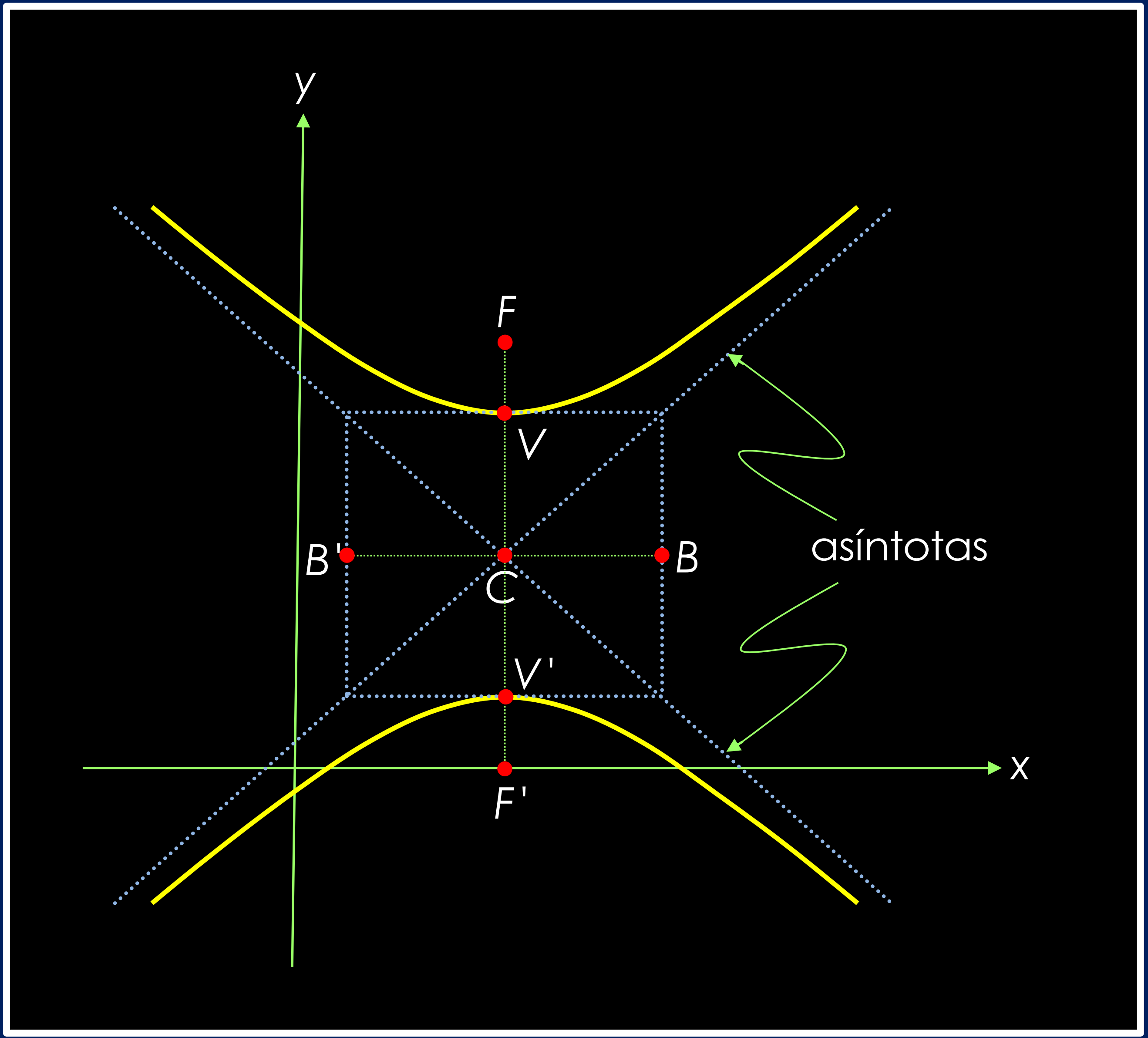
$$LR=\frac{2b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad LR=\frac{2\left(\sqrt{5}\right)^2}{2} \quad \therefore \quad \boxed{LR=5}$$

$$e=\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{3}{2} \quad \therefore \quad \boxed{e=1.5}$$

$$y-k=\frac{a}{b}(x-h) \quad \Rightarrow \quad y-3=\frac{2}{\sqrt{5}}(x-3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x-\frac{6\sqrt{5}}{5}+3}$$

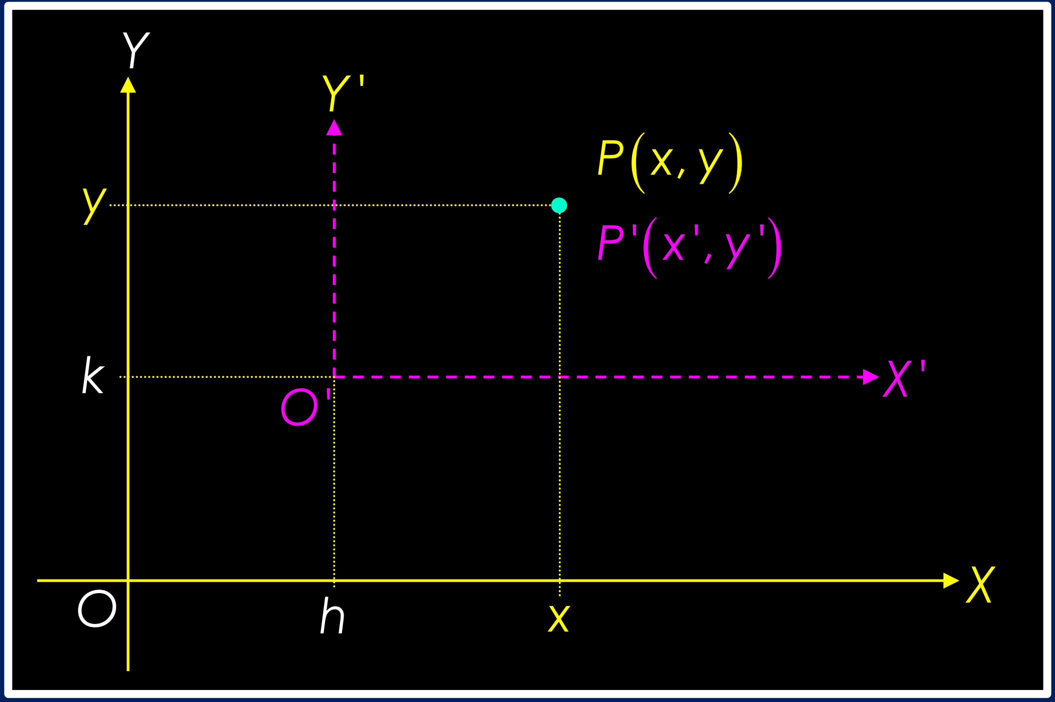
$$y-k=-\frac{a}{b}(x-h) \quad \Rightarrow \quad y-3=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x-3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{6\sqrt{5}}{5}+3}$$

LAS CÓNICAS



TRASLACIÓN DE LOS EJES COORDENADOS

Es el cambio de posición de los ejes coordenados en el plano coordenado, a otro lugar del mismo, donde los nuevos ejes son paralelos a los originales y con el mismo sentido que estos



$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Transformar la siguiente ecuación de una curva mediante la traslación de los ejes coordenados al punto*** $(-4,-2)$***. Trazar la curva con ambos sistemas coordenados***

$$y^3 - x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 8 = 0$$

$$x = x' - 4 \qquad y \qquad y = y' - 2$$

$$(y'-2)^3 - (x'-4)^2 + 6(y'-2)^2 - 8(x'-4) + 12(y'-2) - 8 = 0$$

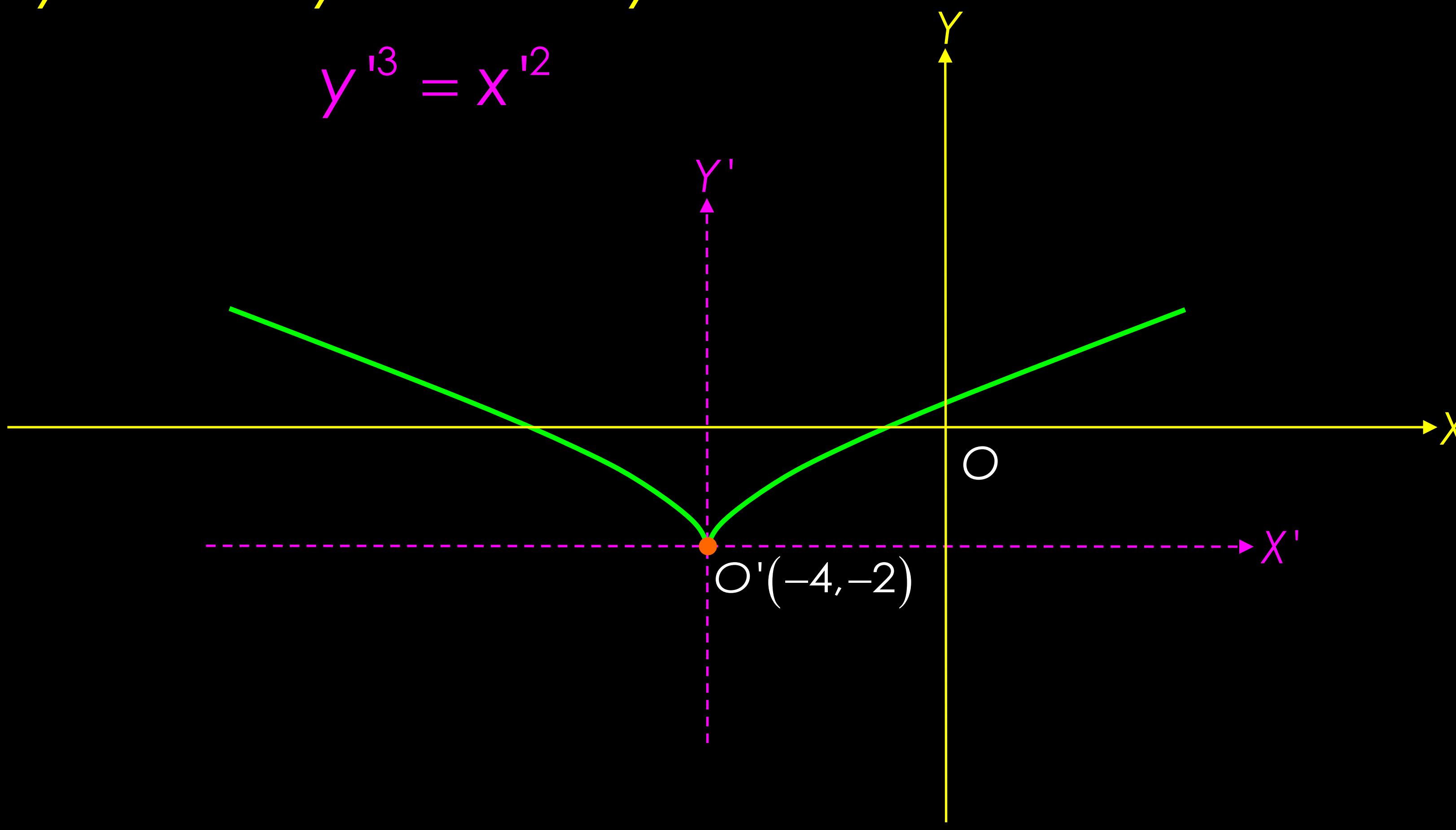
$$y'^3 - 6y'^2 + 12y' - 8 - x'^2 + 8x' - 16 + 6y'^2 +$$
$$-24y' + 24 - 8x' + 32 + 12y' - 24 - 8 = 0$$

$$y'^3 - x'^2 = 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{y'^3 = x'^2}$$

LAS CÓNICAS

$$y^3 - x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 8 = 0$$

$$y'^3 = x'^2$$



Ejemplo. ***Simplificar la siguiente ecuación mediante una traslación de los ejes coordenados y trazarla en ambos sistemas coordenados***

$$y^2+2y+x-2=0$$

$$\boxed{x=x'+h \qquad y \qquad y=y'+k}$$

$$(y'+k)^2+2(y'+k)+(x'+h)-2=0$$

$$y'^2+2y'k+k^2+2y'+2k+x'+h-2=0$$

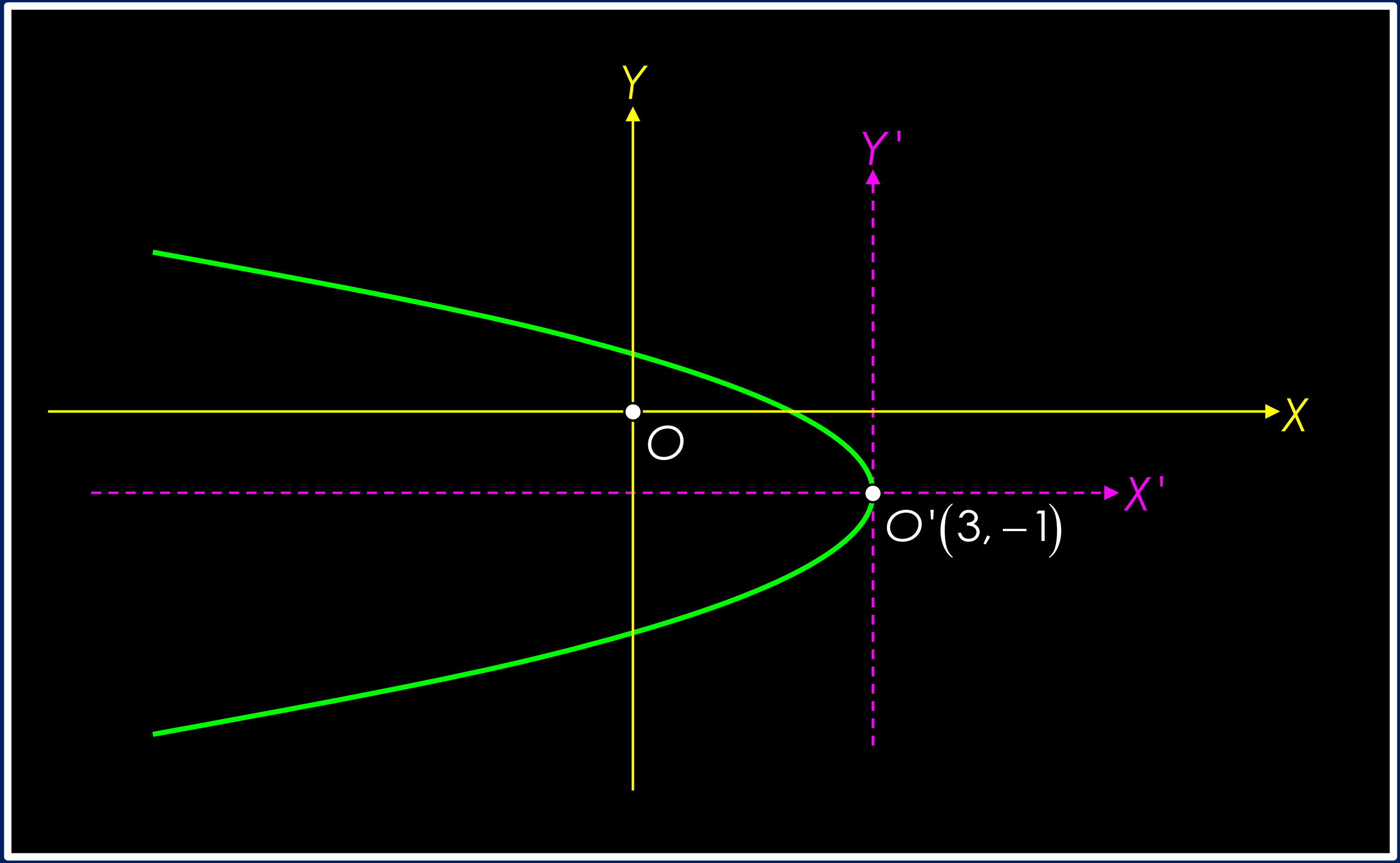
$$y'^2+(2k+2)y'+x'+k^2+2k+h-2=0$$

$$2k+2=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1 \quad ; \quad k^2+2k+h-2=0 \quad \Rightarrow \quad h=3$$

$$\therefore \quad y'^2+x'=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'^2=-x'}$$

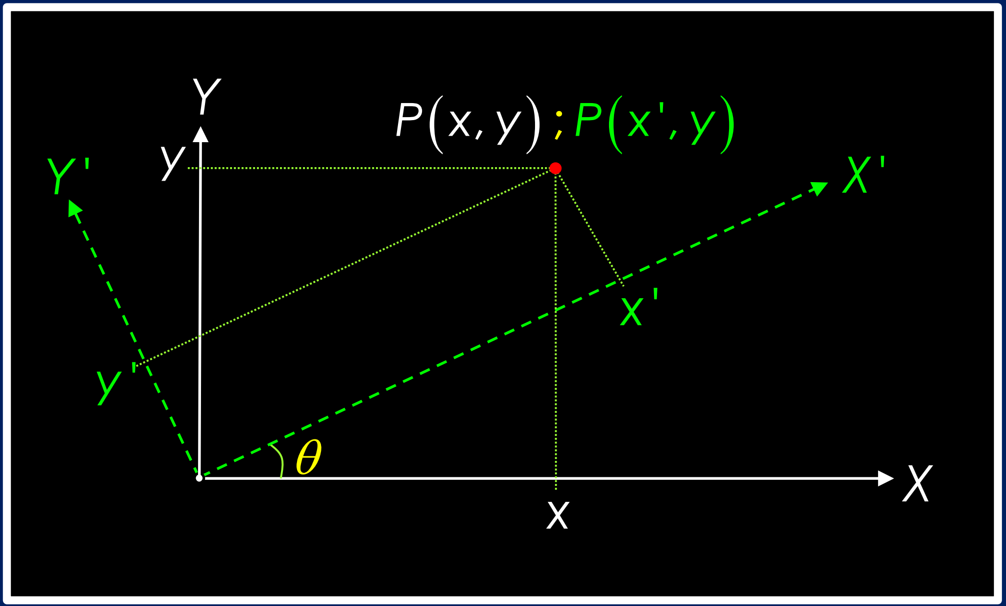
LAS CÓNICAS

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad \therefore \quad (y+1)^2 = -(x-3)$$



ROTACIÓN DE LOS EJES COORDENADOS

Es el cambio de posición de los ejes en el plano coordenado, a partir de un giro en sentido antihorario, conservando el mismo origen de coordenadas y los ejes con el mismo sentido

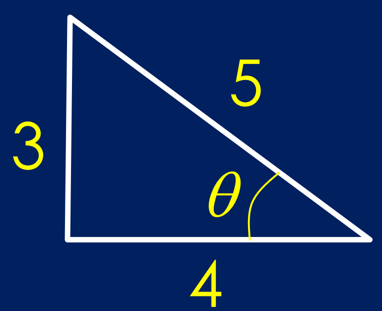


$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Transformar la ecuación*** $5x^2+5y^2-8x-6y-40=0$ ***al rotar los ejes coordenados un ángulo*** "θ" ***tal que*** $\theta = ang\tan\dfrac{3}{4}$ ***. Trazar la gráfica de la curva con los dos sistemas de ejes coordenados***



$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'sen\theta \\ y &= x'sen\theta + y'\cos\theta \end{aligned}}$$

$$; \quad x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'$$

$$; \quad y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$$

$$5\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)^2+5\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)^2-8\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)-6\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)-40=0$$

$$5\left(\frac{16}{25}x'^2-\frac{24}{25}x'y'+\frac{9}{25}y'^2\right)+5\left(\frac{9}{25}x'^2+\frac{24}{25}x'y'+\frac{16}{25}y'^2\right)-\frac{32}{5}x'+\frac{24}{5}y'-\frac{18}{5}x'-\frac{24}{5}y'-40=0$$

LAS CÓNICAS

$$\frac{80}{25}x'^2+\frac{45}{25}y'^2+\frac{45}{25}x'^2+\frac{80}{25}y'^2-\frac{50}{5}x'-40=0 \quad \Rightarrow \quad 5x'^2+5y'^2-10x'-40=0$$

$$\therefore \quad \boxed{x'^2+y'^2-2x'-8=0}$$

Otra forma: $5x^2+5y^2-8x-6y-40=0$

$$\Rightarrow \quad 5\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}-\frac{16}{25}\right)+5\left(y^2-\frac{6}{5}y+\frac{9}{25}-\frac{9}{25}\right)-40=0$$

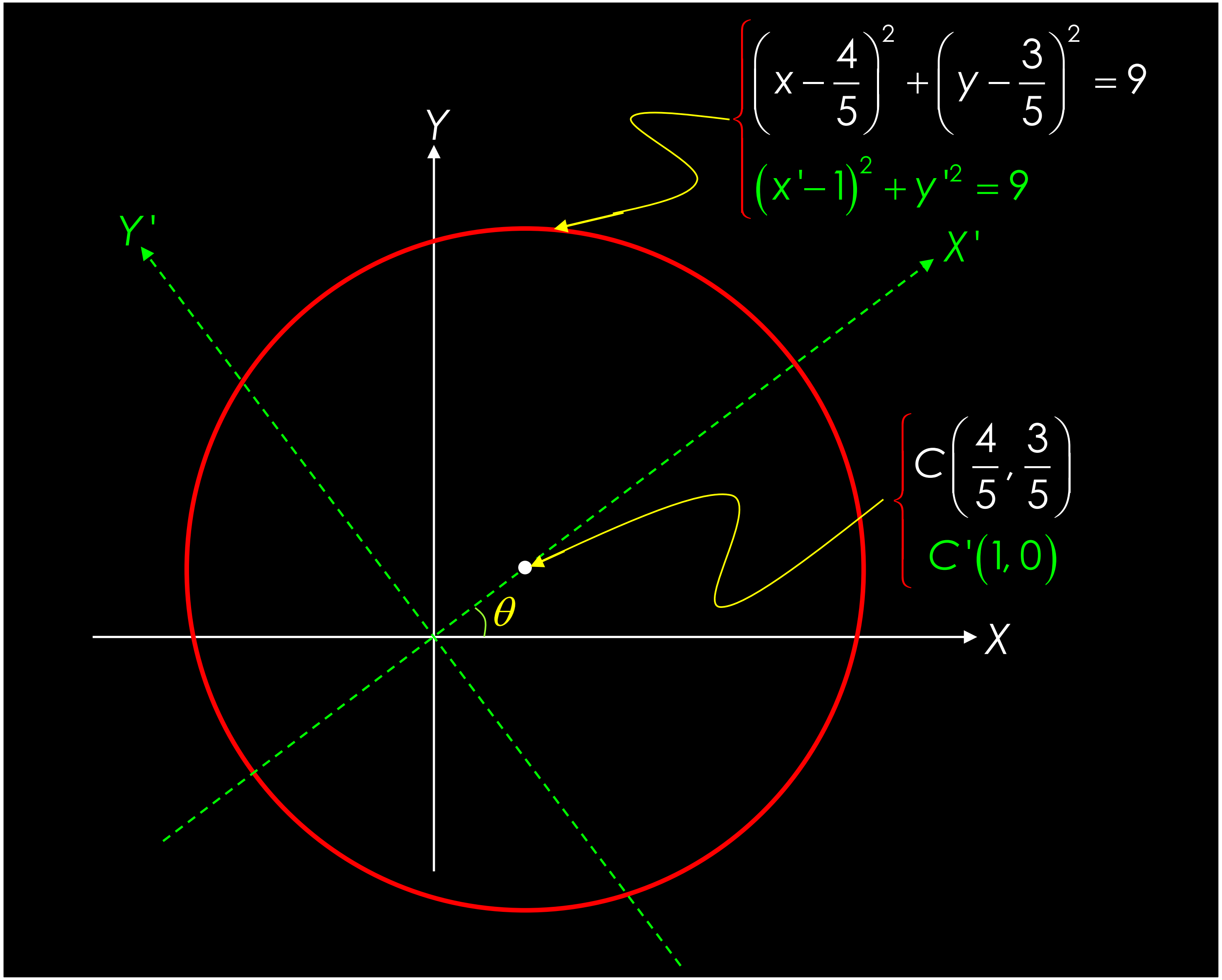
$$\therefore \quad \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=9$$

Circunferencia: $\boxed{C\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) \quad ; \quad r=3}$

Con las ecuaciones de rotación:

$$\therefore \quad x'^2+y'^2-2x'-8=0 \quad \therefore \quad \boxed{(x'-1)^2+y'^2=9}$$

LAS CÓNICAS



$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=9$
$(x'-1)^2+y'^2=9$
Y
Y'
X'
X
θ
$C\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$
$C'(1,0)$

LAS CÓNICAS

Ejemplo. ***Dada la siguiente ecuación, mediante una rotación convertirla en otra que no tenga término en*** "xy"***, dar el ángulo de giro y graficar la curva utilizando los conocimientos sobre cónicas***

$$9x^2+3xy+9y^2-5=0$$

$$\boxed{x=x'\cos\theta-y'sen\theta \quad y \quad y=x'sen\theta+y'\cos\theta}$$

$$9(x'\cos\theta-y'sen\theta)^2+3(x'\cos\theta-y'sen\theta)(x'sen\theta+y'\cos\theta)+9(x'sen\theta+y'\cos\theta)^2-5=0$$

$$(9\cos^2\theta+3sen\theta\cos\theta+9sen^2\theta)x'^2+(3\cos^2\theta-3sen^2\theta)x'y'+(9sen^2\theta-3sen\theta\cos\theta+9\cos^2\theta)y'^2-5=0$$

$$3\cos^2\theta-3sen^2\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \tan^2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=1 \quad\therefore\quad \boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

LAS CÓNICAS

$$\left(9\cos^2\frac{\pi}{4}+3sen\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+9sen^2\frac{\pi}{4}\right)x'^2+\left(3\cos^2\frac{\pi}{4}-3sen^2\frac{\pi}{4}\right)x'y'+$$

$$+\left(9sen^2\frac{\pi}{4}-3sen\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+9\cos^2\frac{\pi}{4}\right)y'^2-5=0$$

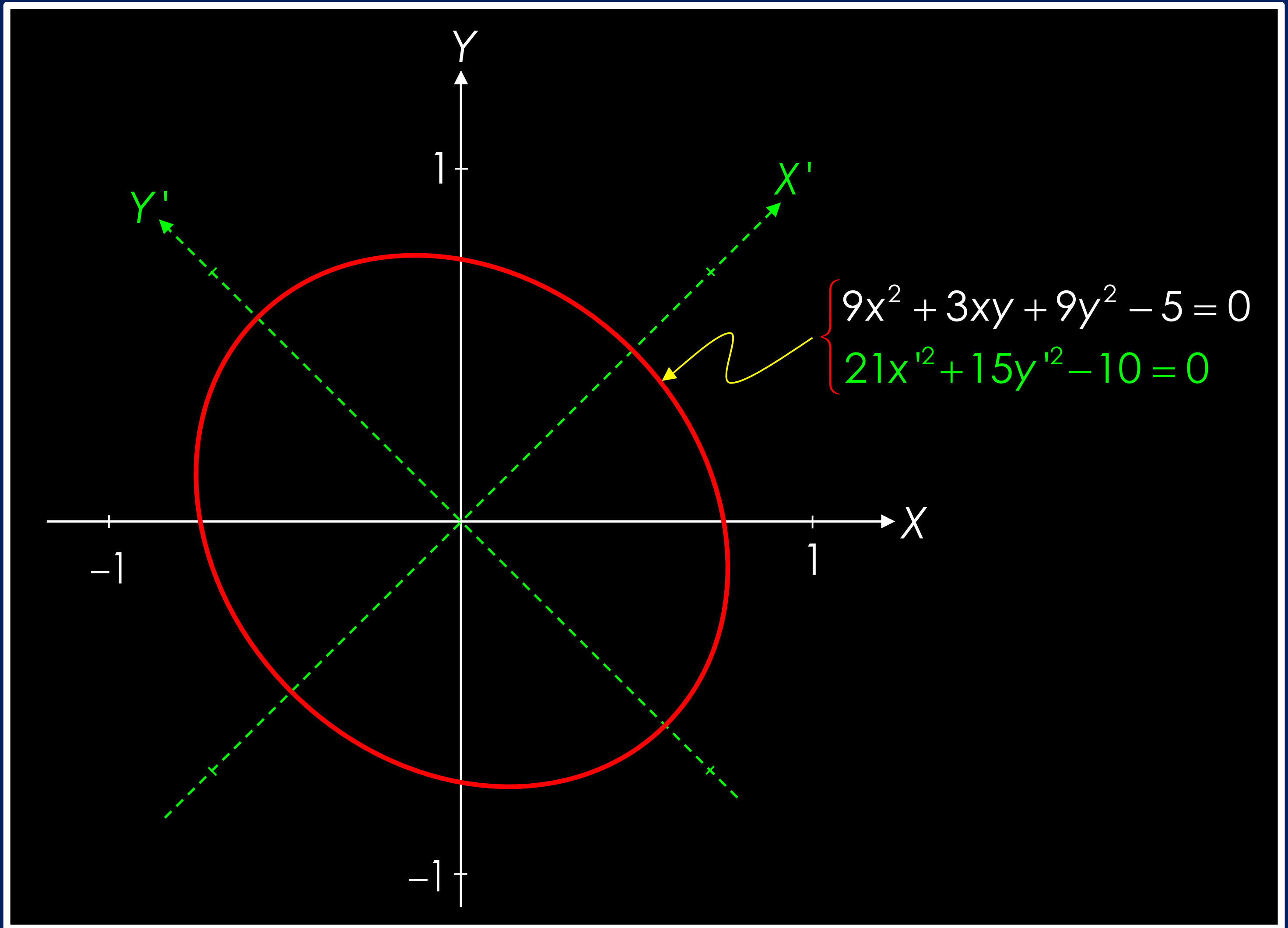
$$\left[9\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)\right]x'^2+\left[9\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)\right]y'^2-5=0$$

$$\frac{21}{2}x'^2+\frac{15}{2}y'^2-5=0 \quad \therefore \quad 21x'^2+15y'^2-10=0$$

$$\frac{x'^2}{\frac{10}{21}}+\frac{y'^2}{\frac{10}{15}}=1 \quad \therefore \quad \frac{x'^2}{0.476}+\frac{y'^2}{0.667}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{(0.69)^2}+\frac{y'^2}{(0.817)^2}=1$$

LAS CÓNICAS

Elipse: $$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1 \quad ; \quad \begin{cases} b=0.69 \\ a=0.817 \end{cases}$$



Trascendencia de las cónicas en el estudio del Cálculo

¡Importante ! **LAS CÓNICAS** ¡Importante !

***Ejemplo**. Dada la siguiente función, identificar a la curva que la representa y graficarla. Dar dominio y recorrido*

$$y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$$

$$y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \quad \Rightarrow \quad y^2=\frac{9}{16}\left(x^2-16\right)$$

$$16y^2=9x^2-144 \quad \Rightarrow \quad 9x^2-16y^2=144$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$$

Hipérbola: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \quad ; \quad C(0,0)$

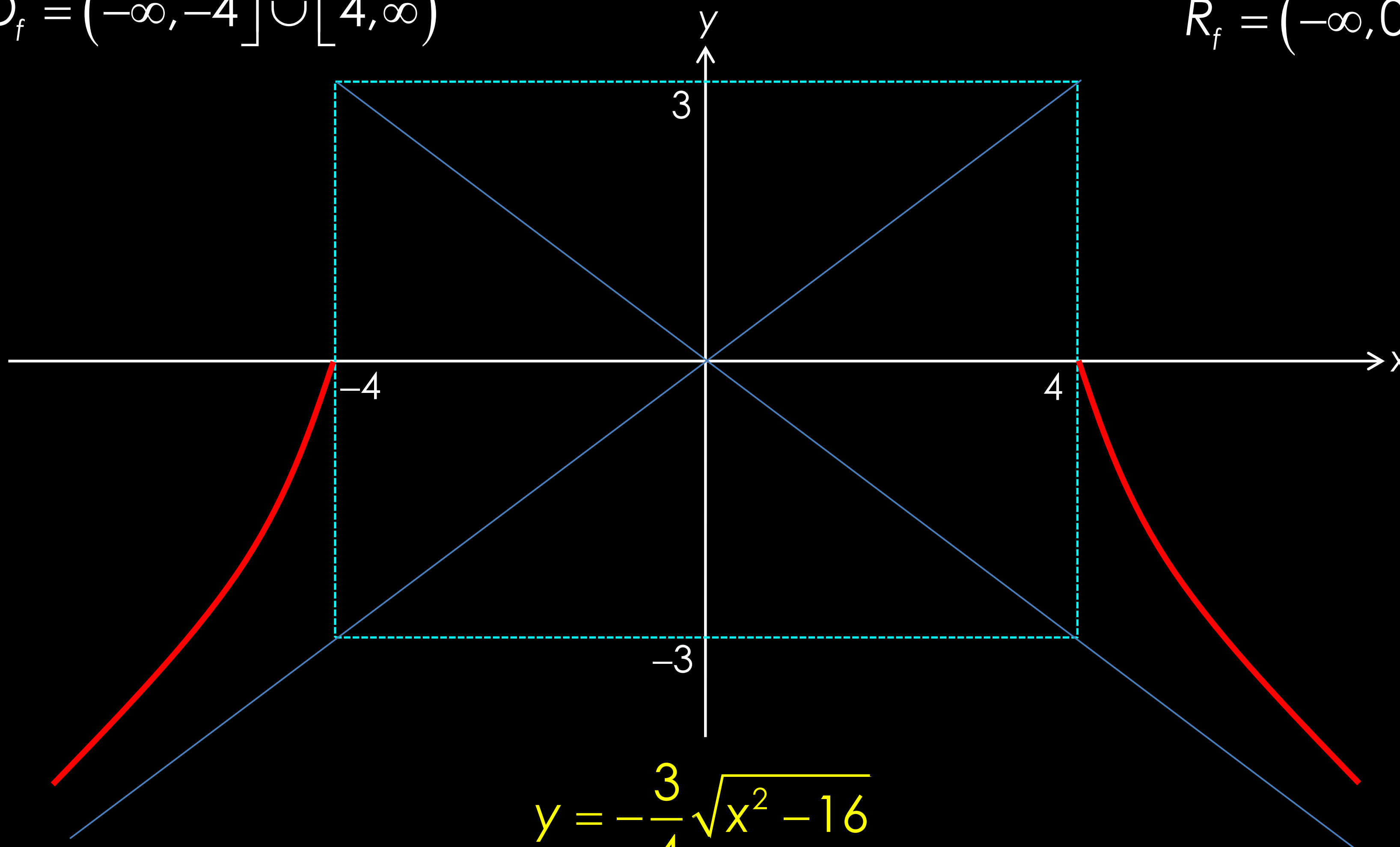
¡Importante !

LAS CÓNICAS

¡Importante !

$$D_f = \left(-\infty, -4\right] \cup \left[4, \infty\right)$$

$$R_f = \left(-\infty, 0\right]$$



$$y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$$

¡Importante ! **LAS CÓNICAS** **¡Importante !**

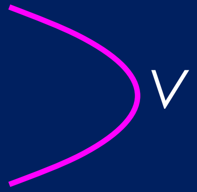
Ejemplo. ***Dada la siguiente función, identificar a la curva que la representa y graficarla. Dar dominio y recorrido***

$$y = 2\sqrt{4-x}$$

$$y = 2\sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4(4-x)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = -4\left[-(4-x)\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{y^2 = -4(x-4)}$$

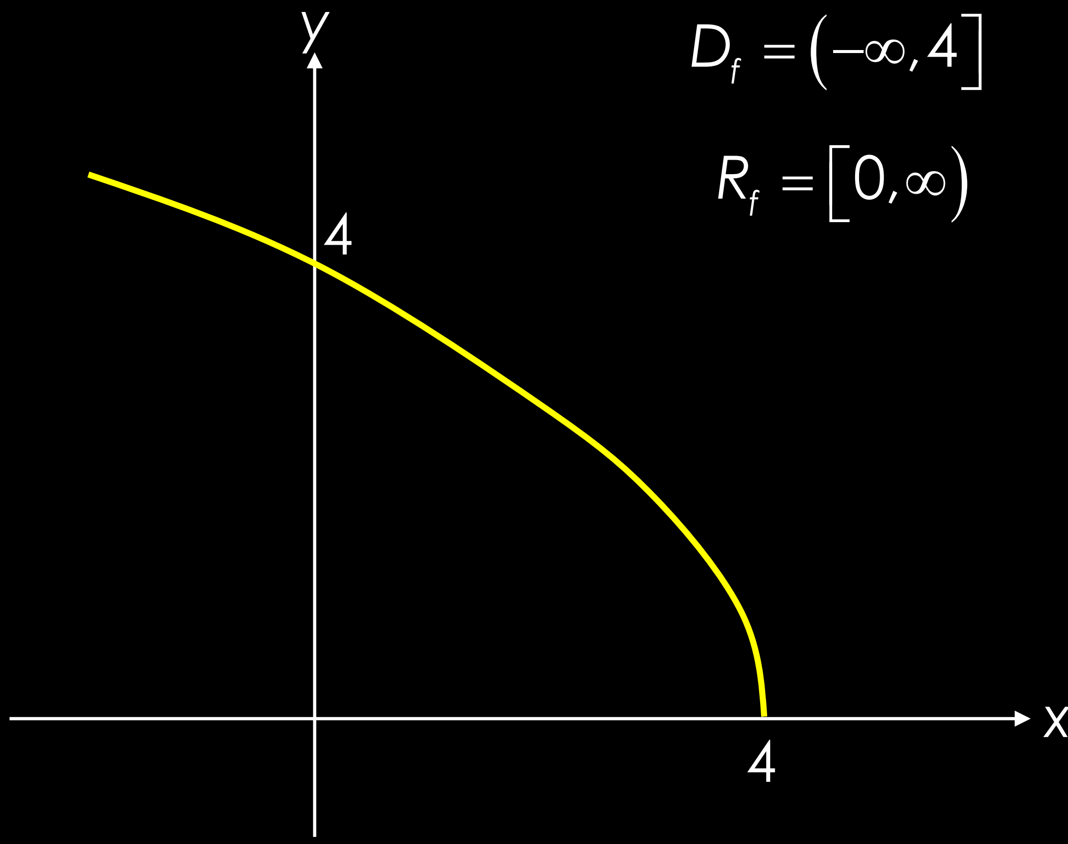


Parábola: $y^2 = -4p(x-h) \quad ; \quad \begin{cases} h = 4 \\ k = 0 \end{cases} \quad ; \quad V(4,0)$

¡Importante !

LAS CÓNICAS

¡Importante !



$$D_f = (-\infty, 4]$$

$$R_f = [0, \infty)$$

$$y = 2\sqrt{4-x}$$

¡Importante ! LAS CÓNICAS ¡Importante !

Ejemplo. ***Dada la siguiente función, identificar a la curva que la representa y graficarla.*** **Dar dominio y recorrido**

$$y=-2+\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$y=-2+\sqrt{5-4x-x^2} \quad \Rightarrow \quad (y+2)^2=5-4x-x^2$$

$$\Rightarrow \quad (y+2)^2=5-\left(x^2+4x+4-4\right) \quad \Rightarrow \quad (y+2)^2=9-(x+2)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{(x+2)^2+(y+2)^2=9}$$

Circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad ; \quad \begin{cases} h=-2 \\ k=-2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} r=3 \\ C(-2,-2) \end{cases}$

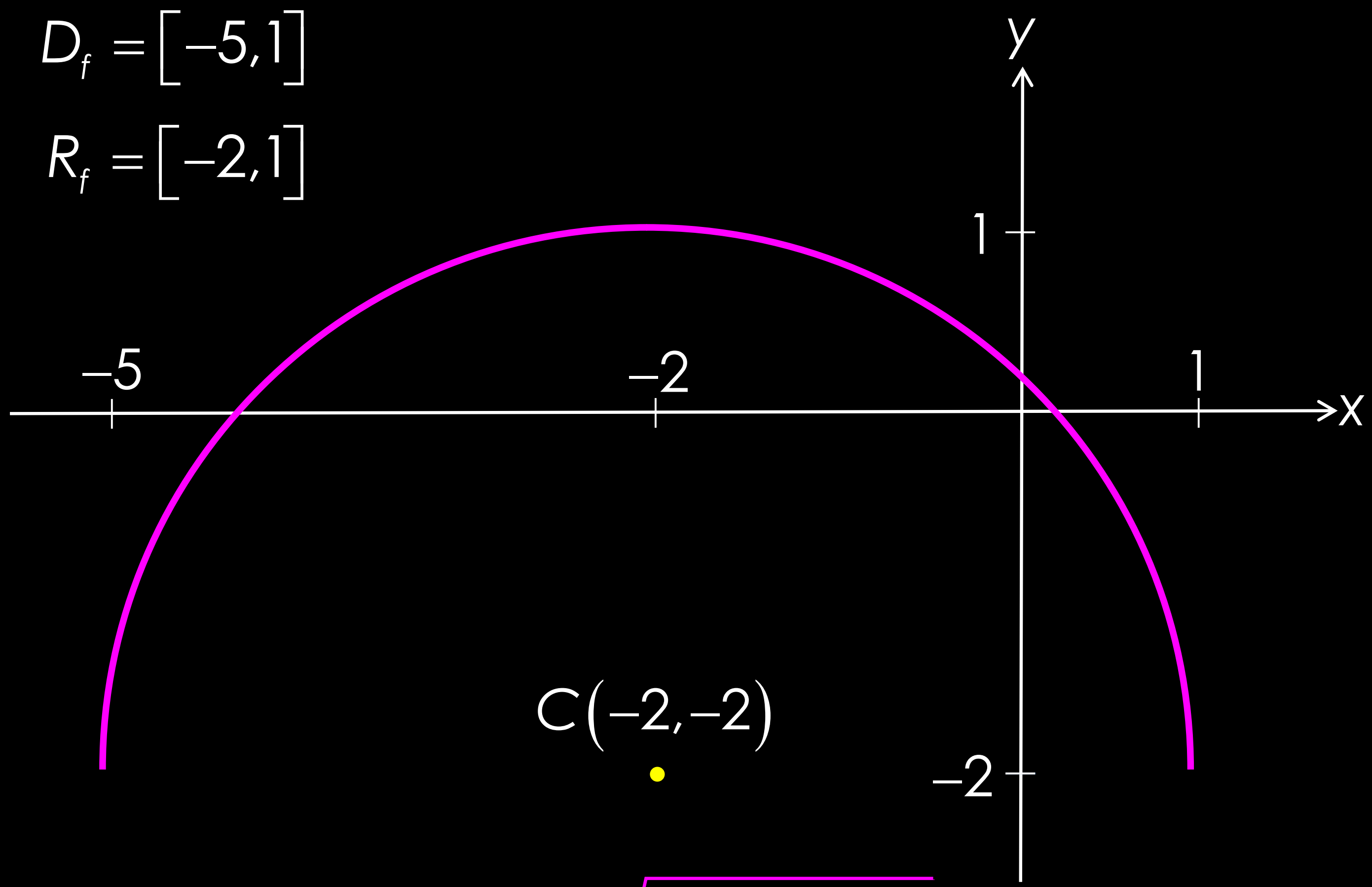
¡Importante !

LAS CÓNICAS

¡Importante !

$$D_f = [-5, 1]$$

$$R_f = [-2, 1]$$



$$y = -2 + \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

¡Importante ! **LAS CÓNICAS** **¡Importante !**

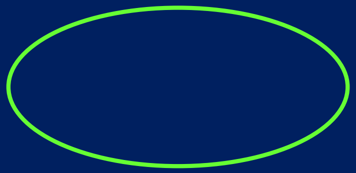
Ejemplo. Dada la siguiente función, identificar a la curva que la representa y graficarla. Dar dominio y recorrido

$$y = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6x - x^2}$$

$$y = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6x - x^2} \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = \frac{4}{9}\left(6x - x^2\right)$$

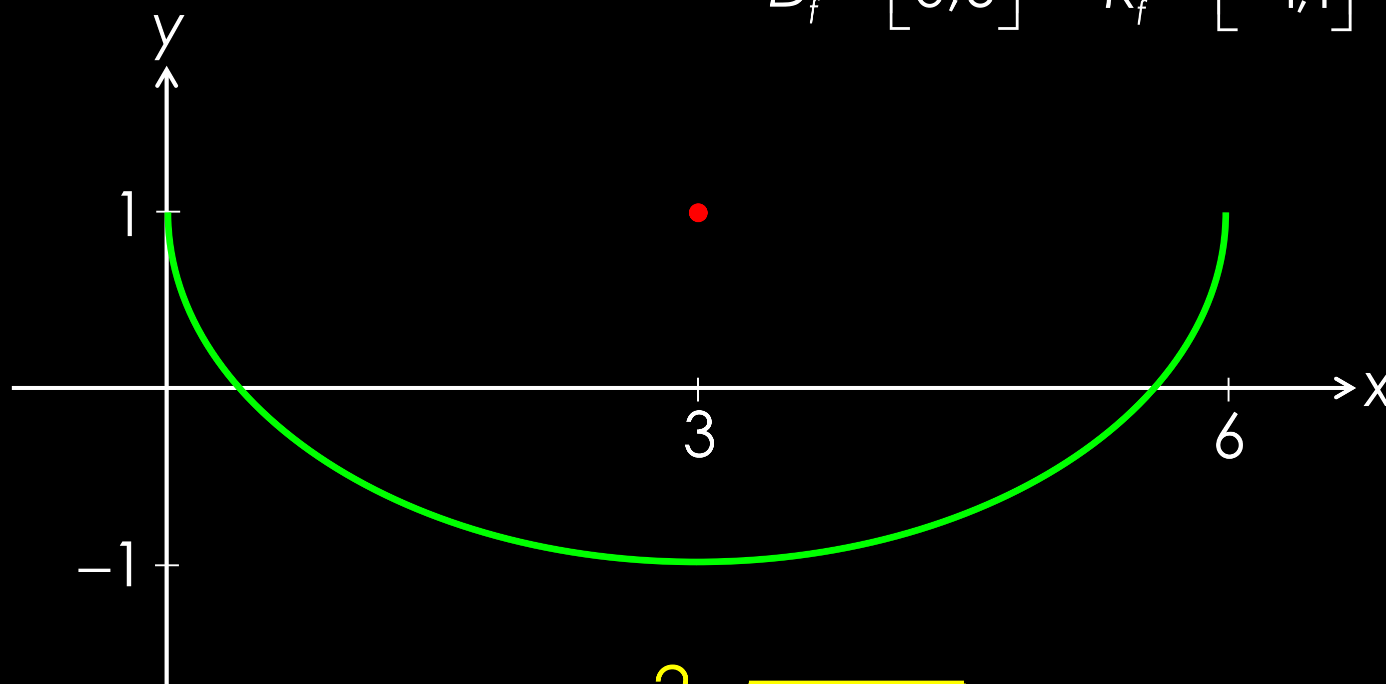
$$(y-1)^2 = -\frac{4}{9}\left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{4} = \frac{9-(x-3)^2}{9}$$

$$\therefore \boxed{\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1}$$



Elipse: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad C\begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases}$

$$D_f = [0,6] \qquad R_f = [-1,1]$$



$$y = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6x - x^2}$$

Estudien, aprendan, practiquen, sean solidarios con sus compañeros, sean generosos con su prójimo, sean sencillos, adquieran conocimientos y sabiduría, sean buenos, sean felices

LAS CÓNICAS

¡Hay UNAM, qué emoción vivirte!

Muchas gracias

Pablo García y Colomé
Profesor de Carrera FI. UNAM