



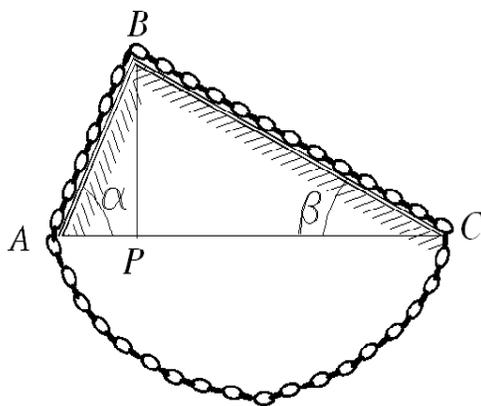
Hugo Germán Serrano Miranda

Profesor de tiempo completo de la Coordinación de Ciencias Aplicadas

La cadena de Stevin

Simon Stevin (1548-1620). Fue contemporáneo de Kepler y de Galileo; matemático, físico e ingeniero, hizo avanzar la Mecánica, especialmente la Estática de sólidos y de fluidos. Introdujo el triángulo de fuerzas (ley del paralelogramo) y distinguió entre los equilibrios estables e inestables. Estudió el plano inclinado y descubrió, antes que Galileo, que la velocidad de caída de los cuerpos es independiente de su peso.

Como ingeniero fue comisionado de obras públicas y constructor de esclusas defensivas.



La Cadena de Stevin

Figura 1

Introdujo un procedimiento aproximado para calcular raíces y a él se le debe la popularización del cálculo con fracciones decimales, aunque no la notación definitiva. Se interesó por ampliar los trabajos de Arquímedes sobre el equilibrio mecánico, y una de sus principales y controvertida contribución fue la solución del problema de equilibrio en un plano inclinado. Este problema, según información seria, no fue estudiado por Arquímedes, pero si fue tratado por Herón, aunque de manera errónea. Este famoso problema de equilibrio en un plano inclinado se le conoce como: *la Cadena de Stevin*.

Por razones obvias, el planteamiento, la solución e interpretaciones al problema de la Cadena de Stevin, desarrollados en este artículo, se apegan a métodos vectoriales y por lo tanto corresponden a una versión diferente al planteamiento original.

Planteamiento del problema:

Una cadena formada por un cierto número finito de eslabones se coloca en un soporte prismático, formado por dos planos lisos \overline{AB} y \overline{BC} , tal como se muestra en la figura 1. ¿Qué sucederá cuando haya más eslabones de la cadena en el lado más largo \overline{BC} del prisma, que en el más corto \overline{AB} ?

¡Una suposición plausible...planteada por Herón!

Se podría pensar que, a causa de la diferencia de pesos, la cadena comenzaría a moverse de la siguiente manera: el tramo \overline{AB} con dirección hacia arriba, el tramo \overline{BC} hacia abajo y el tramo \overline{AC} , de manera muy especial de C a A conservando su forma geométrica. En resumen, toda la cadena giraría en el sentido horario; pero como la cadena es continua, este movimiento nunca se detendría y la cadena giraría de manera perpetua.

¡Si Herón hubiera tenido la razón...!

Si los argumentos expuestos en el párrafo anterior fueran verdaderos, apelando a la inteligencia de buenos ingenieros, podríamos añadir a este aparato algunos elementos mecánicos complementarios, como ruedas dentadas y engranajes; y a partir de estos elementos hacer girar todo género de maquinaria por un período indefinido de tiempo. *¡sin esfuerzo y sin combustible alguno!*. De este modo obtendríamos trabajo realizado a partir de la nada y con un poco de ingenio podríamos sacar a nuestro país, en menos de una semana, de esta terrible crisis que lo agobia y ...seríamos felices sin trabajar por el resto de nuestros días (¿?).

Y aparece Stevin ...el matasueños de Herón

¿Cómo procedió Stevin para demostrar que este sistema mecánico está en equilibrio y que no puede tener movimiento perpetuo?

Lo primero que estableció fue una suposición bajo la cual pudiera desarrollar un esquema matemático, que le permitiera relacionar el equilibrio de las fuerzas actuantes en el sistema con la geometría del mismo, es decir algunas relaciones entre cantidades físicas, como son los pesos de los tramos de cadena, las normales ejercidas por los planos sobre los tramos de cadena, entre otras fuerzas; con los elementos geométricos asociados con los planos inclinados tales como los catetos, hipotenusas y ángulos que lo conforman.

El siguiente desarrollo constituye una forma de cómo procedió el Sr. Stevin ante este problema. Desde luego que dicho desarrollo está expresado en un lenguaje matemático propio del curso de Estática que se estudia en nuestra Facultad.

Las figuras 2, 3 y 4 corresponden a los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los tramos

que conforman la cadena.

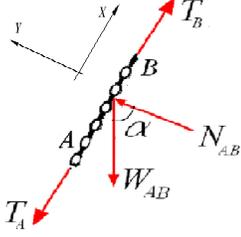


Figura 2

DCL del tramo \overline{AB}

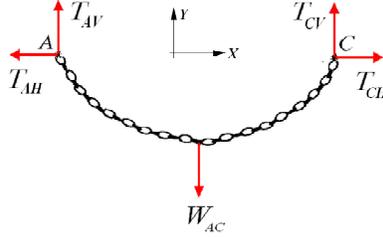


Figura 3

DCL del tramo \overline{AC}

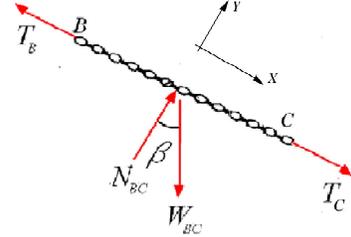


Figura 4

DCL del tramo \overline{BC}

Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

Para el tramo de cadena \overline{AB} de peso W_{AB} , de acuerdo al marco de referencia indicado, se tienen las siguientes ecuaciones

$$\sum F_x = 0; \quad T_B - T_A - W_{AB} \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_{AB} - W_{AB} \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

N_{AB} , corresponde a la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el tramo de cadena \overline{AB} .

Para el tramo de cadena \overline{BC} de peso W_{BC} .

$$\sum F_x = 0; \quad T_C + W_{BC} \operatorname{sen} \beta - T_B = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_{BC} - W_{BC} \cos \beta = 0 \quad (4)$$

Del mismo modo, N_{BC} corresponde a la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el tramo de cadena \overline{BC} .

Para el tramo de cadena \overline{AC} de peso W_{AC} . En las direcciones vertical y horizontal se tiene

$$\sum F_y = 0; \quad T_{AV} + T_{CV} - W_{AC} = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_x = 0; \quad T_{CH} - T_{AH} = 0 \quad (6)$$

Debido a la simetría de la configuración del tramo colgante¹, se tiene que las reacciones verticales en los puntos A y C son iguales, es decir $T_{AV} = T_{CV}$, por lo que de las ecuaciones (5) y (6) se tiene

$$T_{AV} = T_{CV} = \frac{W_{AC}}{2} \quad \text{y} \quad T_{AH} = T_{CH}$$

¹La forma del tramo colgante corresponde a una catenaria que tiene simetría respecto a un eje perpendicular al segmento BC y que pasa por el punto medio del mismo segmento.

De esta forma la reacción en el extremo A del tramo \overline{AC} de cadena se tiene

$$T_A = \sqrt{T_{AH}^2 + T_{AV}^2} = \sqrt{T_{AH}^2 + \frac{W_{AC}^2}{4}}$$

Del mismo modo para el extremo C

$$T_C = \sqrt{T_{CH}^2 + T_{CV}^2} = \sqrt{T_{AH}^2 + \frac{W_{AC}^2}{4}}$$

Por lo que

$$T_A = T_C \quad (7)$$

Al sustituir esta ecuación (7) en (1) y (3) y después de sumarlas se tiene

$$W_{BC} \text{sen} \beta - W_{AB} \text{sen} \alpha = 0 \quad (8)$$

Si la cadena tiene una distribución de peso por unidad de longitud ω que se considera uniforme, se puede establecer las siguientes relaciones

$$W_{BC} = \omega \overline{BC} \quad \text{y} \quad W_{AB} = \omega \overline{AB}$$

Al sustituir estas relaciones en (8) y simplificar

$$\overline{BC} \text{sen} \beta - \overline{AB} \text{sen} \alpha = 0$$

Esta última igualdad se cumple, en virtud de que

$$\overline{BC} \text{sen} \beta = \overline{AB} \text{sen} \alpha = \overline{BP} \quad (9)$$

De las ecuaciones (2) y (4) se tiene

$$\begin{aligned} N_{AB} &= W_{AB} \cos \alpha = \omega \overline{AB} \cos \alpha = \omega \overline{AP} \\ N_{BC} &= W_{BC} \cos \beta = \omega \overline{BC} \cos \beta = \omega \overline{PC} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores se pueden interpretar como las proyecciones de las cargas distribuidas en los planos \overline{AB} y \overline{BC} sobre las horizontales \overline{AP} y \overline{PC} . Dado que $\overline{AP} < \overline{PC}$, se tiene que

$$\omega \overline{AP} < \omega \overline{PC}, \text{ es decir } N_{AB} < N_{BC}$$

Pero si k es una constante adimensional que relaciona la longitud de los tramos \overline{PC} y \overline{AP} de tal forma que

$$k = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{PC}}{\frac{1}{2}\overline{AP}} > 1$$

Se puede formular la siguiente igualdad

$$\omega \overline{AP} \left(\frac{\frac{1}{2} \overline{PC}}{\frac{1}{2} \overline{AP}} \right) = \omega \overline{PC} \quad (10)$$

Ahora bien

$$W_{AP} = \omega \overline{AP} \quad \text{y} \quad W_{PC} = \omega \overline{PC} \quad (11)$$

Y al definir las distancias

$$d_1 = \frac{1}{2} \overline{PC} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{1}{2} \overline{AP} \quad (12)$$

Al sustituir (11) y (12) en la ecuación (10), se tiene

$$\begin{aligned} W_{AP} \left(\frac{d_1}{d_2} \right) &= W_{PC} \\ W_{AP} d_1 &= W_{PC} d_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Igualdad que corresponde a la conocida *Ley de la Palanca* cuya interpretación es la siguiente. Con relación a la figura 5.

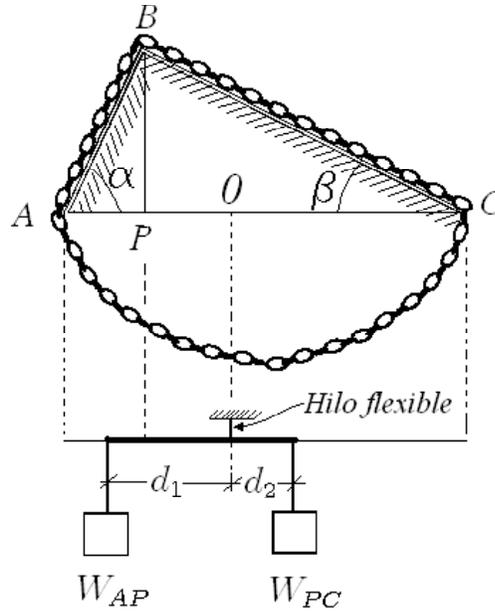


Figura 5

Ley de la Palanca

Si los cuerpos W_{AP} y W_{PC} se cuelgan, por medio de hilos, de los extremos de una barra sin peso de longitud $d_1 + d_2 = \frac{1}{2} \overline{PC} + \frac{1}{2} \overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ y esta barra a su vez se cuelga al pie del punto O se tiene un sistema en equilibrio. Pero también es posible hacerlo para cualquier número real positivo λ tal que la barra tenga longitud $d_1 + d_2 = \lambda \overline{PC} + \lambda \overline{AP} = \lambda \overline{AC}$.

Probablemente la ecuación (9) tenga una interpretación menos dudosa que (13), ya que esta última tuvo un desarrollo muy artificial y misterioso desde el punto de vista matemático. El

siguiente desarrollo es un intento de emular el método que empleó Galileo Galilei para obtener la *Ley de la Palanca*. a partir de un experimento mental.

Con relación a la figura 6, suponga que se tienen dos barras iguales sin peso. La primera de longitud \overline{AC} igual a la base de los dos planos inclinados \overline{AB} y \overline{BC} , en la misma barra se muestran el punto P y el punto medio Q que pertenecen a esta barra. La segunda barra suspendida de los extremos de la primera, por medio de dos hilos en los puntos A y C , y sobre ella un trozo de cadena de longitud \overline{AC} con una distribución de peso ω . En estas condiciones si la barra superior \overline{AC} se apoya en el punto Q la conservación del equilibrio del sistema *es más que evidente*.

Con base en la figura 6, suponga que se corta la barra inferior justo a una distancia \overline{AP} del extremo izquierdo, para dividirla en dos partes. Luego estas dos partes de longitudes \overline{AP} y \overline{PC} (de pesos W_{AP} y W_{PC}) se suspenden por medio de dos pares de hilos de igual tamaño en los extremos izquierdo y derecho del corte, figura 7. En estas condiciones se tienen tres barras en el sistema: una de peso despreciable en la parte superior; y las otras dos barras en la parte inferior: una de longitud \overline{AP} y la otra de longitud \overline{PC} . Es *evidente* que en este nuevo sistema, muy similar al de la figura 6, sigue conservando su equilibrio.

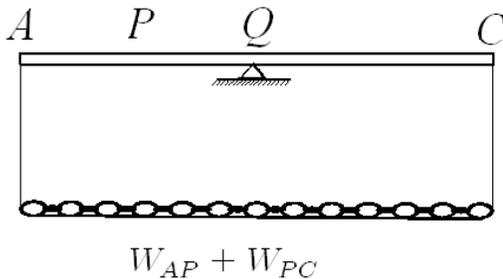


Figura 6

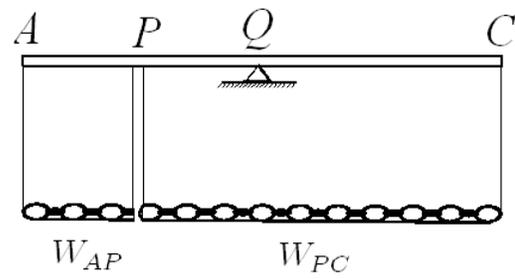


Figura 7

Ahora suponga que el tramo \overline{AP} de peso W_{AP} se sustituye por un bloque del mismo peso suspendido por un hilo a la mitad del segmento \overline{AP} . De manera similar el tramo \overline{PC} de peso W_{PC} se sustituye por otro bloque del mismo peso y se cuelga por medio de un hilo a la mitad del segmento \overline{PC} . En estas condiciones, dado que la fuerza resultante de los pesos de ambos cuerpos del sistema pasa por el punto de apoyo Q , *es evidente* que los sistemas mostrados en la

figuras 8 y 9 también conservan el equilibrio.

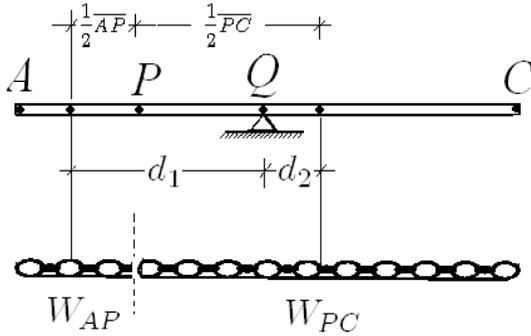


Figura 8

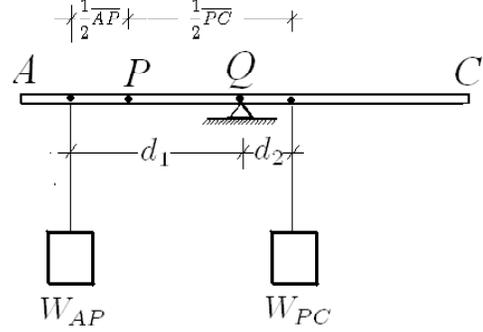


Figura 9

En este último sistema se debe cumplir

$$W_{AP}d_1 = W_{PC}d_2$$

para que esté en equilibrio, por lo que basta demostrar que, de la configuración geométrica del sistema mecánico de la figura 9 se debe verificar que

$$d_1 = \frac{1}{2}\overline{PC} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{1}{2}\overline{AP}$$

Tal como se obtuvo en la ecuación (13).

Demostración:

Con relación a la figura 4

$$d_1 = \overline{AQ} - \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AP}) = \frac{1}{2}\overline{PC}$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\overline{PC} - \overline{PQ}$$

Pero

$$\overline{PQ} = d_1 - \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PC} - \frac{1}{2}\overline{AP}$$

Al sustituir en d_2 se tiene

$$d_2 = \frac{1}{2}\overline{PC} - \left(\frac{1}{2}\overline{PC} - \frac{1}{2}\overline{AP}\right) = \frac{1}{2}\overline{AP}$$

Conclusiones y observaciones:

El establecimiento de las ecuaciones (9) y (13) verifican la hipótesis acerca de que el sistema mecánico se encuentra en equilibrio, ya que su manipulación matemática conduce a una certeza matemática dada por un teorema muy conocido como la *ley de los senos*, tal como se muestra a continuación.

De la ecuación (9) se tiene

$$\overline{BC} \operatorname{sen} \beta = \overline{AB} \operatorname{sen} \alpha = \overline{BP}, \text{ es decir } \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} \quad (14)$$

Si el punto R que pertenece al segmento \overline{BC} es tal que \overline{AR} es perpendicular a \overline{BC} , también se puede establecer la relación

$$\overline{AC} \operatorname{sen} \beta = \overline{AB} \operatorname{sen} \gamma = \overline{AR}, \text{ es decir } \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} \quad (15)$$

donde γ es el ángulo que forman los lados \overline{BA} y \overline{BC} es decir $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

De las ecuaciones (14) y (15) se obtiene la ley de los senos

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Y de la ecuación (13) se llega a la ley de la palanca, como ya se demostró a partir de dos métodos.

Es importante observar que la ley de los senos se verifica, en virtud del establecimiento de las ecuaciones de equilibrio de dos tramos de cadena, uno en la dirección del plano inclinado \overline{AB} y el otro en la dirección de \overline{BC} y la otra ecuación del tramo colgante \overline{AC} sirvió para relacionar estas dos últimas. En cambio la ley de la palanca se verifica en virtud del establecimiento de las ecuaciones de equilibrio en la dirección perpendicular a los planos \overline{AB} y \overline{BC} .

A nuestros estimados lectores se les informa, que los subsecuentes números de nuestro Boletín de la Coordinación de Ciencias Aplicadas, se seguirá publicando provisionalmente en la página de la División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM. <http://dcb.fi-c.unam.mx>