LA RECTA

Definición

Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomados dos puntos cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta, el valor de la pendiente m, es siempre constante.

La pendiente de la recta se denota por m y se calcula mediante:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Definición

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje coordenado X en su dirección positiva, y se mide a partir del eje X en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

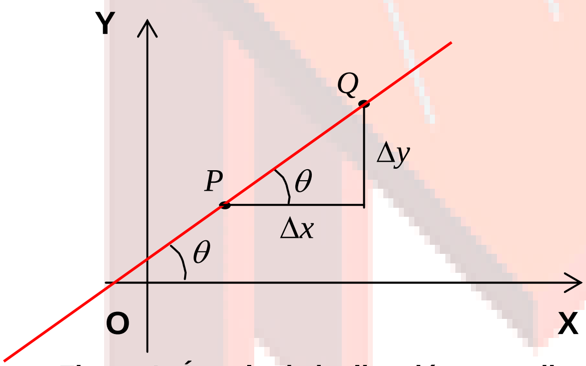


Figura 1. Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

De la figura:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Por lo que:

$$\boxed{m = \tan\theta}$$

entonces, la pendiente de una recta es tangente de su ángulo de inclinación.

Ecuaciones de la recta

1. **Ecuación punto-pendiente**

La ecuación de la recta que contiene al punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es m, es:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo.

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(-2,3)$ y cuyo ángulo de inclinación es $60°$.

Resolución:

$$m = \tan 60° = \sqrt{3}$$

por lo que la ecuación de la recta es:

$$y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$$

Ejemplo.

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(-4,8)$ y que es paralela al eje de las abscisas.

Resolución:

La recta es paralela al eje de las abscisas, por lo que el ángulo de inclinación es igual a 0°. Entonces:

$$m = \tan 0° = 0$$

Por lo que:

$$y-8=0(x+4)$$

Esto es:

$$y=8$$

Ejemplo.

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(1,3)$ y que es paralela al eje de las ordenadas.

Resolución:

La recta es paralela al eje de las ordenadas, por lo que el ángulo de inclinación es igual a 90°. Entonces:

$$m=\tan 90° \to \infty$$

Ya que la recta es paralela al eje Y, todos sus puntos tienen la misma abscisa (x = 1). Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$x=1$$

2. Ecuación Pendiente-Ordenada al origen

La ecuación de la recta cuya pendiente es m y que corta al eje de las ordenadas en el punto $P(0,b)$, donde b es la ordenada al origen es:

$$\boxed{y=mx+b}$$

En el caso de que la recta sea paralela al eje Y, su ecuación es de la forma:

$$\boxed{x=k}$$

Donde k es constante.

Ejemplo.

Determinar la ecuación de la recta que contiene al origen y cuyo ángulo de inclinación es igual a 135°.

Resolución:

$$m = \tan 135° = -1$$

La recta corta al eje Y en el origen, por lo que: $b = 0$

Entonces:

$$y = (-1)x + 0$$

Esto es:

$$y = -x$$

3. Ecuación de la recta que contiene a dos puntos conocidos

La ecuación de la recta que contiene a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ **y** $P_2(x_2, y_2)$ **es:**

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $P_1(3,0)$ **y** $P_2(1,-2)$**.**

Resolución:

$$y = \frac{-2-0}{1-3}\ (x-3) = x - 3$$

La ecuación es:

$$y = x - 3$$

4. Ecuación General de la recta

La ecuación general de la recta es:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

En donde $A \neq 0$ y/o $B \neq 0$. En el caso de que C sea igual a cero, la recta contiene al origen.

Obsérvese que esta es una ecuación de primer grado con dos variables.

Ejemplo:

La ecuación

$$2x - y + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 6$$

representa a una recta cuya pendiente es 2 y cuya ordenada al origen es 6, ya que:

$$2x - y + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 6$$

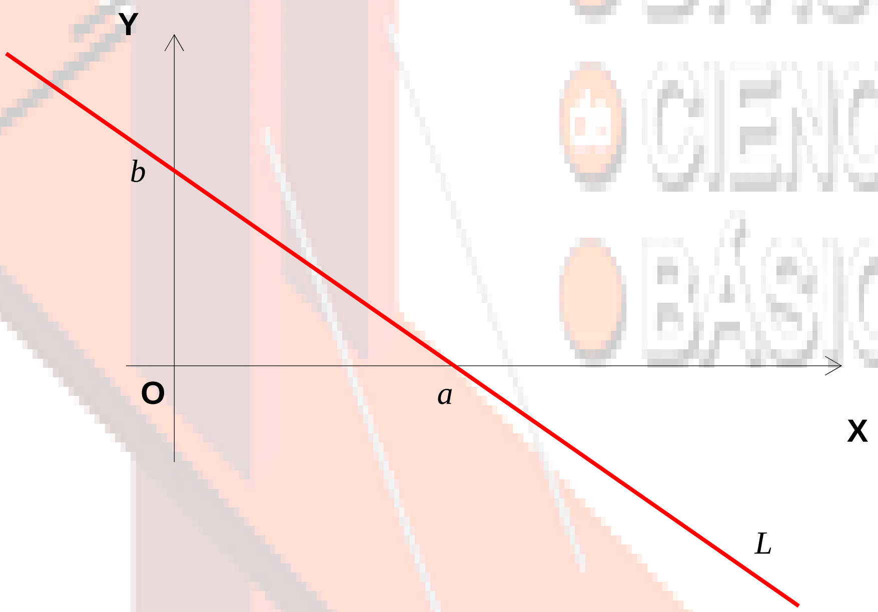
por lo que, al comparar con la ecuación: $y = mx + b$

se tiene que:

$$m = 2 \qquad \textbf{y} \qquad b = 6$$

5. Ecuación en forma simétrica

Esta ecuación resulta particularmente útil cuando se conocen las intersecciones de la recta con los ejes de coordenadas.

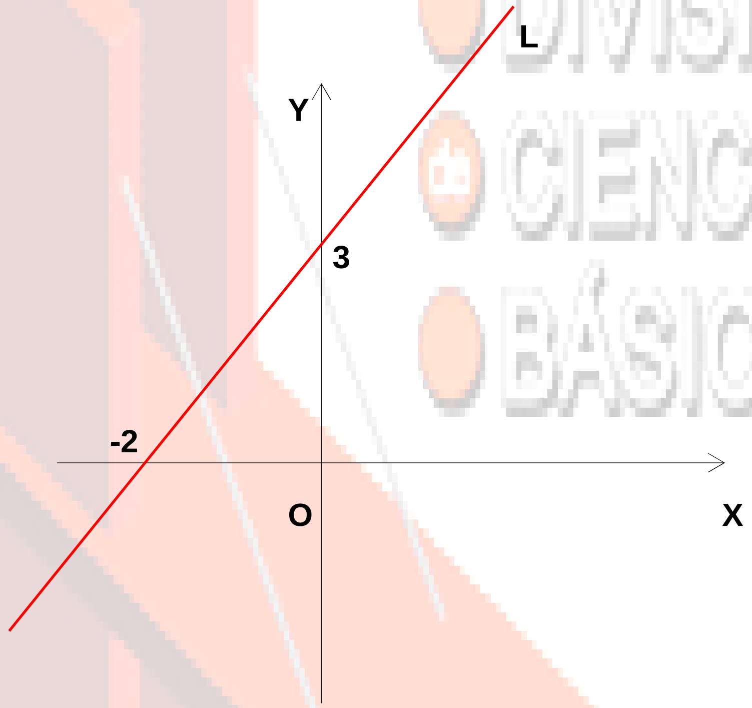


La ecuación en forma simétrica de la recta L **es:**

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la recta que se muestra en la figura:



Resolución:

La ecuación de la recta L es:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$$

de donde:

$$3x-2y=-6$$

esto es:

$$3x-2y+6=0$$