

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

**FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA
DE LA PROBABILIDAD**

**AUTORES:
MARCO ANTONIO GÓMEZ RAMÍREZ
JORGE FEDERICO PANIAGUA BALLINAS**

1. CONCEPTOS BÁSICOS	1
1.1 FENÓMENOS DETERMINÍSTICOS Y ALEATORIOS	1
1.1.1 MODELOS	1
1.1.2 FENÓMENOS	1
1.1.3 ESPACIO MUESTRAL	2
1.1.4 EVENTOS	3
1.1.5 OPERACIÓN DE EVENTOS	3
1.1.6 EVENTOS NOTABLES	4
1.2 TÉCNICAS DE CONTEO	5
1.2.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO	5
1.2.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO	6
1.2.3 PERMUTACIONES	6
1.2.4 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN	8
1.2.5 PERMUTACIONES CON GRUPOS DE OBJETOS IGUALES	9
1.2.6 PERMUTACIONES CIRCULARES	10
1.2.7 COMBINACIONES	11
1.2.8 COMBINACIONES CON REPETICIÓN	12
1.2.9 NÚMEROS COMBINATORIOS	12
1.2.10 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS	12
1.2.11 ALGUNAS APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS	14
1.2.12 DIAGRAMA DE ÁRBOL	16
EJERCICIOS PROPUESTOS No. 1	18
2. CONCEPTO DE PROBABILIDAD	20
2.1 DIFERENTES INTERPRETACIONES DE PROBABILIDAD	20
2.1.1 CLÁSICA	20
2.1.2 FRECUENTISTA	21
2.1.3 SUBJETIVA	22
2.2 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD	23
2.2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD	23

2.2.2	TEOREMAS DE PROBABILIDAD	24
2.3	PROBABILIDAD CONDICIONAL, MARGINAL Y CONJUNTA	29
2.3.1	PROBABILIDAD CONDICIONAL	29
2.3.2	PROBABILIDAD CONJUNTA	30
2.3.2	PROBABILIDAD MARGINAL	32
2.3.4	PROBABILIDAD DE EVENTOS INDEPENDIENTES	33
2.3.5	APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE EVENTOS INDEPENDIENTES A LA TEORÍA DE SISTEMAS	34
2.3.6	PROBABILIDAD TOTAL	39
2.3.7	EL TEOREMA DE BAYES	39
	EJERCICIOS PROPUESTOS No. 2	46
	SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS	48

INTRODUCCION

El estudio de la Probabilidad data de hace más de tres siglos, cuando los franceses asiduos a los juegos de azar querían saber sus posibilidades reales de ganar en sus apuestas y recurrieron a los más prestigiados matemáticos de la época para encontrar al respecto explicaciones convincentes. A partir de ese entonces esta ciencia evolucionó y tomó un cuerpo matemáticos más formal con el enfoque axiomático hasta la mitad del siglo XX. Las aplicaciones de la Probabilidad y, desde luego, la Estadística que han evolucionado de manera paralela, se encuentran en múltiples manifestaciones en los campos de todas las áreas de la Ingeniería, la Química, la Física, la Biología, la Geografía, la Administración, la Economía, la Educación y los modernos sistemas Computacionales, sólo por mencionar algunos de ellos.

El presente trabajo tiene como propósito proporcionar al estudiante de ingeniería un apoyo para la comprensión y aplicación de los conceptos, principios, axiomas, teoremas fundamentales de la Teoría de la Probabilidad.

El contenido corresponde esencialmente a los apartados que establece el tema II del programa de la asignatura Probabilidad y Estadística contenida en todos los planes de estudio de las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El tratado está dividido en dos partes, la primera explica los diferentes modelos de experimentación que existen y la forma de determinar los espacios muestrales y cuentas principales de los mismos, así como el planteamiento de los métodos de conteo, fundamentados en el análisis combinatorio. La segunda parte, abarca lo fundamental de la Teoría de la Probabilidad iniciando por la descripción de los diferentes enfoques y escuelas que tiene esta disciplina; se sigue con la demostración de los teoremas básicos de la Probabilidad Axiomática y se continúa con apartados que definen e ilustran, con los ejemplos necesarios, a la Probabilidad de eventos independientes y condicionados. Se termina con lo correspondiente a la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.

Es importante señalar que para el correcto aprovechamiento de lo que este trabajo presenta es necesario contar con los conocimientos del Algebra Elemental y del Algebra de Conjuntos; así como una abierta disposición para considerar por un lado el orden y la sistematización del conocimiento y de manera simultánea, por otro lado, el análisis profundo y razonado de cada concepto y ejercicio que el documento de mande realizar por parte del estudiante. En el campo de la Probabilidad se dice que un problema bien comprendido y planteado satisfactoriamente está, para fines prácticos, en un noventa por ciento o mas bien resuelto.

Es por ello que, al final de cada una de las dos partes de estos apuntes, se ofrecen un conjunto de ejercicios propuestos para que quien los estudia le sirvan de repaso, despejen dudas y refuercen lo aprendido sobre el tema en cuestión. Para coadyuvar a lo anterior se entregan las respuestas de algunos de ellos.

Es propicia la oportunidad para agradecer al Ing. Salvador García Burgos y a la Maestra Alejandra Vargas, Coordinador de Ciencias Aplicadas y Jefa del Departamento de Probabilidad y Estadística respectivamente, de la División de Ciencias Básicas, por su invaluable apoyo para la realización de este material didáctico. Así también, nuestro reconocimiento a Lina García Velasco y Esther Cruz Camargo por su colaboración en la labor escribir por computadora el texto de esta primera versión.

MARCO ANTONIO GÓMEZ RAMÍREZ
JORGE FEDERICO PANIAGUA BALLINAS

1. CONCEPTOS BÁSICOS

El propósito de este fascículo es desarrollar ideas básicas para la comprensión de la probabilidad considerando ésta como matemática aplicada, en general se hace necesario el uso de conceptos de Álgebra, Geometría y Cálculo Diferencial e Integral y los relacionados con las técnicas de conteo.

1.1 FENÓMENOS DETERMINISTICOS Y ALEATORIOS

1.1.1 MODELOS

Para resolver los problemas relevantes que se le presentan al ingeniero, se utilizan abstracciones a las que se les conoce como modelos, mediante los cuales se analiza el comportamiento de los fenómenos físicos del mundo real, en las ciencias toman en general la forma de una ecuación matemática, por ejemplo, las leyes de Newton son modelos matemáticos útiles para la ingeniería, por que a través de ellos se pueden estudiar, analizar y cuantificar el comportamiento de varios fenómenos reales (sistemas físicos), como el movimiento en diferentes formas de objetos o el comportamiento de una estructura sujeta a diversas fuerzas de tensión y/o compresión, es decir, se puede predecir su respuesta ante diversos estímulos; otros ejemplos de modelos matemáticos son las ecuaciones de transferencia de calor o las ecuaciones de equilibrio de reacciones químicas.

1.1.2 FENÓMENOS

- a) **FENÓMENO:** Es toda manifestación de orden material, social o cultural.
- b) **EXPERIMENTO:** Es todo aquel acto o acción que se realiza con el fin de observar el comportamiento de un fenómeno y obtener sus resultados cuantificados. Los analistas estadísticos utilizan la palabra **experimento** para describir cualquier proceso que genere un conjunto de datos.

Los experimentos pueden clasificarse de acuerdo al tipo de resultados en determinísticos o probabilísticos (aleatorios).

Para nuestro tema de estudio nos interesan los **experimentos probabilísticos o aleatorios**, pero debemos establecer claramente la diferencia con los determinísticos.

- c) **DETERMINÍSTICO:** Es aquel cuyos resultados se pueden predecir de antemano, debido al avance del conocimiento científico, por ejemplo, la ley de Ohm $I = V/R$, donde se establece que la intensidad de corriente eléctrica **I** es directamente proporcional al voltaje **V** e inversamente proporcional a la resistencia **R**. Cuantas veces se repita el experimento, sin cambiar las condiciones, se obtendrá prácticamente el mismo resultado. Esto es, los resultados son predecibles.

A continuación se muestra una parte de un sistema eléctrico (fig. 1) con una fuente de Voltaje **V** y una resistencia **R**, que responde al modelo matemático $I = V/R$.

Si se dan valores a **V = 10 volts** y **R = 3 ohms**, la intensidad de corriente es:
 $I = 10/3 = 3.333$ amperes.

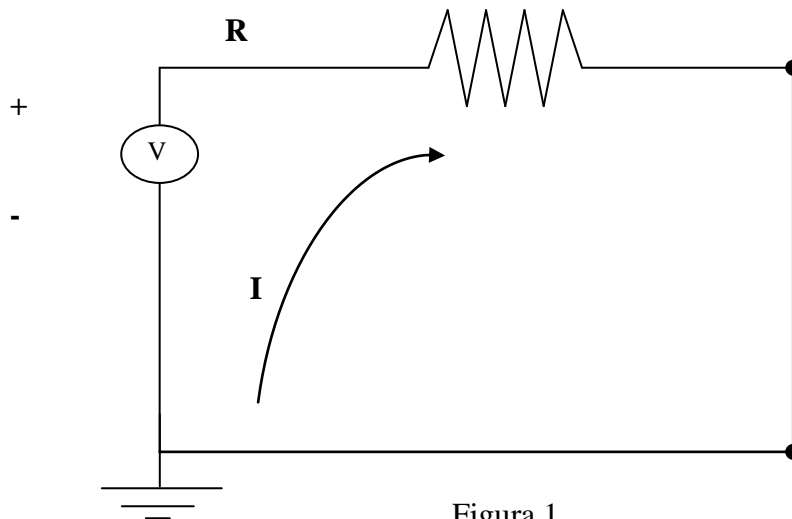


Figura 1

- d) **ALEATORIO:** Es aquel en el cual no se puede predecir con certeza el resultado, pero sí se conocen todos los posibles resultados; por ejemplo si se marca un número telefónico de un determinado amigo no se sabe con certeza que pasará; sin embargo se conoce que sólo pueden haber dos respuestas: contesta o no contesta. Otro ejemplo es la vida útil de un sistema de cómputo, la cual depende del trato del usuario, la calidad de componentes, etc., y debe medirse en unidades de tiempo desde cero o más; así, al tratar de utilizarlo puede o no funcionar.

Un gran número de problemas ingenieriles tienen un carácter aleatorio, por ello se apoyan en la probabilidad para estimar, con un alto nivel de confianza, los posibles resultados o respuestas de un sistema o el de los elementos que lo componen.

1.1.3 ESPACIO MUESTRAL

Los experimentos aleatorios generan diversos resultados, que se agrupan en lo que se llama **espacio muestral**, es decir, es el conjunto de valores que pueden ser números reales o representaciones no numéricas que constituyen todos los posibles resultados en un experimento aleatorio, de modo completo y mutuamente excluyente. El espacio muestral se representa mediante (**S**). A cada posible resultado del espacio muestral se le llama **elemento o evento simple**.

Los espacios muestrales se pueden clasificar de acuerdo con la cantidad de valores reales que pueden representar a los posibles resultados de un experimento, pueden ser **discretos** cuando solamente toman algunos valores reales dentro de un intervalo o valores no numéricos y **continuos** cuando toman todos los valores reales de un intervalo.

Ejemplo: En una esfera transparente se tienen una gran cantidad de chicles de dos colores: amarillos(a) y blancos (b). Si una persona introduce en la máquina una moneda de un peso, obtiene uno de estos chicles. Supóngase que un niño introducirá dos pesos, uno después del otro, ¿Cuál es el espacio muestral para los diferentes arreglos de colores que puede esperar el niño del par de chicles que adquirirá?. Para este experimento el espacio muestral es: $S = \{aa, ab, ba, bb\}$

Ejemplo: Considérese el caso de arrojar un dado y observar el número de puntos que tienen la cara que queda hacia arriba, el espacio de eventos es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en este caso se trata de un espacio discreto, ya que los posibles resultados son representados únicamente por los valores enteros que hay en el intervalo $[1, 6]$.

Ejemplo: En un tribunal, el día de hoy se juzgarán tres casos de personas detenidas por diversos delitos. En este proceso sólo pueden tenerse dos resultados, por cada caso, inocente (I) o culpable (C). Los posibles resultados del proceso son: $S = \{III, IIC, CII, ICI, ICC, CIC, CCI, CCC\}$, se contabilizan ocho y nótese que son valores no numéricos.

Ejemplo: En una banda transportadora, un técnico revisa las piezas elaboradas y retira las que se consideran defectuosas, con base en los criterios de la empresa, él tiene la orden de parar el proceso cuando se acumulen ocho piezas defectuosas, para darle mantenimiento a la máquina, y además debe rendir un informe de cuántas piezas fabricadas (n) se lograron hasta la suspensión, si ésta se llega a dar. El espacio muestral de los posibles resultados que pueden aparecer en el reporte, sobre las piezas fabricadas hasta que representa la octava defectuosa, es el siguiente: $S = \{n \mid n = 8, 9, 10, 11, \dots\}$.

Ejemplo: Un misil es lanzado y en determinados tiempos, se observan las tres componentes de la velocidad del mismo en el espacio (v_x, v_y, v_z). El espacio muestral que genera este experimento es continuo:

$$S = \{v_x, v_y, v_z \mid v_x, v_y, v_z \in \mathfrak{R}\}.$$

Ejemplo: Ahora considérese el voltaje que se recibe en una casa-habitación, que puede tener una magnitud de 120 a 127 volts, lo que implica que el voltaje que llega puede tomar cualquier valor real dentro del intervalo $[120, 127]$ volts, por lo tanto el resultado puede ser entero o fraccionario, en este caso se dice que el espacio es continuo, porque el resultado puede ser cualquier valor real dentro del intervalo.

Así mismo, debe analizarse otra característica de los espacios muestrales, el *tamaño* de ellos. Esto es, pueden ser *finitos* (numerables) o *infinitos* (numerables o no numerables). Así, el primer, segundo y tercer ejemplos son discretos numerables, hay cuatro, seis y ocho resultados respectivamente; el cuarto es discreto no numerable y; el quinto y el sexto son espacios muestrales continuos (infinitos).

1.1.4 EVENTOS

De cualquier experimento nos pueden interesar específicamente determinados resultados que los podemos agrupar en lo que recibe el nombre de **evento**. Esto es, cualquier conjunto de resultados definido en el espacio muestral de un determinado experimento, que tienen entre sí ciertas características especiales que sólo ellos las poseen, el resto de los resultados no. De esta manera pueden considerarse al espacio muestral como un conjunto universal (U) y a los eventos como subconjuntos, contenidos dentro de él. Por lo tanto, la teoría de eventos está sujeta a las operaciones y leyes del álgebra de conjuntos.

En general los eventos se representan mediante letras mayúsculas, por ejemplo en el experimento de arrojar un dado puede interesar que el resultado cae un número primo, el evento A sería $A = \{ 2, 3, 5 \}$, un evento A ocurre si el resultado del experimento es un elemento de evento A, si cae el número 2 entonces A sucedió. Otro evento B en el mismo experimento podría ser cae un número mayor a 3, y este queda definido como $B = \{4, 5, 6, \}$.

1.1.5 OPERACIONES DE EVENTOS

El Álgebra de Conjuntos es aplicable en las operaciones entre eventos. La **unión** e **intersección** de eventos, son dos operaciones esenciales de la teoría de conjuntos. Así también el **producto** entre eventos es de suma utilidad en el presente estudio.

- a) **UNIÓN:** Se realiza con los elementos de dos ó más eventos de un espacio muestral, que pueden estar en uno u otro o en ambos eventos. Se denota con el símbolo \cup .

Ejemplo: Al arrojar un dado, evento D cae un número par, $D = \{2, 4, 6\}$ y evento F sale un número múltiplo de tres, $F = \{3, 6\}$, ¿Cuál es la unión de D y F?

Solución: La unión de D y F se representa mediante $D \cup F$ es igual a los elementos que hay en D y F sin repetirse, por lo tanto $D \cup F = \{2, 3, 4, 6\}$.

Ejemplo: En un grupo de Inglés hay cuatro alumnos de nivel avanzado (G), 8 de nivel intermedio (H) y 12 de nivel bajo (I). Para regularizar lo más posible el profesor impartirá un curso preliminar sólo a los que no alcancen el nivel avanzado (J). ¿Qué alumnos asistirán?

Solución: Los que asistirán al curso son los 20 alumnos del nivel no avanzado que será formado por las personas de los niveles intermedio y bajo; esto es:

$$J = H \cup I.$$

- b) **INTERSECCIÓN:** Son los elementos comunes a dos o más eventos diferentes en un mismo espacio, la intersección de eventos se representa mediante \cap

Ejemplo: En el problema del lanzamiento del dado, ¿cuál es la intersección de los eventos D y F?

Solución: $D \cap F = \{6\}$.

Ejemplo: En el ejemplo del grupo de Inglés los diferentes niveles ¿tienen alumnos en común?

Solución: $G \cap H \cap I = \emptyset$. Por lo tanto no hay alumnos que pertenezcan a dos o más niveles.

Ejemplo: Las actividades cotidianas preferentes de Juan son: jugar al fútbol, jugar ajedrez, estudiar ingeniería y realizar tareas altruistas y, las actividades de la misma índole para María han sido siempre: ver el fútbol, jugar ajedrez, estudiar ingeniería y atender su negocio. ¿Dónde existe compatibilidad entre estas dos personas?

Solución: Únicamente hay coincidencia en jugar ajedrez y estudiar ingeniería. Lo que constituye una intersección de orden cualitativo.

Obsérvese que el fútbol es una actividad de interés común; sin embargo, para uno es el jugarlo y para el otro es sólo verlo.

- c) **PRODUCTO:** Si A y B son dos eventos, el conjunto de todos los posibles pares ordenados de elementos de la forma (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$, se denomina producto cartesiano de A y B, que se denota por $A \times B$.

Ejemplo: Sean los conjuntos de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{7, 9\}$. Encontrar el producto $A \times B$

Solución: $A \times B = \{(1, 7) (1, 9) (2, 7) (2, 9) (3, 7) (3, 9)\}$

Este concepto de producto entre eventos se extiende a un número cualquiera de eventos. El evento producto de los eventos $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$, es el conjunto de valores ordenados: $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \dots n\}$

1.1.6 EVENTOS NOTABLES

- a) **EVENTO SEGURO:** Es aquel que considera todos los posibles resultados de un espacio de eventos, se representa mediante la letra **S**, en el caso de arrojar un dado y observar el número de puntos en la cara superior, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- b) **EVENTO VACÍO:** Los autores dan dos acepciones; la primera, es aquella cuando carece de resultados, lo denominan *Evento Nulo* y; la segunda, cuando se espera la ocurrencia de algo que no puede ocurrir y lo llaman *Evento Imposible*. En ambos casos se representa mediante la letra (\emptyset). Como ejemplo en el caso de arrojar un dado, sean los eventos $A = \{\text{número primo}\} = \{2, 3, 5\}$, $Q = \{\text{par igual o mayor que cuatro}\} = \{4, 6\}$, $R = \{\text{menos tres}\} = \{-3\}$, $T = \{\text{siete u ocho}\} = \{7, 8\}$. Ahora el evento $A \cap Q = \emptyset$ es el Evento Nulo; y tanto el evento R como el evento T son Eventos Imposibles.

- c) **EVENTOS EXCLUYENTES:** Son aquellos que no tienen elementos comunes, su **intersección** es el Evento Vacío. En el experimento de arrojar un dado definiremos otro evento, C cae un número menor que 3, $C = \{1, 2\}$, este evento es excluyente con el evento B cae un número mayor que 3, $B = \{4, 5, 6\}$, por lo tanto $B \cap C = \emptyset$.
- d) **EVENTOS COMPLEMENTARIOS:** Son dos eventos que además de ser excluyentes, son exhaustivos, esto significa que la **unión** de ellos da por resultado el espacio **S**. En el experimento que venimos ejemplificando, definiremos el evento $E = \{\text{sale un número impar}\} = \{1, 3, 5\}$. Entonces D y E son eventos complementarios, ya que: $D \cup E = S$.

Ejemplo: Dado el siguiente diagrama de Venn (fig. 2), determinar cinco eventos notables, del conjunto de éstos que ahí se presentan.

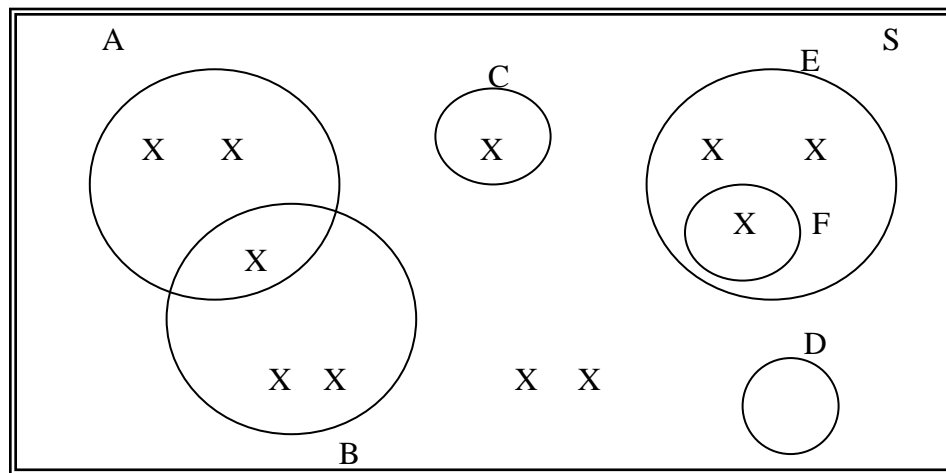


Figura 2

Solución:

A y B no son mutuamente excluyentes, $A \cap B \neq \emptyset$. Tienen un elemento común.

B y E son mutuamente excluyentes $B \cap E = \emptyset$. No tienen elementos comunes.

C y F son eventos simples o elementos del espacio de eventos.

D es un evento vacío, no contiene ningún elemento.

E y F no son mutuamente excluyentes, $E \cap F \neq \emptyset$, y además F es un subconjunto de E, $F \subset E$.

1.2 TÉCNICAS DE CONTEO

En algunos experimentos pueden aparecer un número muy grande de resultados que dificultan la contabilización directa de los mismos. En esta parte se presentan algunas técnicas que se conocen como Análisis Combinatorio para calcular el número de resultados posibles de un experimento de esta naturaleza.

El Principio Fundamental de la Multiplicación que es la base para desarrollar las Técnicas de Conteo, requiere de un producto sucesivo de números enteros positivos, en forma creciente o decreciente, denominado **factorial de un número**, que a continuación se explica.

1.2.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO:

La palabra factorial proviene de factor, que se refiere a los elementos de la multiplicación. Factorial de un Número es el producto consecutivo de todos los números enteros desde el uno al número dado inclusive, se presenta por $n!$, donde n debe ser real, entero y positivo, calculándose de la forma siguiente $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$, tomando en cuenta que el orden de los factores no altera el producto, se puede invertir el orden de éstos:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Considerando la propiedad asociativa de la multiplicación y la propia definición de factorial, se puede llegar a la expresión siguiente; $n! = n (n-1)!$, llamada *Fórmula Fundamental del Factorial*, esta fórmula carece de sentido para $n = 1$ y para $n = 0$, debido a que la definición de factorial no abarca el caso en que el número dado n sea uno o cero, sin embargo, para aplicar la definición de factorial en forma general, se considera que el factorial de cero y de uno es igual a la unidad, es decir, $0! = 1$ y $1! = 1$.

Demostración:

- a) Considerando la expresión general del factorial
 $1! = 1$
- b) Con la asistencia de la fórmula fundamental del factorial:
 $n! = n (n-1)!$
si $n = 1$
 $1! = 1 (1-1)!$

Por lo tanto:

$$0! = 1 \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Ejemplo: Calcular el factorial del número 15

Solución: $15! = 15 \times 14 \times 13 \dots \times 2 \times 1 = 1.30774 \times 10^{12}$

Ejemplo: Obtener el valor de la siguiente expresión: $\frac{12!}{4!}$

Solución: $\frac{12!}{4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 12 \times 11 \times 10 \dots \times 7 \times 6 \times 5 = 1.99584 \times 10^7$

1.2.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO.

Conocido también como Principio Fundamental de la Multiplicación, dice lo siguiente: si un hecho puede realizarse de n_1 formas diferentes y si para cada una de éstas puede efectuarse un segundo acto de n_2 formas distintas, entonces ambos actos pueden efectuarse de $n_1 \times n_2$ formas distintas, lo anterior puede extenderse a más eventos, entonces una secuencia de k hechos puede realizarse de $n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_{k-1} \times n_k$ formas distintas.

Ejemplo: Un ingeniero adquirió recientemente un terreno para realizar un proyecto inmobiliario, el permiso oficial para llevarlo a cabo requiere que el predio esté a su nombre ante el Registro Público de la Propiedad. Para los trámites correspondientes de la escrituración del terreno el ingeniero necesita los servicios profesionales de un abogado y un notario público. En la región hay 7 abogados y 4 notarios públicos. ¿Cuántos pares abogado- notario, en ese orden, diferentes puede elegir el ingeniero para realizar la escrituración?

Solución: Como puede apreciarse en el enunciado el ingeniero debe seleccionar primero a un abogado de los siete disponibles, y después decidirá por uno de los cuatro notarios públicos que hay en la región. Esto es, por cada uno de los siete abogados ($n_1 = 7$), hay cuatro opciones de notarios públicos ($n_2 = 4$). Por lo tanto con base en el Principio Fundamental de la Multiplicación; el tamaño del espacio muestral $n(S)$ para la elección del par de profesionales que deberá hacer el ingeniero es:

$$n(S) = n_1 \times n_2 = 7 \times 4 = 28, \quad \text{pares diferentes (abogado- notario público)}$$

1.2.3 PERMUTACIONES

Se denominan permutaciones a los arreglos de n elementos considerados, tomados éstos de r a la vez, ya sea agrupados todos o parte de ellos ($r \leq n$). Arreglos con al menos un elemento diferente o con elementos iguales pero en diferente orden o con diferente número de elementos, se dice que son permutaciones diferentes.

Para determinar el número de arreglos que se pueden formar al tomar r objetos de entre los n objetos dados, dividimos el problema en varios eventos:

- Escoger el primer objeto (orden = 1). Hay n maneras diferentes, puesto que los n objetos están disponibles en $n - (\text{orden} - 1) = n - (1 - 1) = n$.
- Escoger el segundo objeto (orden = 2). Hay $n - 1$ maneras diferentes: $n - (\text{orden} - 1) = n - (2 - 1) = n - 1$ y así sucesivamente:

- c) Escoger el $(r - 1)$ ésimo objeto (orden = $r - 1$). Hay $n - r + 2$ maneras diferentes:
 $n - [(r - 1) - 1] = n - (r - 2) = n - r + 2$.
- d) Escoger el (r) ésimo objeto (orden = r). Hay $n - r + 1$ maneras diferentes:
 $n - (r - 1) = n - r + 1$.

Las permutaciones las representamos mediante P_r^n , donde n son los objetos disponibles y r (orden) el número de objetos que se toma de los n , aplicando el principio fundamental del conteo tendríamos:

$$P_r^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots [n - (r - 2)] \times [n - (r - 1)]; \quad r \text{ factores}$$

Considerando que factorial de n es:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots [n - (r - 2)] \times [n - (r - 1)] \times (n - r) \times [n - (r + 1)] \times [n - (r + 2)] \dots \times 2 \times 1$$

y que factorial de $n - r$ es:

$$(n - r)! = (n - r) \times [n - (r + 1)] \times [n - (r + 2)] \dots 3 \times 2 \times 1$$

el número de formas diferentes buscando se puede obtener dividiendo el factorial de n entre el factorial de $n - r$, por lo tanto:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n - r)!} = \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots [n - (r - 1)] \times (n - r) \times [n - (r + 1)] \dots \times 3 \times 2 \times 1}{(n - r) \times [n - (r + 1)] \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\text{simplificando: } P_r^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots [n - (r - 2)] \times [n - (r - 1)]$$

Por lo que la expresión: $P_r^n = \frac{n!}{(n - r)!}$ nos indica el número de formas diferentes que se tienen al escoger r objetos de n disponibles.

Las permutaciones de n objetos son las agrupaciones simples de n objetos tomados de orden n , es decir, $r = n$ y se representan mediante P_n^n .

$$P_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!}; \quad \text{como } 0! = 1, \text{ tenemos que } P_n^n = n!$$

Las permutaciones de n objetos es igual al factorial de número n de objetos dados.

Ejemplo: Considerese las 5 vocales {a, e, i, o, u}, obtener: P_1^5 , P_2^5 y P_3^5

Solución:

$$a) \quad P_1^5 = \frac{5!}{(5 - 1)!} = \frac{5!}{4!} = 5 \quad \text{a, e, i, o u.}$$

$$b) \quad P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

ae,	ai,	ao,	au
ea,	ei,	eo,	eu
ia,	ie,	io,	iu
oa,	oe,	oi,	ou
ua,	ue,	ui,	uo

$$c) \quad P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

aei,	aeo,	aeu,	eai,	eao,	eau,	iae,	iao,	iau,
aie,	aio,	aiu.,	eia,	eio,	eiu,	iea,	ieo,	ieu,
aoe,	aoi,	aou,	eo a,	eo i,	eo u,	io a,	io e,	io u,
aue,	aui,	auo,	eua,	eue,	eui,	iua,	iue,	iuo,
oae,	oai,	oau,	uae,	uai,	uao,			
oea,	oei,	oeu,	uea,	uei,	ueo,			
oia,	oie,	oiu,	uia,	uie,	uio,			
oua,	oue,	oui,	uoa,	uae,	uoi,			

Ejemplo: ¿De cuántas formas distintas se pueden acomodar en una fila 5 libros de física distintos?

Solución: $P_5^5 = 5! = 120$

Esto es porque los libros son *distinguibiles*, uno a uno. Presentan diferencias en el tamaño, color de las pastas, grueso, contenido, etc.

1.2.4 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Son aquellas en donde se permite la repetición de objetos, por lo que puede suceder que $r > n$. Para establecer la forma de determinar el número de permutaciones con repetición, consideremos las Permutaciones Simples y el Principio Fundamental del Conteo.

- Para escoger el primer objeto se tienen n posibilidades de hacerlo.
- Para escoger el segundo objeto, se tendrán las mismas n posibilidades de hacerlo, ya que se pueden repetir los objetos, y así sucesivamente.
- Si se requiere escoger el r -ésimo objeto se tendrán n posibilidades de hacerlo, por lo tanto, si representamos el número de permutaciones con repetición mediante PR_r^n , tendremos que: $PR_r^n = n \times n \times n \dots n \times n$, r igual al número de factores; finalmente $PR_r^n = n^r$, las

permutaciones con repetición de n objetos tomados de orden r es igual a n elevado a la potencia r .

Ejemplo: Los juegos de placas de automóvil en el Distrito Federal (D.F.) constan de 3 dígitos y 3 letras, si se disponen de los dígitos del 0 al 9 y de las 26 letras del alfabeto y además el primer dígito no puede ser cero y la primera letra de las placas debe ser de la A a la W. ¿De cuántas formas diferentes se pueden obtener los arreglos de dígitos y letras para las placas en el D.F.?

Solución: Para el primer dígito se tienen $n_1 = 9$ formas diferentes de escogerlo, para el segundo y el tercero se tienen $n_2 = PR_2^{10} = 10^2 = 100$ formas diferentes de escogerlos, para la primera letra

$n_3 = 22$ y para las otras dos $n_4 = PR_2^{26} = 26^2 = 676$

Aplicando el Principio Fundamental del Conteo, se tiene:

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 9 \times 100 \times 22 \times 676 = 13,384,800$ juegos de placas.

1.2.5 PERMUTACIONES CON GRUPOS DE OBJETOS IGUALES (NO DISTINGUIBLES)

Consideremos un conjunto de n objetos disponibles donde hay un subconjunto de m objetos iguales (no se pueden diferenciar entre si). Para determinar el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con los n objetos disponibles, supóngase que ya están formadas todas las permutaciones con grupos de objetos iguales, distintas entre si, con los n objetos y que su número es X , en cada una de las X permutaciones formadas sustitúyanse los m objetos iguales y permútense entre si, $P_m^n = m!$, por lo que se tendrán $m!$ formas diferentes, si multiplicamos $X \times m! = n!$, de donde X es el número de permutaciones de n objetos dentro de los cuales hay m que son iguales, este número lo representaremos por P_m^n , despejándolo tenemos $P_m^n = \frac{n!}{m!}$, esta expresión se puede extender a un conjunto de n objetos disponibles donde existan dos o más subconjuntos de objetos iguales, generalizando podemos llegar a:

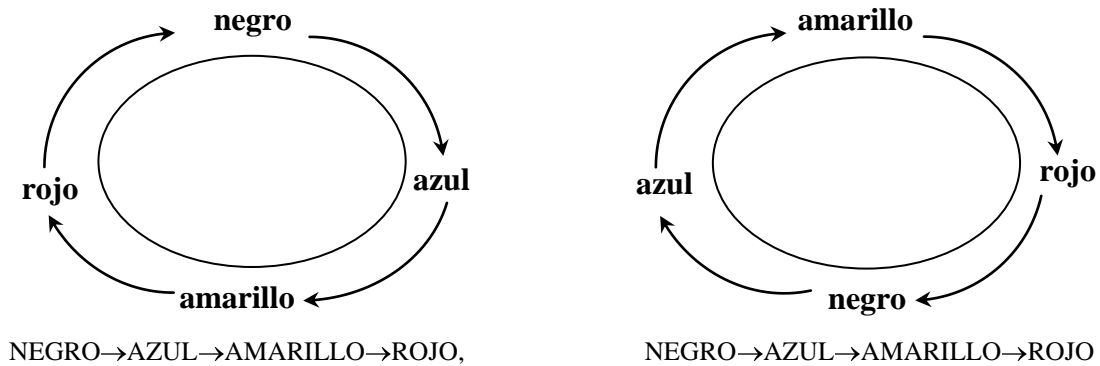
$$P_{m_1, m_2, \dots, m_k}^n = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

Ejemplo: De cuántas formas diferentes se pueden colocar diez libros en una fila de un librero, si tres son de Física iguales, dos de Matemáticas iguales y otros cinco de otras diferentes áreas de la ciencia

Solución: $P_{3,2}^{10} = \frac{10!}{3! 2!} = 302,400$

1.2.6 PERMUTACIONES CIRCULARES

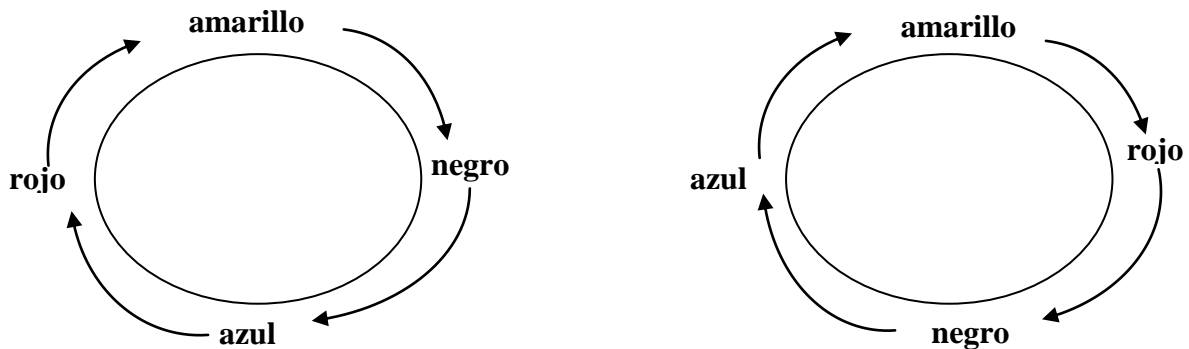
El problema se plantea para obtener el número de arreglos diferentes en que pueden colocarse n objetos alrededor de un círculo, sin que importe la posición absoluta de los objetos en círculo, lo que importa es la posición relativa entre los objetos, es decir, dos permutaciones circulares serán iguales si la posición relativa entre los n objetos es la misma, aunque la posición absoluta entre ellos sea diferente.



Permutaciones circulares iguales

Figura 3

Las permutaciones circulares de la figura 3 son iguales, ya que tomando como base el color negro en círculo de acuerdo al giro de las manecillas del reloj llegamos al azul, después al amarillo, enseguida al rojo y por último regreso al negro:



Permutaciones circulares diferentes

Figura 4

Las permutaciones circulares de la figura 4 son diferentes, considerando el giro de las manecillas del reloj y partiendo del color negro:

NEGRO→AZUL→ROJO→AMARILLO, NEGRO→AZUL→AMARILLO→ROJO

Para determinar el número de permutaciones circulares que pueden formarse con n objetos, se considera las permutaciones simples de n objetos $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n$ si lleva el último objeto al principio tenemos $A_n A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$, si repetimos el procedimiento n veces se tendrá n permutaciones simples, si las llevamos alrededor de un círculo, como ya se dijo, como permutaciones circulares se trata de la misma permutación, lo que implica que una permutación

circular genera n permutaciones simples, por lo tanto, a partir del número de permutaciones simples P_n^n puede obtenerse el número de las permutaciones circulares de n objetos disponibles, que representaremos por PC_n , como cada permutación circular genera n permutaciones simples, las permutaciones simples de n objetos es igual a n por el número de permutaciones circulares de los n objetos disponibles: $P_n^n = n PC_n$, de donde: $PC_n = \frac{P_n^n}{n} = \frac{n!}{n}$, aplicando la fórmula fundamental del factorial $n! = n(n-1)!$, se tiene que: $PC_n = (n-1)!$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse alrededor de una mesa una familia compuesta por los padres y dos hijos?

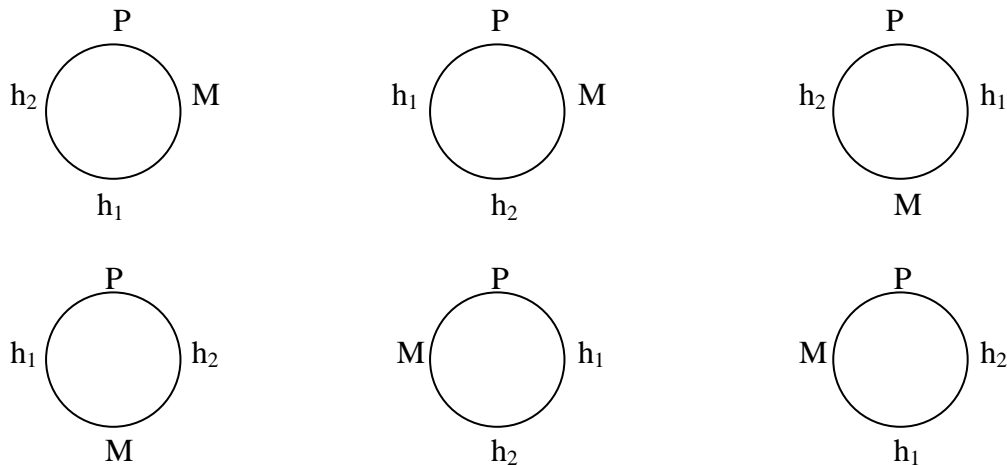


Figura 5

Solución: $PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$

1.2.7 COMBINACIONES

Las combinaciones se forman también de r elementos de un conjunto disponible de n de ellos. Se diferencian de las permutaciones en virtud de que en las combinaciones interesa solamente la selección de los elementos y no el orden de ellos.

Para determinar el número de combinaciones de n objetos de orden r , que se representan mediante C_r^n ó $\binom{n}{r}$ ó nCr considerando que están formadas las combinaciones C_r^n , si a cada una se les permuta sus r objetos, tenemos $r!$ maneras distintas de hacerlo, el producto $r! C_r^n$ nos da el total de permutaciones de n objetos disponibles tomados de orden r , por lo tanto: $r! C_r^n = P_r^n$.

Despejando: $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Ejemplo: Un comandante de la policía federal tiene a su disposición cinco personas (Daniel, Ernesto, Fernando, Víctor y José), requiere para el turno vespertino elegir dos de ellas para formar una pareja que realice, en cierta zona, el patrullaje correspondiente en uno de los vehículos con que

cuenta la delegación a su cargo. ¿De cuántas maneras diferentes el comandante puede formar la mencionada pareja?.

Solución: Las diez posibles parejas para realizar el patrullaje son:

Daniel y Ernesto	Ernesto y Fernando	Fernando y Víctor	Víctor y José
Daniel y Fernando	Ernesto y Víctor	Fernando y José	
Daniel y Víctor	Ernesto y José		
Daniel y José			

Así la pareja: Ernesto y Daniel no es otra combinación, ya que ellos fueron la primera pareja enlistada. Como puede apreciarse cuando solamente importa a quienes se selecciona es una combinación y es intrascendente el orden que se haya realizado. Daniel y Ernesto o Ernesto y Daniel son la misma combinación y, al mismo tiempo, visto desde otra óptica son diferentes permutaciones.

Otra forma de resolverlo:

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = 10 \text{ formas diferentes}$$

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes un director técnico puede formar el equipo titular de básquetbol (cinco personas)?, si el equipo completo dispone de diez jugadores.

Solución: $C_5^{10} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{120} = 252 \text{ formas diferentes}$

1.2.8 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

En este tipo de combinaciones se permite la repetición de objetos en una misma combinación por lo que el orden puede ser mayor que el número de objetos $r > n$. La expresión que nos da el número de combinaciones con repetición CR_r^n , que se pueden formar con n objetos de orden r , se puede demostrar utilizando el método de inducción matemática y es igual al número de combinaciones simples que se pueden formar con $n + r - 1$ objetos de orden r , es decir:

$$CR_r^n = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Demostración:

Si $n = 1$

$$C_r^{1+r-1} = \frac{(1+r-1)!}{r!(1-1)!} = \frac{r!}{r!(0)!} = \frac{r!}{r!} = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Si $n = 2$

$$C_r^{2+r-1} = \frac{(2+r-1)!}{r!(2-1)!} = \frac{(r+1)!}{r!(1)!} = \frac{(r+1)r!}{r!} = r+1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Si $n = k$

$$C_r^{k+r-1} = \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!} ; \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$C_r^{(k+r-1)+1} = \frac{(k+r-1+1)!}{r!(k+r-1+1-r)!} = \frac{(k+r)!}{k!r!} \quad \dots\dots\dots (3')$$

Si $n = k+1$

$$C_r^{(k+1)+r-1} = \frac{(k+1+r-1)!}{r!(k+1+r-1-r)!} = \frac{(k+r)!}{k!r!} \quad \dots\dots\dots (4)$$

Como (4) es igual a (3'), queda demostrado

Ejemplo: Una planilla sindical debe estar formada por diez miembros. ¿Cuántas planillas diferentes se pueden formar, con respecto a su composición de hombre (H) y de mujeres (M)?

Solución: $CR_{10}^2 = C_{10}^{2+10-1} = C_{10}^{11} = \frac{11!}{10!(2-1)!} = \frac{11!}{10!1!} = 11$

HHHHHHHHHH	HHHHHHMMMM	HHMMMMMMMM
HHHHHHHHHM	HHHHHHMMMM	HMMMMMMMMM
HHHHHHHHMM	HHHHHHMMMM	MMMMMMMMMM
HHHHHHHMMM	HHHHHHMMMM	

1.2.9 NÚMEROS COMBINATORIOS

En matemáticas son muy importantes los números combinatorio, que se representan mediante $\binom{n}{r}$ donde: n = numerador y r = orden. La expresión que nos da el número combinatorio es la de combinaciones simples C_r^n , que se pueden formar con n objetos de orden r .

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1.2.10 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

a) Cuando los números combinatorios son de orden cero, toman el valor de uno.

Demostración:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} \quad \text{como } 0! = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- b) Si el numerador y el orden de los números combinatorios es n, también toman el valor de uno.

Demostración:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} \quad \text{como } 0! = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- c) Los números combinatorios de orden uno son iguales a n.

Demostración:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

- d) Si n es el numerador de dos números combinatorios, con un orden, de cada uno de ellos, que al sumarse complementan dicho numerador; son condicionantes ambos, necesarios y suficientes, para que los mencionados números combinatorios sean iguales entre sí.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Demostración:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

- e) Si dos números combinatorios, con igual numerador n, pero uno con orden r y el otro con orden r + 1, se suman; siempre se tiene otro número combinatorio con numerador n + 1 y de orden r + 1.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Demostración:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

aplicando la fórmula del factorial a los denominadores:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{r!(n-r-1)!(n-r)} + \frac{n!}{r!(r+1)(n-r-1)!}$$

Completando los denominadores para tenerlos iguales, sin alterar los sumandos.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!(r+1)}{r!(r+1)(n-r-1)!(n-r)} + \frac{n!(n-r)}{r!(r+1)(n-r-1)!(n-r)}$$

Efectuando operaciones:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!(r+1) + n!(n-r)}{r!(r+1)(n-r-1)!(n-r)} = \frac{n!(n+1)}{r!(r+1)(n-r-1)!(n-r)}$$

Aplicando la fórmula del factorial en numerador y denominador, tenemos:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$$

Por otra parte desarrollando el número combinatorio:

$$\binom{n+1}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(r+1)![(n+1)-(r+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} \text{ L.Q.Q.D.}$$

1.2.11 ALGUNAS APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS.

- a) **Teorema del binomio.** Establece que la suma de dos números elevada a un exponente entero y positivo $(a + b)^n$ es igual a la suma, término a término, desde r igual a cero hasta n , del producto del número combinatorio $\binom{n}{r}$ (coeficiente), el primer término del binomio elevado a la potencia $(n - r)$ y el segundo término elevado a la potencia r ; es decir:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{(n-r)} b^r$$

Ejemplo: $(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$

aplicando las propiedades de los números combinatorios tenemos que:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- b) **Triángulo de Pascal.** Donde los números combinatorios forman un arreglo triangular que corresponden a los coeficientes de un desarrollo binomial.

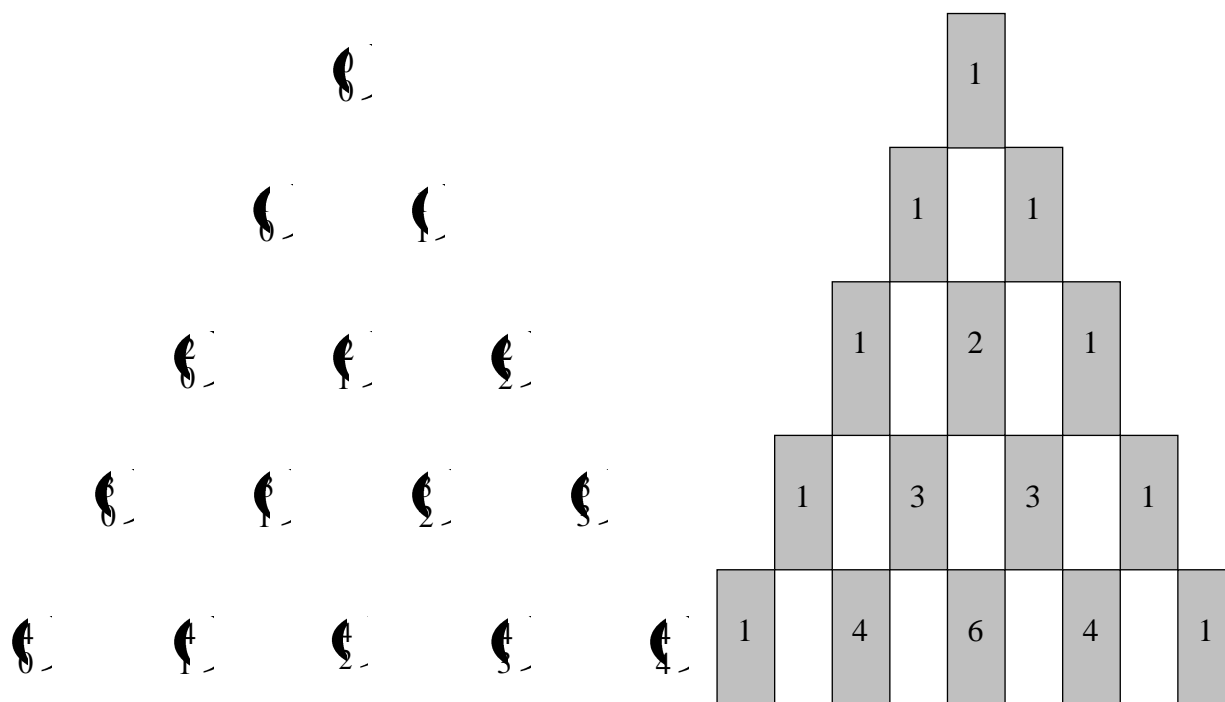


Figura 6

Ejemplo: Considerando el ejemplo anterior de $(a + b)^4$, observe que los coeficientes del desarrollo binomial corresponden a los números combinatorios de la base del Triángulo de Pascal (figura 6).

- c) **Contabilizar el número de subconjuntos de un determinado conjunto.** Se sabe en Álgebra de conjuntos que existen 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos, incluyendo el denominado conjunto vacío (o carente de elementos).

Sea un conjunto con n elementos. Partiendo de la definición de combinación que establece dos combinaciones son distintas si se tiene cuando menos un elemento distinto. Así, si se toman un subconjunto con todos los elementos ($r = n$) es evidente que sólo existe uno

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

si se requiere el número de subconjuntos con $n - 1$ elementos ($r = n - 1$):

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!(1)!} = n$$

si es necesario conocer el número de subconjuntos con $n - 2$ elementos ($r = n - 2$):

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)![n-(n-2)]!} = \frac{n(n-1)!}{2!}$$

y así sucesivamente hasta el número de subconjuntos con un solo elemento:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

De los resultados anteriores se puede concluir, que el número de subconjuntos de un conjunto es:

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{1} + (\text{conjunto vacío}) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

Para comprobar lo anterior basta desarrollar 2^n como el binomio $(1+1)^n$:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} (1)^{n-0} (1)^0 + \binom{n}{1} (1)^{n-1} (1)^1 + \binom{n}{2} (1)^{n-2} (1)^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (1)^1 (1)^{n-1} + \binom{n}{n} (1)^0 (1)^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Ejemplo: Una persona tiene cuatro monedas de diferente denominación. ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero puede formar con una o más de ellas?

Solución:

Primer método:

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 1 + 4 + 6 + 4 = 15 \text{ cantidades}$$

Segundo método:

El número de subconjuntos que se pueden formar con las cuatro monedas de $2^4 = 16$ menos el subconjunto que no contiene ninguna moneda (conjunto vacío), lo que da por resultado 15 cantidades diferentes.

1.2.12 DIAGRAMA DE ÁRBOL

Es otra técnica de conteo que nos permite numerar gráficamente los posibles resultados de un experimento. El *Diagrama de Árbol* consta de *nodos* que representan puntos de partida, en el espacio o el tiempo, donde se toman decisiones y las *ramas* representan las acciones posibles que se pueden realizar. El diagrama inicia por un nodo y sus posibles opciones a seguir (ramas iniciales). Cada conjunto de ramas a su vez forma puntos nodales donde se pueden tomar decisiones lo que permite que aparezcan nuevas generaciones de ramas.

Ejemplo: En una urna se tienen dos pelotas blancas, tres pelotas verdes y cuatro pelotas rojas, se sacan dos en forma consecutiva, determinar los arreglos diferentes en cuanto al color que se pueden sacar.

Solución: Se consideran dos eventos, (1^{ero}) sacar la primera pelota, (2^{do}) sacar la segunda pelota; para el primero hay tres posibles colores y para el segundo hay también tres colores posibles, el diagrama de árbol para este problema queda de la siguiente forma:

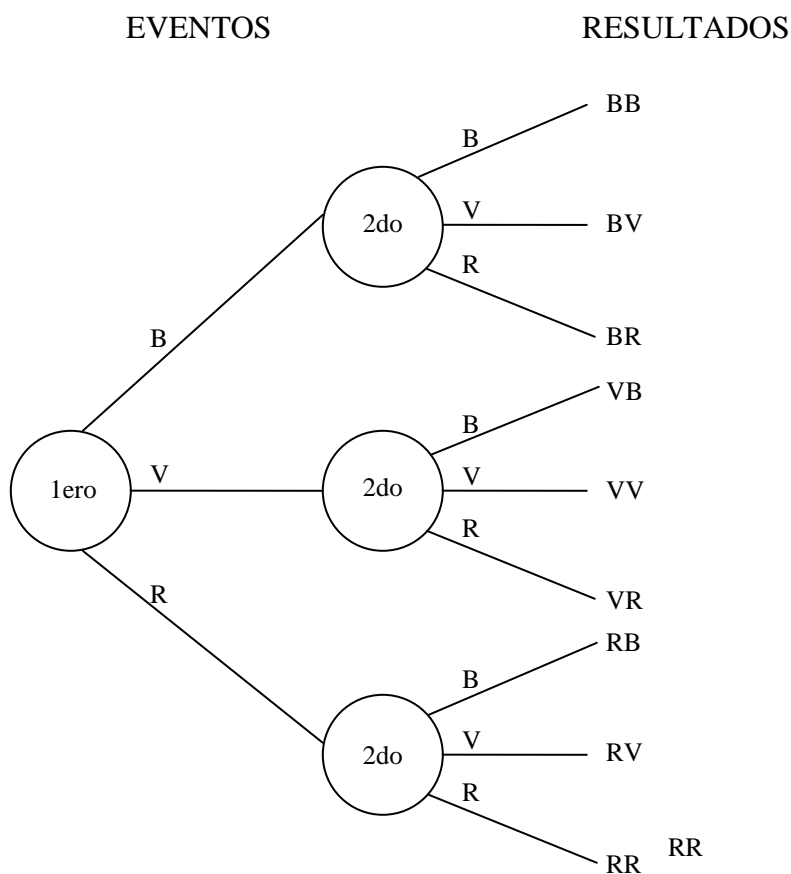


Figura 7

Por lo tanto hay nueve arreglos diferentes en cuanto al color de las pelotas que se sacan de la urna. Obsérvese que este problema generó tres puntos de toma de decisiones (nodos) y dos generaciones de ramas.

Aplicando el Principio Fundamental de la Multiplicación se tiene:

$$n_1 \times n_2 = 3 \times 3 = 9, \text{ lo que verifica el resultado obtenido}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS No. 1

1.1 Supóngase que el conjunto universal está formado por los 10 primeros dígitos.

Sean $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7, 9\}$. Identifique los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $A^c \cap B$ b) $A^c \cup B$ c) $(A^c \cap B^c)^c$ d) $[(A \cap B)^c \cap A]^c$ e) $[A \cup (B \cap C)^c]^c$

1.2 Apoyándose en los diagramas de Venn Euler, esquematice las siguientes relaciones:

a) $A \subset B$, luego $A = A \cap B$ b) $A \subset B$, luego $B = A \cup (B \cap A^c)$
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ d) $(A \cap B)^c \cup B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cup B)^c$

1.3 En una junta del Consejo Directivo de una empresa, asiste el presidente, 2 vicepresidentas, 4 socios, 2 socias y una secretaria.

- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar alrededor de una mesa redonda para sesionar, si el presidente siempre ocupa el mismo lugar flanqueado por las dos vicepresidentas?
- ¿De cuántas maneras pueden salir de la sala, si siempre salen primero las dos vicepresidentas seguidas por el presidente y luego el resto?
- ¿De cuántas maneras pueden salir de la sala si primero salen las mujeres y luego los hombres encabezados por el presidente?

1.4 Una empresa acaba de terminar una votación secreta para elegir al Director de Comercialización de la misma, la caja de votos contiene cuatro papeletas con votos para el candidato A y tres para el B. Supongamos que estas papeletas se sacan de la caja una por una para conocer el resultado de la votación:

- Elaborar una lista de los resultados posibles y contabilizarlos.
- ¿Para qué resultados, A siempre se sostuvo adelante de B?
- ¿Para qué resultados se decide la votación en la extracción de la sexta papeleta?

1.5 En una avenida hay dos bancos, con cajeros automáticos que funcionan las 24 horas, uno frente a otro. El banco A tiene 4 cajeros automáticos y el banco B tiene 5 cajeros automáticos:

- Plantee el espacio muestral y su tamaño, de los cajeros automáticos ocupados simultáneamente en los dos bancos.
- Establezca el evento: El banco A tiene más cajeros ocupados que el banco B.
- La suma de los cajeros automáticos ocupados en ambos bancos es 5, ¿Cuántos casos pueden presentarse bajo esta condición?

1.6 Un transportador de carga tiene capacidad de espacio para dos cajas de cierto tipo, independientemente del peso que contengan. Una bodega maneja para sus productos cajas de este tipo y pesan: 10, 20, 30 y así sucesivamente hasta 100 kg. Supóngase que el transportador sólo se utiliza cuando se completan las dos cajas de carga. Se elijen dos cajas al azar de la bodega para ponerlas en el transportador. Considérese “ x ” el peso de la primera caja y “ y ” el peso de la segunda caja; de tal forma que el par ordenado (x, y) representa el resultado para este experimento. Utilizando un plano cartesiano grafique:

- a) Espacio muestral.
- b) Evento $B = \{ \text{la segunda caja pesa el doble de la primera} \}$
- c) Evento $C = \{ \text{las dos cajas pesan lo mismo} \}$
- d) Evento $D = \{ \text{la primera caja pesa 20 kg menos que la segunda} \}$
- e) Plantee los eventos, de los anteriores incisos, de manera analítica.

1.7 Un estudiante tiene que contestar bien al menos ocho de diez preguntas en un examen para aprobar:

- a) ¿Cuántas maneras de aprobar tiene?
- b) ¿Cuántas maneras de aprobar tiene si las tres primeras preguntas son obligatorias de contestar bien?
- c) ¿Cuántas formas de aprobar tiene si debe contestar bien cuatro de las cinco primeras preguntas?

1.8 De un grupo de cuatro hombres y cinco mujeres, ¿Cuántos comités de 3 miembros son posibles?

- a) Sin restricciones.
- b) Con un hombre y dos mujeres
- c) Con una mujer y dos hombres, de éstos últimos uno siempre debe estar en el comité.

1.9 Un pequeño banco tiene disponibles tres analistas, cinco cajeros y dos administradores. ¿De cuántas maneras el gerente puede escoger un grupo de trabajo de seis personas, si éste debe de contar con:

- a) Dos analistas, tres cajeros y un administrador,
- b) Un analista, así como tres cajeros y dos administradores,
- c) Uno o dos analistas, no menos de tres cajeros y el resto administradores; pero al menos el grupo de trabajo debe tener un empleado de cada especialidad?

2. CONCEPTO DE PROBABILIDAD

En la vida común usamos continuamente el cálculo de probabilidades, si el día está nublado se opina que es probable que llueva y los individuos generalmente modificamos nuestra conducta de acuerdo a esa probabilidad. Así también si alguien compra un número de la Lotería Nacional siempre lo hace bajo el supuesto de obtener un premio monetario; la ilusión y la esperanza de este propósito, al menos, dura hasta que se efectúa el sorteo. En mayor o menor medida, la idea de probabilidad de un evento se utiliza frecuentemente en nuestra vida cotidiana.

El desarrollo inicial de la probabilidad, según los estudiosos de este campo, responde a las inquietudes de los apostadores franceses del siglo XVII, quienes querían conocer lo que podían ganar o perder en determinados juegos de azar, que promovían en aquella época casas dedicadas a ese negocio. Los apostadores, con el fin de proteger sus intereses, se asociaron con destacados matemáticos, lo que permitió el inicio del estudio formal de la Probabilidad.

En un principio hubo indiferencia y desconfianza de parte de la comunidad científica por el escaso soporte matemático que amparaba el novedoso campo de la Probabilidad; no obstante, se dice que en el comienzo, y en especial en los años treinta, del siglo pasado se intensificó el uso de los principios de la Probabilidad en algunos campos del saber humano, como la Biología, la Física, la Química y otros; condición que permite la aparición de un mayor rigor de la estructura Matemática de la Probabilidad.

Los autores contemporáneos plantean diversas interpretaciones de la Probabilidad, por ejemplo George Canavos dice que: "... La Probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse procesos aleatorios, cuando estos se comparan con los Fenómenos Determinísticos"; por otro lado Seymour Lipschutz afirma que: "... La Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de la determinación..."; por su parte Whilliams Hines señala que: "El término Probabilidad ha alcanzado un amplio uso en la vida diaria para cuantificar el grado de confianza en un evento de interés"; así también Jay Devore indica: "... El término Probabilidad se refiere al estudio de la aleatoriedad y la incertidumbre".

En resumen puede decirse que la Probabilidad es una rama de las matemáticas que trata del estudio de la cuantificación de la incertidumbre en los fenómenos de orden aleatorio. Lo que puede suceder pero en su exacta proporción de posibilidades es lo que mide la *probabilidad*: Del latín *probabilitas*, *verosimilitud* (*verus*: verdadero y *similis*: semejante), fundada apariencia de verdad, calidad de probable, **que puede suceder**.

2.1 DIFERENTES INTERPRETACIONES DE PROBABILIDAD

2.1.1 CLÁSICA

Si un experimento aleatorio puede resultar de $n(s)$ formas igualmente posibles y mutuamente excluyentes y si $n(A)$ de esos resultados tienen un atributo (característica específica) A , la probabilidad de evento A es la proporción de $n(A)$ con respecto a $n(s)$ en otras palabras, la probabilidad de que ocurra un evento A , es el cociente del número de elementos en A , entre el número de elementos que hay en el espacio muestral S .

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ = número de elementos en A

$n(S)$ = número de elementos en S

Ejemplo: Al arrojar un dado, se pueden tener los siguientes resultados $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(s) = 6$, se hace notar que se trata de un espacio de valores discretos, ya que los resultados únicamente son los enteros del 1 al 6.

Se definen los eventos siguientes:

A = { cae uno }	A = {1}	$N(A) = 1$
B = { cae dos }	B = {2}	$N(B) = 1$
C = { cae par }	C = {2, 4, 6}	$N(C) = 3$
D = { cae impar }	D = {1, 3, 5}	$N(D) = 3$
E = { cae menor a tres }	E = {1, 2}	$N(E) = 2$
F = { cae mayor o igual a tres }	F = {3, 4, 5, 6}	$N(F) = 4$

Calcular la probabilidad de esos eventos.

Solución: El resultado se puede presentar en forma decimal o porcentual.

Probabilidad de evento	Decimal	Porcentual (%)
$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6} =$	0.1666	16.66
$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{6} =$	0.1666	16.66
$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} =$	0.5	50.00
$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} =$	0.5	50.00
$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} =$	0.3333	33.33
$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} =$	0.6666	66.66

2.1.2 FRECUENTISTA

Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y $n(A)$ de los resultados son favorables a un atributo A, el límite del cociente $\frac{n(A)}{n}$ conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo A:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

donde $n(A)$ es el número de veces que se observa que sucede el evento A en n repeticiones del experimento.

Una forma común de calcular la probabilidad de un evento E desde el punto de vista frecuentista es dividiendo el número de veces que se presenta E , $n(E)$; entre el número total de experimentos efectuados $n(S)$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Ejemplo: Sea E el conjunto de mujeres en un grupo de probabilidad y S el total de alumnos en ese grupo. Si en el grupo hay 45 alumnos de los cuáles 15 son mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger al azar un alumno, este sea mujer?

Solución:

$$P(E) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

Ejemplo: En una fábrica de resistencias para planchas se hace un muestreo periódico con el propósito de determinar el porcentaje promedio de defectos en la producción, los resultados que se obtuvieron obedecen a la siguiente expresión $\frac{n}{n+10000}$:

Número de planchas muestreadas	Porcentaje de defecto
20	0.00199
40	0.00398
70	0.00695
95	0.00941

Solución:

Tomando límite a la expresión $\frac{n}{n+10000}$, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+10000} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado

Solución: $\frac{\frac{n}{n+10000}}{\frac{n}{n+10000}} = \frac{1}{\frac{n}{n} + \frac{10000}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{10000}{n}}$, ahora tomamos el límite

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{10000}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{10000}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$; por lo tanto el porcentaje de defectos tiende al 1%.

2.1.3 SUBJETIVA

De acuerdo con esta interpretación, la probabilidad de un evento es el grado de certidumbre que tiene una persona, o grupo de personas, acerca de la ocurrencia de un evento, puede ser que se sustente en la experiencia o en cierta información que se tenga. Una probabilidad igual a cero indica una certeza absoluta de que el evento no ocurrirá y una probabilidad igual a uno (100%) indica una certeza absoluta de que el evento ocurrirá.

Es importante reconocer que por la enorme cantidad de variables a considerar en determinados problemas, la utilización de modelos matemáticos se vuelve una situación compleja e impráctica y este enfoque, de acudir a la experiencia y visión de expertos en determinados campos de la actividad humana resulta más apropiado. Preguntas como las siguientes tendrían respuestas con alto grado de certidumbre al consultar con expertos: ¿En que periodo de tiempo se construirá la presa de “La Parota”?, ¿Qué candidato de los actuales será el que gane las elecciones?, ¿Cuánto será el tiempo útil de una determinada máquina?, sólo por poner algunos ejemplos.

Como puede observarse, los cuestionamientos anteriores corresponden a problemas que no tienen su fundamento en la frecuencia relativa; esto es, son casos que generalmente son únicos y no pueden repetirse. Por ello, en muy pocas ocasiones se pueden presentar diagnósticos apoyados en la probabilidad subjetiva, cuando los fenómenos estudiados sean producto de experimentos repetitivos. Una última consideración sobre este enfoque, es que la probabilidad representa *un grado de creencia sobre el suceso de una afirmación*, en el ámbito de un *juicio personal*, que lleva una enorme carga de intuición, experiencia y sentimiento. Son posibles ciertas variaciones, en mayor o menor grado, al consultar a dos o más expertos sobre un mismo problema. No obstante, en campos como la alta gerencia, la mercadotecnia, la milicia, la innovación tecnológica, planeación económica, la política, la medicina, la educación, entre otros; acuden los niveles directivos a la consulta de expertos para la búsqueda de las soluciones más acertadas y oportunas a problemas generales y específicos que surgen en sus diferentes competencias.

Ejemplo: De acuerdo a las condiciones climáticas que percibo, casi estoy seguro (90%) de que lloverá hoy.

Ejemplo: Considerando la recaudación hacendaría, la producción industrial y de servicios del país, el incremento previsto de sus exportaciones, el control de la deuda externa, el ambiente de inseguridad interna y el problema de la crisis económica internacional; existe en los analistas del sector financiero mexicano una estimación optimista mayor al 80%, de que la paridad peso – dólar no sobrepasará la relación 20: 1, durante el periodo 2009 – 2011.

2.2 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

La probabilidad se formaliza a través de un conjunto de axiomas y teoremas, sobre conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

2.2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD.

Axioma 1: $P(A) \geq 0$ La probabilidad del evento A siempre es positiva.

Axioma 2: $P(S) = 1$ La probabilidad del evento seguro es igual a uno. La posibilidad de que suceda cualquier resultado del espacio de eventos es igual a la unidad.

Ejemplo: En el experimento de arrojar un dado, el espacio muestral es: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilidad de que el resultado esté dentro del intervalo $[1, 6]$ es uno; $P(S) = 1$
A partir de estos axiomas se deriva la siguiente conclusión, si **A** es un evento cualquiera del espacio muestral de un experimento incluyendo el evento vacío y el evento seguro, la probabilidad de **A** se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

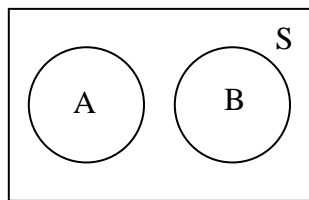
Esto es, la probabilidad de un evento cualquiera, no puede tomar un valor menor de cero ni mayor a uno.

Ejemplo: Evento A cae número primo, en el experimento de arrojar un dado.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 3, 5\}, \quad P(A) = \frac{3}{6} = 0.50$$

Axioma 3: Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset$$

Figura 8

Generalizando, para cualquier número finito K de eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K) = P\left(\bigcup_{i=1}^K A_i\right) = \sum_{i=1}^K P(A_i)$$

Así también, para un número infinito de eventos, en las mismas condiciones, que son excluyentes uno a uno:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K \cup \dots) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ejemplo: Se lanza un dado legal, sea $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{\text{números noes menores o iguales a tres}\}$.

Obtener la probabilidad de $A \cup B$:

Solución:

Eventos $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 3\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

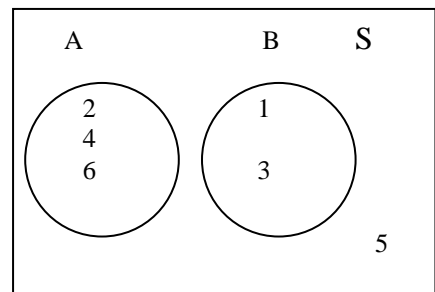


Figura 9

Obsérvese que: $P(A \cup B)^c = P(S) = \frac{1}{6}$ y $P[(A \cup B) \cup (A \cup B)^c] = P(S) = 1$

2.2.2 TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD

Teorema 1: La probabilidad del evento vacío (o imposible) es igual a cero: $P(\emptyset) = 0$

Demostración: Para cualquier evento A : $A = A \cup \emptyset$

Así también: A y \emptyset son mutuamente excluyentes, pues no tienen elementos en común.

Ahora, si se considera el Axioma 3:

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$\therefore P(\emptyset) = 0 \quad \text{L.Q.Q.D}$$

Teorema 2: Si A^c es el evento complemento de A , entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Demostración: Del diagrama de Venn $S = (A \cup A^c)$

A y A^c son eventos excluyentes y colectivamente exhaustivos. Considerando los axiomas 2 y 3

$$P(S) = P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

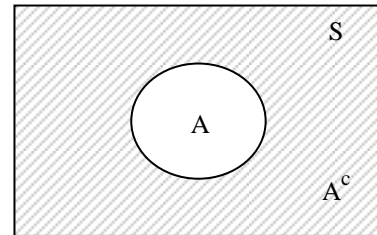


Figura 10

La expresión demostrada anteriormente es muy útil, se le conoce también como *probabilidad del complemento*.

Ejemplo: En el experimento de arrojar un dado se definen los eventos siguientes:

Evento A cae par $A = \{2, 4, 6\}$ y evento B cae impar $B = \{1, 3, 5\}$. Calcular $P(A \cup B)$

Solución: $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = S$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Ejemplo: En un almacén hay diez llantas de determinada medida para camión, cuatro de ellas tienen defectos, que no se aprecian a simple vista, un conductor de un camión entra al almacén para tomar al azar cuatro de ellas, ¿Qué probabilidad hay de que al menos (como mínimo), tome una defectuosa?

Solución: Partiendo de que el chofer puede tener $n(s) = C_4^{10} = 210$ formas diferentes de tomar las cuatro llantas de las diez disponibles; el evento de este problema se puede enunciar:

$A = \{\text{Toma una o toma dos o toma tres o toma cuatro llantas defectuosas}\}$

$A_1 = \{\text{Toma una llanta defectuosa y tres en buen estado}\}$

$A_2 = \{\text{Toma dos llantas defectuosas y dos en buen estado}\}$

$A_3 = \{\text{Toma tres llantas defectuosas y una en buen estado}\}$

$A_4 = \{\text{Toma cuatro llantas defectuosas y ninguna en buen estado}\}$

Entonces: $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

Tomando en cuenta el Axioma 3, en virtud de que A_1, A_2, A_3 y A_4 son mutuamente excluyentes

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$

entre sí:

$$P(A) = \frac{C_1^4 C_3^6}{C_4^{10}} + \frac{C_2^4 C_2^6}{C_4^{10}} + \frac{C_3^4 C_1^6}{C_4^{10}} + \frac{C_4^4 C_0^6}{C_4^{10}} = \frac{80}{210} + \frac{90}{210} + \frac{24}{210} + \frac{1}{210} = \frac{195}{210} = 0.9286$$

Ahora, si se considera el Teorema 2 de la probabilidad de complemento, entonces:

$A^c = \{ \text{Toma cero llantas defectuosas y cuatro en buen estado} \}$

Por lo tanto:

$$P(A^c) = \frac{C_0^4 C_4^6}{C_4^{10}} = \frac{15}{210} = 0.07142$$

Finalmente $P(A) = 1 - P(A^c)$

$$P(A) = 1 - \frac{15}{210} = \frac{195}{210} = 0.9286$$

Que es el mismo resultado, pero se obtiene con un menor número de operaciones.

Teorema 3: Si A y B son dos eventos no mutuamente excluyentes, esto es $A \cap B \neq \emptyset$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

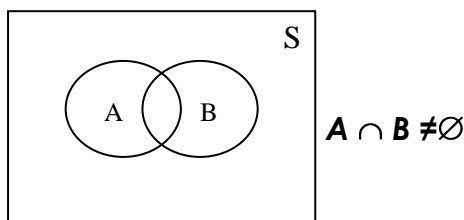


Figura 11

Anteriormente se definió la unión de dos eventos, como los elementos que hay en ambos sin repetirse (excluyentes), ahora habrá de tratarse el caso cuando en A y B hay elementos comunes (no excluyentes) esto es $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, donde $n(A \cup B)$ es el número de elementos de la unión de A y B , $n(A)$ el número de elementos de A , $n(B)$ el número de el elemento de B , por último $n(A \cap B)$ el número de elementos de la intersección de A y B , si a ambos miembros de la igualdad los dividimos entre $n(S)$ (número de elementos del espacio de eventos) y aplicamos el concepto de probabilidad $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ tenemos lo que se conoce como *Ley de adición de probabilidades*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: Considerando un diagrama de Venn.

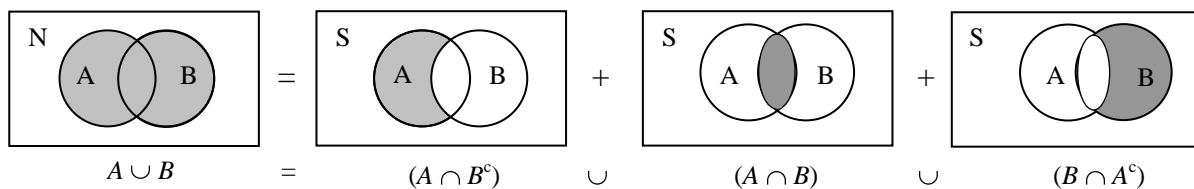


Figura 12

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

Recordando que: A^c es complemento de A y B^c es complemento de B , del diagrama tenemos:

$$n(A \cup B) = n(A \cap B^c) + n(A \cap B) + n(B \cap A^c)$$

también del diagrama se puede observar que:

$$n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B) \quad \text{y} \quad n(B \cap A^c) = n(B) - n(A \cap B)$$

sustituyendo en la anterior expresión tenemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

dividiendo entre $n(S)$ y aplicando el concepto de probabilidad nos queda:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Ejemplo: En el experimento de arrojar un dado se definen los eventos: A cae número primo $A=\{2, 3, 5\}$, B cae número par $B=\{2, 4, 6\}$ y C cae número mayor o igual a cinco $C=\{5, 6\}$

Solución: $n(S) = 6, \quad n(A) = 3, \quad n(B) = 3, \quad n(C) = 2$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.8333 \quad 83.33\%$$

$$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0.6666 \quad 66.66\%$$

$$P(B \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0.6666 \quad 66.66\%$$

Ejemplo: En un grupo de probabilidad hay 35 hombres de los cuales 5 están becados y 15 mujeres entre ellas 2 tienen beca. Si el profesor elige a un alumno al azar, de la lista de clase, para que pase al pizarrón.

Obtener la probabilidad de que:

- Sea hombre
- Sea mujer y está becada
- Sea mujer no becada
- Sea mujer u hombre, pero becado éste último

Solución:

Eventos: $A = \{\text{mujer}\}$; $A^c = \{\text{hombre}\}$; $B = \{\text{con beca}\}$

Datos: $P(A) = \frac{15}{50}$; $P(B) = \frac{7}{50}$

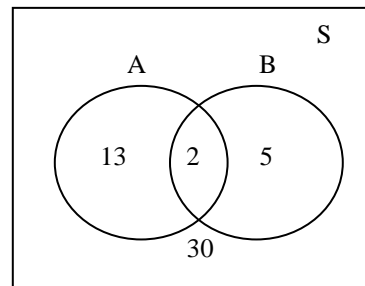


Figura 13

a) Del Teorema 2:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{50} = \frac{35}{50}$$

$$b) P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{50}$$

$$c) P(A \cap B^c) = \frac{n(A \cap B^c)}{n(S)} = \frac{13}{50}$$

$$d) P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B) = \frac{15}{50} + \frac{5}{50} = \frac{20}{50}$$

Otra forma, aplicando el Teorema.:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{50} + \frac{7}{50} - \frac{2}{50} = \frac{20}{50}$$

Asimismo, si se tienen los eventos A, B y C no mutuamente excluyentes (figura 14), el Teorema 3, se expresa:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Demostración:

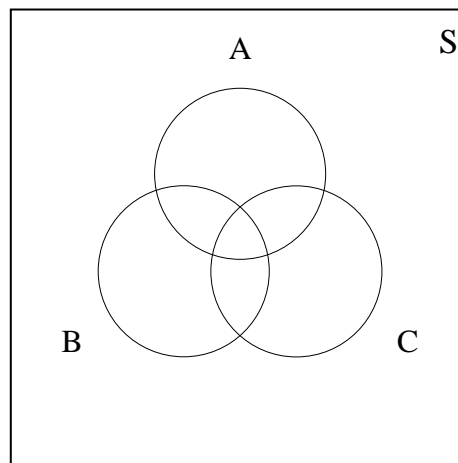


Figura 14

Considerando $(A \cup B)$ como un solo evento tenemos que

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]$$

desarrollando el sustraendo $n[(A \cup B) \cap C]$ y dentro de el $n[(A \cup B)]$.

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap B) \cup (B \cap C)]$$

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- [n(A \cap B) + n(B \cap C) - n(A \cap B) \cap (B \cap C)]$$

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Aplicando probabilidad tenemos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: En el experimento de arrojar un dado se definen los eventos siguientes:
 A cae par $A = \{2, 4, 6\}$, B cae impar $B = \{1, 3, 5\}$ y C cae número primo $C = \{2, 3, 5\}$.
 Demostrar que: $P(A \cup B \cup C) = 1$

Solución:

$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6}, \quad P(C) = \frac{3}{6}, \quad P(A \cap B) = 0,$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}, \quad P(B \cap C) = \frac{2}{6} \quad \text{y} \quad P(A \cap B \cap C) = 0$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{0}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{0}{6} = \frac{9}{6} - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

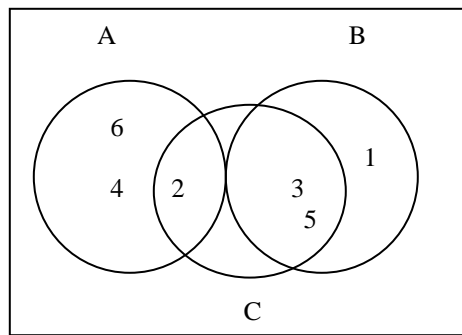


Figura 15

De manera general:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i < j=2}^k P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < t=3}^k P(A_i \cap A_j \cap A_t) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k)$$

Teorema 4: Si $A \subset B$, entonces: $P(A) \leq P(B)$

Demostración: del diagrama de Venn

$$B = A \cup (B \cap A^c)$$

Por el axioma 3:

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

Por el axioma 1: $P(B \cap A^c) \geq 0$

$$\therefore P(B) \geq P(A) \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

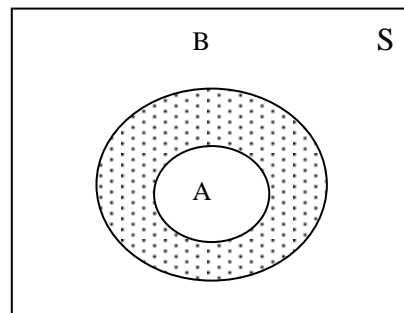


Figura 16

2.2.3 ESPACIOS EQUIPROBABLES Y NO EQUIPROBABLES

Cuando en un experimento existe la misma probabilidad de que pueda ocurrir cualquiera de los resultados posibles se le conoce como *Espacio Equiprobable* y cuando los resultados pueden suceder con diferente probabilidad se les denomina *Espacio No Equiprobable*, siendo éstos últimos los más comunes.

Ejemplo: En un grupo hay seis niños; tres de ojos claros y tres de ojos oscuros. Si se selecciona al azar uno de ellos por el profesor para realizar cierta actividad, ¿Qué probabilidad hay de que el elegido tenga los ojos claros?

Solución: Como hay tres niños de ojos claros de seis posibles, entonces la probabilidad de que el elegido tenga esta característica es:

$$P(\text{niño de ojos claros}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.50$$

O visto de otra manera, existe la misma probabilidad (Espacio Equiprobable) de elegir en este experimento aleatoriamente un niño de ojos de cualquiera de los dos colores.

Ejemplo: Por registros estadísticos de un supermercado, el 20 % de los consumidores pagan sus compras de bienes con tarjeta de crédito, el 70 % lo hace con dinero en efectivo y el resto, con vales de despensa de alguna institución. En la fila de una caja están formadas las siguientes dos personas que pagarán sus compras, una después de la otra, ¿Qué probabilidad hay de que las dos paguen con dinero en efectivo?

Solución: Se trata de un espacio No Equiprobable, pues hay mayor probabilidad de que los compradores paguen con dinero en efectivo, que con tarjeta de crédito o vales de despensa.

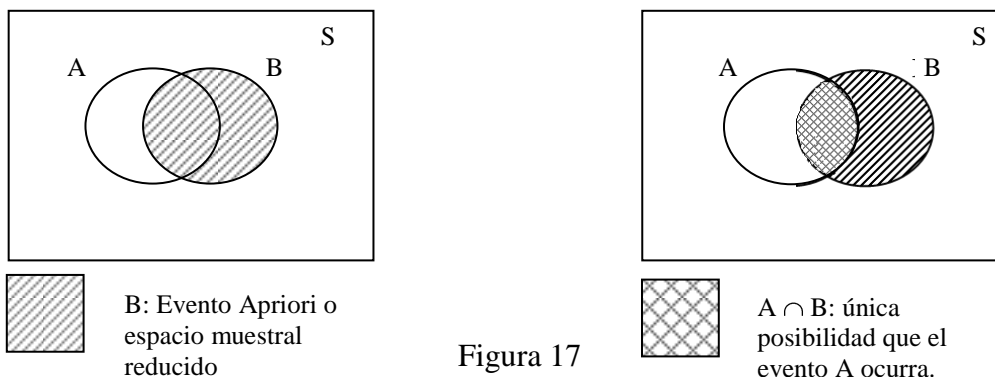
Considerando esta condición y aplicando el Teorema de la Multiplicación:

$$P(\text{los siguientes dos consumidores paguen con dinero en efectivo}) = 0.70 \times 0.70 = 0.49$$

2.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL, MARGINAL Y CONJUNTA

2.3.1 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Como su nombre lo indica se trata de determinar la probabilidad de que ocurra un evento A (evento aposteriori) dado que ya aconteció un evento B (evento apriori), y se representa mediante $P(A|B)$, se lee: probabilidad de A dado B o probabilidad de A condicionada a B.



En la probabilidad condicional, consideramos que de un espacio de evento S se conoce únicamente el evento B, que viene a constituir un *espacio muestral reducido*, y se desea saber la posibilidad de que exista el evento A, como únicamente conocemos el evento B, la probabilidad de que exista A esta dada por la posible intersección del evento A con el evento B, por lo tanto $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ donde $n(A \cap B)$ es el número de elementos en la intersección de los eventos A y B, $n(B)$ es el número de elementos en el evento B.

Si el numerador y denominador se dividen en $n(S)$ que es el número de elementos del espacio de eventos y aplicamos el concepto de probabilidad:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(B)$, es la probabilidad del evento condición.

De manera similar, se puede solicitar la probabilidad del evento B dado que ya ocurrió el evento A.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ahora el evento condición es A y la probabilidad de éste es el denominador del anterior cociente.

Ejemplo: Se lanzan un par de dados, uno después del otro. Si la suma de los dos números que aparecen es seis, ¿qué probabilidad existe de que al menos en el par de valores salga una vez el número dos?

Solución: $S = \{(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) \dots (6,6)\}$ $n(S) = 36$

Evento Aposteriori: $A = \{\text{sale el dos al menos una vez}\}$

Evento Apriori: $B = \{\text{La suma de los números que aparecen es seis}\}$

$A = \{(1,2) (2,1) (2,2) (2,3) (3,2) (2,4) (4,2) (2,5) (5,2) (2,6) (6,2)\}$ $n(A) = 11$

$B = \{(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)\}$ $n(B) = 5$

$(A \cap B) = \{(2,4) (4,2)\}$ $n(A \cap B) = 2$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5} = 0.40, \quad \text{o bien } 40\%$$

2.3.2 PROBABILIDAD CONJUNTA

Es la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos simultáneamente.

De la expresión de probabilidad condicional se puede despejar $P(A \cap B)$ y presentarse de la forma siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A) \quad \text{o bien} \quad P(A \cap B) = P(B) P(A | B)$$

Llamada *Ley de multiplicación condicional de probabilidades*.

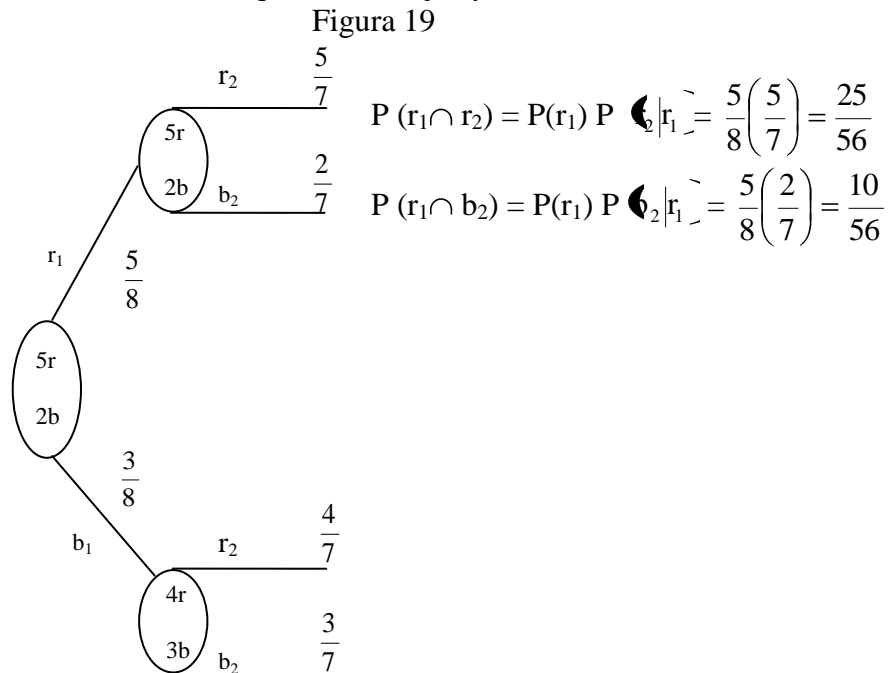
$P(A \cap B)$ recibe el nombre de *Probabilidad Conjunta* y corresponde a la probabilidad de que se presenten resultados comunes a dos eventos.

Ejemplo: Una caja contiene 5 cubos rojos y 3 blancos, en una segunda caja se tienen 4 cubos rojos y 2 blancos. De la primera caja se saca un cubo y se coloca en la segunda caja, después de la segunda caja se saca un cubo y se observa el color. Determinar la probabilidad de que el cubo que se saca de la segunda caja sea blanco.



Figura 18

Para el cálculo nos auxiliaremos con un diagrama de árbol, como se muestra en la figura 19, si el cubo que se pasa a la segunda caja es rojo, en esta quedarán 5 rojos y 2 blancos; si el cubo que se pasa a la segunda caja es blanco, en esta quedarán 4 rojos y 3 blancos.



De estas posibilidades interesa que al sacar el segundo cubo sea blanco, sin importar de qué color haya sido el cubo que se cambió de la primera a la segunda caja, por lo tanto.

$$P(r_1 \cap b_2) + P(b_1 \cap b_2) = \frac{10}{56} + \frac{9}{56} = \frac{19}{56} = 0.3393 \quad \text{o bien} \quad 33.93\%$$

2.3.3 PROBABILIDAD MARGINAL

Para obtener expresiones útiles para el cálculo de este tipo de probabilidades, se hará con el apoyo de un ejemplo específico, considérese el siguiente: En un taller mecánico tienen un total de 135 desatornilladores, los técnicos atribuyen a éstos dos características, cuando se los piden a sus ayudantes, su longitud (largos o cortos) y la forma de la punta que embona en los tornillos (plana o de cruz); la distribución es la siguiente:

Evento	A ₁	A ₂	Total
B ₁	40	60	100
B ₂	15	20	35
Total	55	80	135

A ₁	Largo
A ₂	Corto
B ₁	Punta plana
B ₂	Punta de cruz

Para determinar una probabilidad conjunta, digamos cortos con punta plana, de acuerdo con la tabla, es el cociente $60/135 = 0.4444$, que se obtuvo al dividir el número del número de desatornilladores cortos y que tienen punta plana, en términos matemáticos esto se expresa:

$$A_2 \cap B_1 = n_{21} = 60, \text{ entre el total de todos los desatornilladores del taller considerados} \\ n = 135$$

Generalizando se obtiene la *Probabilidad Conjunta* de dos eventos con la expresión siguiente:

$$P(A_i \cap B_j) = \frac{n_{ij}}{n(s)} \text{ donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Considérese que únicamente nos interesa conocer la probabilidad de los eventos B_j, sin tomar en cuenta cualquier otro evento del espacio S. Haciendo uso de la interpretación frecuentista de la probabilidad de escoger un desatornillador con punta plana, se considera tanto a los cortos como a los largos $n_{11} + n_{21}$, esto es la probabilidad marginal de B₁ (punta plana) de tal forma que:

$$P(B_1) = \frac{n_{11} + n_{21}}{n(s)} = \frac{40 + 60}{135} = 0.74$$

Se observa que el subíndice correspondiente al evento B permanece constante en la suma $n_{11} + n_{21}$

Generalizando, La *Probabilidad Marginal* de cualquier evento B_j puede calcularse:

$$P(B_j) = \frac{\sum_{i=1}^n n_{ij}}{n(s)}, \text{ pero } \frac{n_{ij}}{n(s)} = P(A_i \cap B_j), \text{ por lo que:}$$

$$\text{Probabilidad Marginal de los eventos } B_j: \quad P(B_j) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B_j)$$

En otras palabras la probabilidad de un evento B_j es igual a la suma de probabilidades conjuntas del evento B_j y los eventos A_i , la suma se realiza sobre todos los eventos A_i .

También se puede determinar la probabilidad marginal de cualquier evento

$$A_i: \quad P(A_i) = \sum_{j=1}^n P(A_i \cap B_j),$$

En este caso la suma es sobre todos los eventos B_j .

Se puede demostrar que la suma de las probabilidades marginales de los eventos A_i , o de los eventos B_j , es igual a 1, como se muestra a continuación:

$$P(A_1) = \frac{55}{135} = 0.4075 \quad \text{y} \quad P(A_2) = \frac{80}{135} = 0.5925$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \sum_{i=1}^2 P(A_i) = 0.4075 + 0.5925 = 1$$

$$P(B_1) = \frac{100}{135} = 0.74 \quad \text{y} \quad P(B_2) = \frac{35}{135} = 0.26$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \sum_{j=1}^2 P(B_j) = 0.74 + 0.26 = 1$$

2.3.4 PROBABILIDAD DE EVENTOS INDEPENDIENTES

Regresando a la expresión de probabilidad conjunta $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$. Si los eventos A y B son independientes entre sí, esto significa, que la ocurrencia de uno no depende de la ocurrencia del otro, por lo tanto la probabilidad condicional sería igual a la probabilidad de que ocurra cualquier evento $P(B|A) = P(B)$ y $P(A|B) = P(A)$ sustituyendo en la expresión de probabilidad conjunta, tenemos $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, siempre y cuando A y B sean *Eventos Independientes entre sí*. Denominada *Ley de la Multiplicación de Eventos Independientes*.

Ejemplo: Se arroja una moneda tres veces, determinar la probabilidad de que los resultados sean 2 águilas y 1 sol en este orden.

Solución: Para el primer volado la probabilidad de que sea águila es 0.5, para el segundo volado la probabilidad de que sea águila otra vez es 0.5, ya que este segundo volado no depende del resultado que se obtuvo en el primero y para el tercer volado la probabilidad de que sea sol es 0.5, ya que este último volado no depende de los resultados que se tuvieron en los dos anteriores, por lo tanto.

$$P(A \cap A \cap S) = (0.5)(0.5)(0.5) = 0.125 \quad \text{ó bien } 12.5\%$$

Ejemplo: En una Olimpiada compiten tres arqueros para la final, la probabilidad de que den en el blanco son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$. Si la final se resuelve con sólo un tiro de parte de cada uno de los arqueros:

- Calcular la probabilidad de que sólo uno de ellos de en el blanco.
- Hallar la probabilidad de que los dos primeros den en el blanco y el tercero no.
- Ninguno de los arqueros de en el blanco,

Solución:

a) Si $i = 1, 2, 3$ es el orden de los tiros al blanco, se establecen los siguientes eventos:

$A = \{ \text{Sólo un arquero da en el blanco} \}$

$A_i = \{ \text{El arquero } A_i \text{ da en el blanco} \}$

$A_i^c = \{ \text{El arquero } A_i \text{ no da en el blanco} \}$

$$P(A) = P[(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)]$$

Como los eventos A_i son independientes entre sí:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{17}{36} = 0.4722$$

b) $B = \{ \text{El primer y segundo arqueros dan en el blanco y el tercero falla} \}$

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1)P(A_2)P(A_3^c)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{36} = 0.1388$$

c) $C = \{ \text{El primer y segundo y el tercer arquero fallan} \}$

$$P(C) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{10}{36} = 0.277$$

2.3.5 APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA DE EVENTOS A LA TEORÍA DE SISTEMAS

En este estudio se considerará un sistema a un conjunto de elementos A_i (donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$), que interactúan entre sí, y cumplen con un propósito.

En ingeniería encontramos sistemas eléctricos, electrónicos, hidráulicos, mecánicos, urbanos, ambientales, entre muchos más.

Sistemas en serie. Son aquellos que funcionan en línea. En este tipo de sistemas si un elemento no funciona el *sistema no funciona*.

Para calcular la probabilidad de que un *sistema funcione* $P(F)$ debe contarse con la probabilidad de que funcione de manera independiente cada uno de los componentes A_i y, aplicarse los conceptos, principios, axiomas y teoremas de la Teoría de la Probabilidad, hasta ahora tratados.

Ejemplo: En una serie de focos (A_i), se tienen las probabilidades de que funcionen, de manera independiente, cada uno de ellos como se indica en el diagrama. Considérese X como la *fuerza* de energía y Z como *destino* de la misma. Los componentes A_i están ligados por líneas de conducción, para integrar el sistema en cuestión.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no funcione?

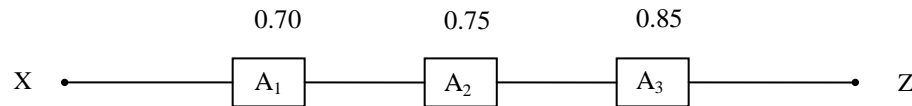


Figura 20

Solución:

Eventos: $F = \{ \text{El sistema funciona} \}$ $F^c = \{ \text{El sistema no funciona} \}$
 $A_i = \{ \text{El } i\text{-ésimo componente funciona} \}$ donde $i = 1, 2, 3$
 $A_i^c = \{ \text{El } i\text{-ésimo componente no funciona} \}$

- $P(F) = P(\text{funcione el componente } A_1 \text{ y funcione el componente } A_2 \text{ y funcione el componente } A_3)$
 $P(F) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$
 $P(F) = 0.70(0.75)(0.85) = 0.4462$

- $P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - 0.4462 = 0.5538$

Sistemas en paralelo. Como su nombre lo indica los componentes A_i están colocados en posición paralela. En este caso si un elemento o varios de ellos no funcionan, el sistema sí puede funcionar. Sólo hay un caso en el que el sistema no funciona, es cuando todos los componentes no funcionan.

Ejemplo: Sea el siguiente sistema electrónico en paralelo, cuyas componentes tienen la probabilidad de funcionar, de manera independiente, como se muestra

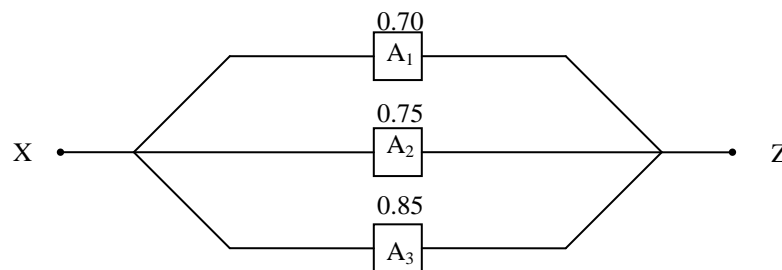


Figura 21

Solución:

$$P(F) = P(\text{funcione el sistema})$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P(F) = 0.70 + 0.75 + 0.85 - (0.70)(0.75) - (0.70)(0.85) - (0.75)(0.85) + (0.70)(0.75)(0.85)$$

$$P(F) = 0.9887$$

De otra forma, utilizando un diagrama de árbol:

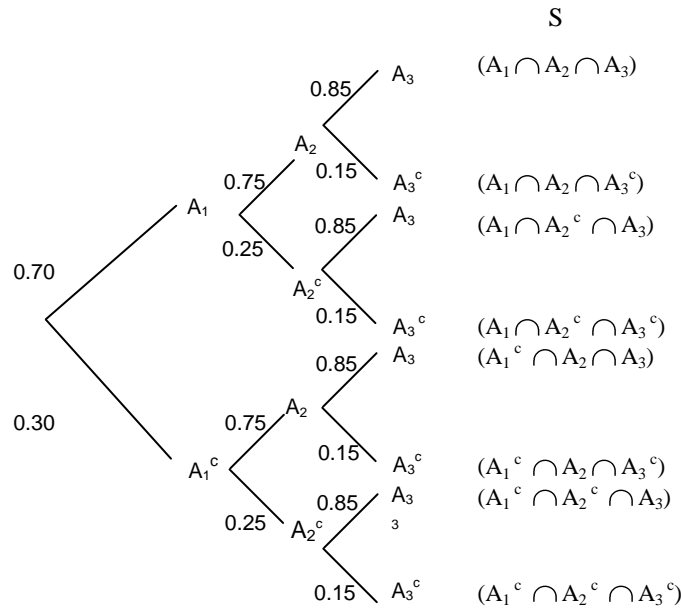


Figura 22

Como puede observarse, en todos los resultados al menos un componente funciona, y por tanto el sistema funciona; con excepción del último resultado.

Por tanto:

$$P(F) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - (0.3)(0.25)(0.15)$$

$$P(F) = 0.9887$$

Ejemplo: Sea el sistema de riego que se muestra en el diagrama con cuatro compuertas. Las compuertas A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) funcionan, para abrirse automáticamente y permitir el paso del agua, con las probabilidades que se indican en el mencionado diagrama.

- a) Calcular la probabilidad de que el sistema funcione
- b) Obtener la probabilidad de que el sistema sólo funcione con dos componentes.

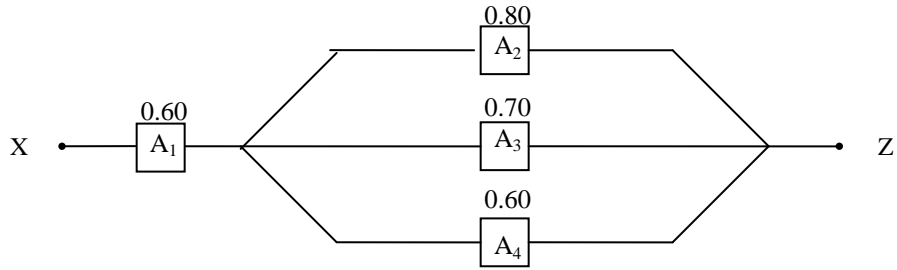


Figura 23

Solución:

Eventos: $F = \{ \text{El sistema funciona} \}$

$A_i = \{ \text{La } i\text{-ésima compuerta funciona} \}$

$A_i^c = \{ \text{La } i\text{-ésima compuerta no funciona} \}$

donde $i = 1, 2, 3, 4$

a) Primer método: utilizando un diagrama de árbol

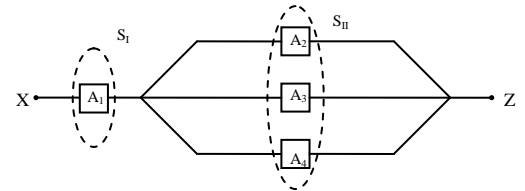


Figura 24

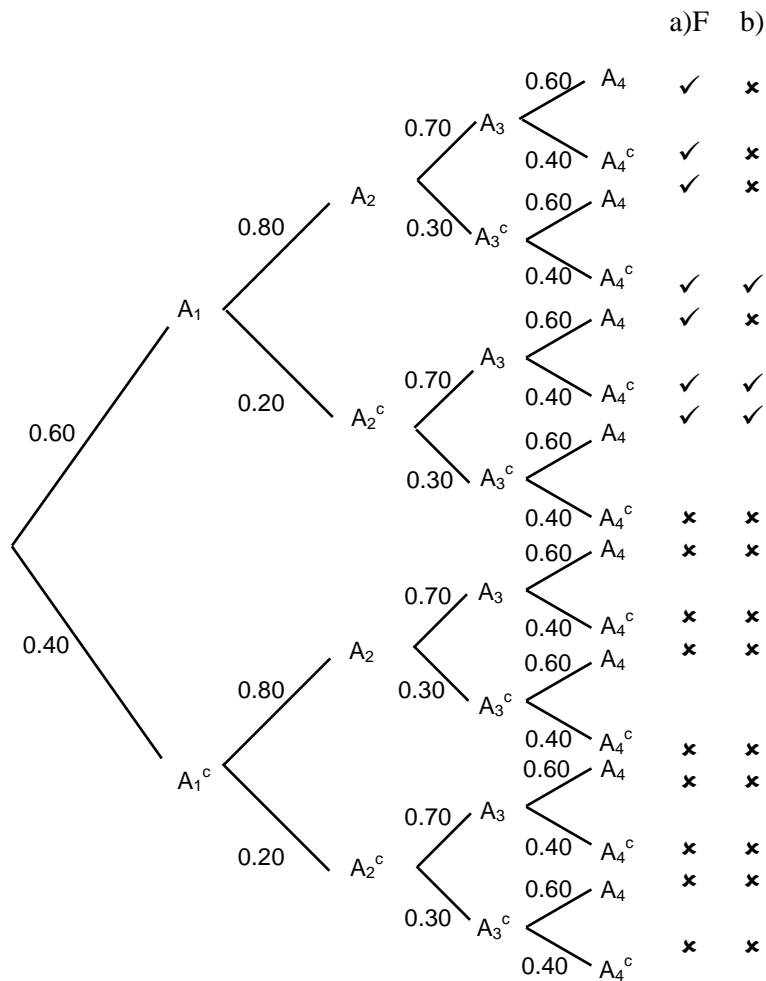


Figura 25

$$\begin{aligned}
P(F) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) \\
&\quad \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) \\
&\quad \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4)] \\
P(F) &= (0.60)(0.80)(0.70)(0.60) + (0.60)(0.80)(0.70)(0.40) + (0.60)(0.80)(0.30)(0.60) + \\
&\quad + (0.60)(0.80)(0.30)(0.40) + (0.60)(0.20)(0.70)(0.60) + (0.60)(0.20)(0.70)(0.40) + \\
&\quad + (0.60)(0.20)(0.30)(0.60) = 0.5856
\end{aligned}$$

Según método: Considerando los subsistemas S_I y S_{II} en serie figura 24

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(S_I \cap S_{II}) = P[A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)] \\
&= P(A_1) [P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_2)P(A_3) - P(A_2)P(A_4) - P(A_3)P(A_4) + P(A_2)P(A_3)P(A_4)] \\
&= 0.60 [0.80 + 0.70 + 0.60 - 0.80(0.70) - 0.80(0.60) - (0.70)(0.60) + (0.80)(0.70)(0.60)] \\
&= 0.5856
\end{aligned}$$

Tercer método: Considerando los subsistemas S_{III} , S_{IV} y S_V en paralelo (figura 26)

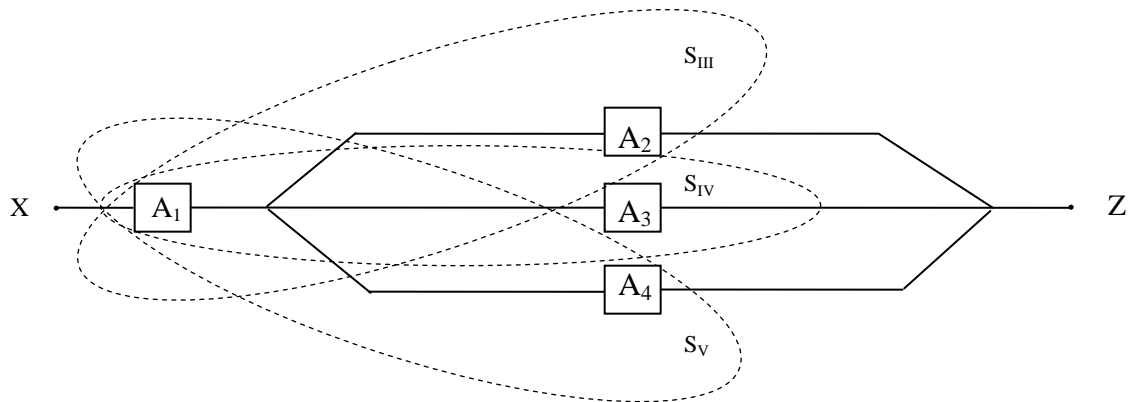


Figura 26

$$\begin{aligned}
P(F) &= P[S_{III} \cup S_{IV} \cup S_V] \quad S_{III} = (A_1 \cap A_2), \quad S_{IV} = (A_1 \cap A_3), \quad S_V = (A_1 \cap A_4) \\
P(F) &= P[A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)] \\
&= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4) - P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)] - P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_4)] \\
&\quad - P[(A_1 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_4)] + P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)] \\
&= 0.60(0.80) + 0.60(0.70) + 0.60(0.60) - (0.60)(0.80)(0.70) - (0.60)(0.80)(0.60) \\
&\quad - (0.60)(0.70)(0.60) + 0.60(0.80)(0.70)(0.60) = 0.5856
\end{aligned}$$

b) Revisando el diagrama de árbol:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(\text{El sistema funciona con dos compuertas}) \\
&= P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4)] \\
&= 0.60(0.80)(0.30)(0.40) + (0.60)(0.20)(0.70)(0.40) + (0.60)(0.20)(0.30)(0.60) \\
&= 0.1128
\end{aligned}$$

2.3.6 PROBABILIDAD TOTAL

Consideremos un evento B y un conjunto de eventos A_i que son mutuamente excluyentes entre si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, es decir, si tomamos dos eventos diferentes de A_i su intersección es el evento vacío, además los eventos A_i son exhaustivos, $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$, la unión de todos ellos cubre el espacio de eventos S.

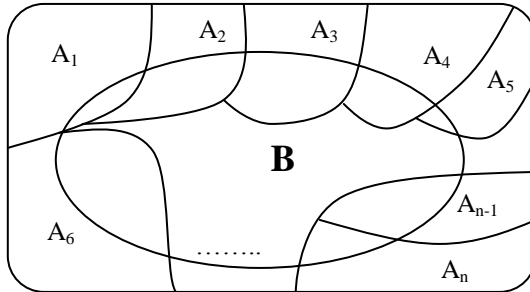


Figura 27

Para conocer el evento B a través de los eventos A_i , se tiene: $B = \bigcup_{i=1}^n A_i \cap B$, la unión de las intersecciones del evento B con los eventos A_i ,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \dots \dots \dots \cup (A_n \cap B)$$

Aplicando el concepto de probabilidad a ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) ; \quad \text{que recibe el nombre de Probabilidad Total.}$$

2.3.7 TEOREMA DE BAYES

Considérese ahora que se requiere conocer la probabilidad de A_k (cualquiera de los eventos A_i) dado que acontece apriori el evento B:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

Como: $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ y la probabilidad total

$$\text{de B: } P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

Esta última expresión se conoce como “Teorema de Bayes”, que establece la probabilidad de un evento en particular A_k , dado que ya sucedió el evento B, expresada en términos de la probabilidad condicional.

Ejemplo: En una escuela el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres tienen más de 1.80m de estatura. Además el 60% de los estudiantes son mujeres. Ahora bien, si se selecciona al azar un estudiante para que realice una función determinada en el “comité de seguridad” del plantel:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que sea uno con una estatura mayor de 1.8 m?
 b) ¿Qué probabilidad existe de que el estudiante sea mujer dado que tiene una estatura mayor de 1.80 m?

Solución:

Eventos: $A_1 = \text{Estudiante mujer}$
 $A_2 = \text{Estudiante hombre}$
 $B = \text{Estatura mayor de 1.8m}$

Datos: $P(A_1) = 0.60$
 $P(A_2) = 0.40$
 $P(B|A_1) = 0.01$
 $P(B|A_2) = 0.04$

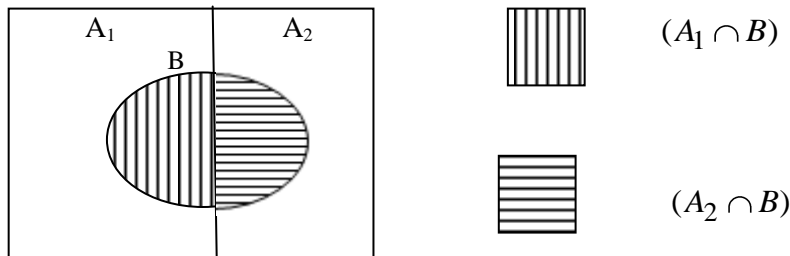


Figura 28

a) Probabilidad total de B:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$P(B) = 0.60(0.01) + (0.40)(0.04) = 0.022$$

El 2.2% de los estudiantes de la escuela miden más de 1.80 m. de estatura.

b) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.60(0.01)}{0.022}$$

$$P(A_1|B) = 0.2727$$

Ejemplo: Según un organismo internacional, con base en sus estadísticas, de cada diez niños que nacen en el mundo tres tienen aptitudes para las matemáticas y de cada cinco niñas dos la tienen. Si en una determinada región donde la población está compuesta por el 52% de mujeres y el resto de hombres, se elige una persona de manera aleatoria de ese lugar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte apta para las matemáticas?
 b) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre, dado que es apto para las matemáticas?
 c) En virtud de que es mujer ¿qué probabilidad hay de que no sea apta para las matemáticas?

Solución:

Eventos: $A_1 = \text{hombre}$
 $A_2 = \text{mujer}$
 $B = \text{persona apta para las matemáticas}$
 $B^c = \text{persona no apta para las matemáticas}$

Datos: $P(A_1) = 0.48$
 $P(A_2) = 0.52$
 $P(B|A_1) = 0.30$
 $P(B|A_2) = 0.40$

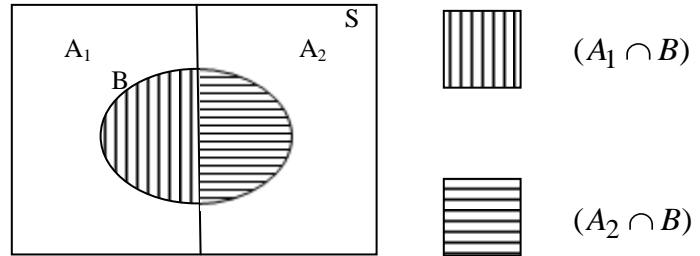


Figura 29

a) Probabilidad total de B:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$P(B) = 0.48(0.30) + (0.52)(0.40) = 0.352$$

El 35.2% de la población es apta para las matemáticas

b) Probabilidad de que sea hombre apto para las matemáticas.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.48(0.30)}{0.352} = \frac{0.144}{0.352}$$

$$P(A_1|B) = 0.4090$$

c) La probabilidad para sea mujer, pero no apta para las matemáticas

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.352 = 0.648$$

$$P(A_2|B^c) = \frac{P(A_2)P(B^c|A_2)}{P(B^c)} = \frac{0.52(0.60)}{0.648} = \frac{0.312}{0.648}$$

$$P(A_2|B^c) = 0.4812$$

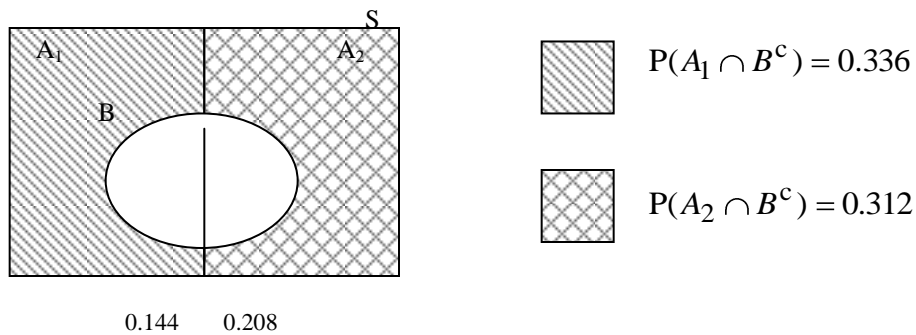


Figura 30

Ejemplo: La empresa “Integración Laboral” realiza selección de personal técnico para la industria de autopartes, para tal propósito aplica un cuestionario de 50 preguntas. Si el aspirante contesta 30 o más en forma correcta se clasifica como persona apta para el puesto que solicita y es contratado y enviado a una fábrica de esa rama industrial. Por registros de la empresa “Integración Laboral” se sabe que 74 de cada 100 aspirantes son clasificados como aptos para el puesto. Además se conoce por esos registros que el 80% de los aspirantes que proviene del Tecnológico Regional de la Zona (TRZ) son clasificados como aptos para el puesto solicitado. El sábado pasado acudieron al examen clasificatorio 32 personas, 19 de ellas egresadas del TRZ. En este momento una persona que realizó dicho examen clasificatorio se acerca para ver su resultado en la lista que está en el pasillo de la entrada de la empresa “Integración Laboral”:

¿Qué probabilidad existe de que sea un técnico que no estudió en el TRZ, dado que está clasificado como apto para el puesto?

¿Cuál es la probabilidad de que sea egresado del TRZ, en virtud de que no fue clasificado como apto para el puesto?

Solución:

Eventos: $A_1 = \text{Egresados del TRZ}$
 $A_2 = \text{No egresados del TRZ}$
 $B = \text{Clasificado apto para el puesto}$

Datos: $P(A_1) = \frac{19}{32} = 0.59375$
 $P(A_2) = \frac{13}{32} = 0.40625$
 $P(B) = 0.74$
 $P(B|A_1) = 0.80$

a) Probabilidad de que sea un técnico que no estudió en TRZ, dado que está clasificado apto para el puesto: $P(A_2|B)$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$0.74 = 0.59375(0.80) + 0.40625P(B|A_2)$$

$$\therefore P(B|A_2) = \frac{0.265}{0.40625} = 0.6523$$

Considerando el Teorema de Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.40625(0.6523)}{0.74} = 0.4076$$

b) Probabilidad de que sea un egresado de TRZ, dado que no fue clasificado como apto para el puesto: $P(A_1|B^c)$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.74 = 0.26$$

Considerando el Teorema de Bayes:

$$P(A_1|B^c) = \frac{P(A_1)P(B^c|A_1)}{P(B^c)}$$

$$\text{Como } P(B^c|A_1) = 0.2$$

$$P(A_1|B^c) = \frac{0.59375(0.2)}{0.26} = 0.4567$$

Ejemplo: Para llegar en automóvil al estacionamiento de la alberca olímpica de Ciudad Universitaria (C.U.), hay que utilizar alguna de las entradas vehiculares a C.U. cuyo porcentaje de ingreso vehicular es el siguiente: Universidad 3000 con 25%, Copilco 25%, Metro CU 20%, Insurgentes-Rectoría 15% e Insurgentes-Trabajo Social 15%. El flujo vehicular en las entradas se clasifica en rápido o lento y los porcentajes correspondientes a la rapidez son los que siguen: Universidad 3000 50%, Copilco 60%, Metro CU 65% y 70% para las entradas de la Av. Insurgentes. Si una persona llega sin problemas de tránsito a la alberca olímpica de CU. ¿Cuál es la probabilidad de que haya entrado por el Metro CU?

Solución:

Eventos: U-3000= Av. Universidad 3000

COP = Copilco

MCU = Metro CU

I-R = Insurgentes-Rectoría

I-T = Insurgentes-Trabajo Social

fr = flujo rápido

fl = flujo lento

$$P(\text{MCU}|\text{fr}) = \frac{P(\text{MCU} \cap \text{fr})}{P(\text{fr})}$$

$$P(\text{MCU}|\text{fr}) = \frac{0.2(0.65)}{0.25(0.5) + 0.25(0.6) + 0.2(0.65) + 0.15(0.7) + 0.15(0.3)}$$

$$P(\text{MCU}|\text{fr}) = \frac{0.13}{0.125 + 0.15 + 0.13 + 0.105 + 0.105} = \frac{0.13}{0.415}$$

$$P(\text{MCU}|\text{fr}) = 0.21138$$

$$P(\text{fr}) = P(\text{U} - 3000 \cap \text{fr}) + P(\text{COP} \cap \text{fr}) + P(\text{MCU} \cap \text{fr}) + P(\text{I} - \text{R} \cap \text{fr}) + P(\text{I} - \text{T} \cap \text{fr})$$

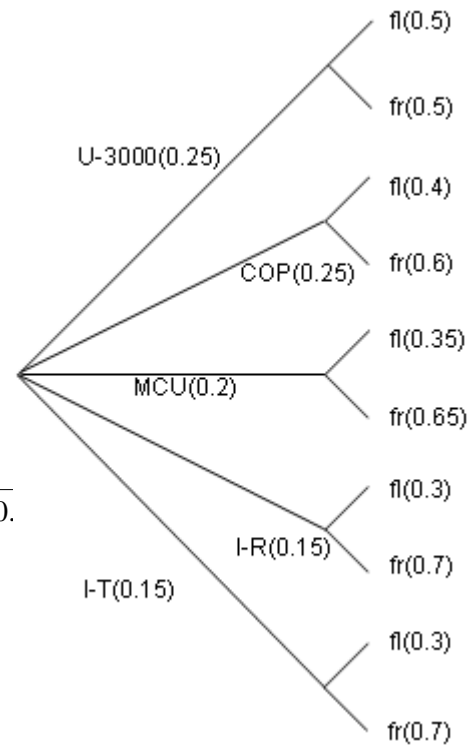


Figura 31

o bien: 21.138%

EJERCICIOS PROPUESTOS No. 2

2.1 En una asociación de ingenieros se tienen afiliados 38 nacionales, 25 de ellos titulados y, 12 extranjeros de éstos últimos 7 son titulados. El resto de los afiliados son pasantes. Por acuerdo de la asociación se elegirá un tesorero de manera aleatoria.

- Plantear el diagrama de Venn para este problema.
- Identifique los eventos del problema.
- ¿Qué eventos son mutuamente excluyentes y cuáles complementarios?
- Calcular la probabilidad de que se escoja una persona titulada.
- Calcular la probabilidad de que sea extranjero y no titulado.
- Obtener la probabilidad de que sea extranjero titulado o nacional.

2.2 En una colonia hay 40 amigos que estudian en la Facultad de Ingeniería y cursan coincidentemente 3 asignaturas: Álgebra (A), Biotecnología (B), Cálculo Integral (C). Se sabe que: 16 de estas personas llevan Álgebra, 18 llevan Biotecnología y 20 llevan Cálculo Integral; así también 5 de ellos llevan conjuntamente Álgebra y Biotecnología, 7 Álgebra y Cálculo Integral y sólo 3 de estos estudiantes cursan las tres asignaturas.

- ¿Cuántos llevan Biotecnología y Cálculo?
- Si se escoge un alumno de estos al azar:
 - ¿Qué probabilidad hay de que curse dos de estas tres materias?
 - ¿Qué probabilidad hay de que a lo más curse una de estas tres materias?

2.3 En una agencia automotriz se tienen cuatro tipos de automóviles de la misma marca: 20 compactos, 15 sedanes, 10 camionetas y 5 camiones. Se conoce que: 10 compactos, 12 sedanes, 5 camionetas y 2 camiones cuentan con aire acondicionado.

- Plantear el diagrama de Venn para este problema.
- Identificar todos los posibles eventos que están en el diagrama y transcribirlos al lenguaje del Algebra de Conjuntos.
- Calcular la probabilidad total del evento: automóvil con aire acondicionado.
- Si un inspector de la agencia selecciona al azar un vehículo para revisarlo y resulta ser una camioneta ¿cuál es la probabilidad de que tenga aire acondicionado?

2.4 En una urna se tienen 5 canicas blancas iguales y 3 rojas iguales. Se extraen por una persona 3 al azar de manera consecutiva. ¿Qué probabilidad hay de que:

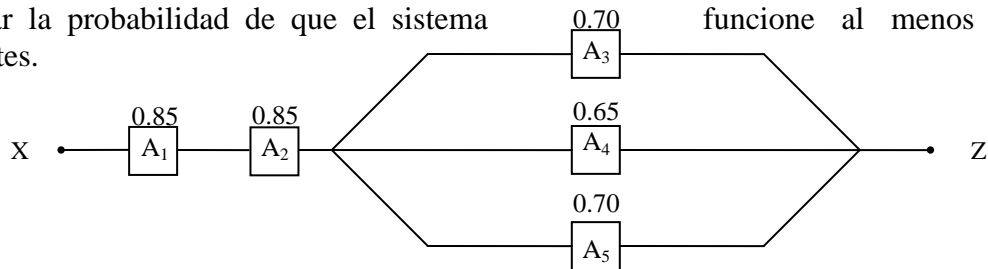
- Salgan tres rojas,
- Salga una roja y dos blancas,
- Salgan a lo más dos blancas?
- Resolver el inciso b), pero para 5 canicas blancas iguales y 3 rojas diferentes entre sí.

2.5 Un jugador recibe 3 cartas de una baraja de 52 cartas (sin comodines). ¿Qué probabilidad existe de que:

- Le lleguen 2 ases,
- Le lleguen 2 ases y un rey,
- Le lleguen 3 ases?

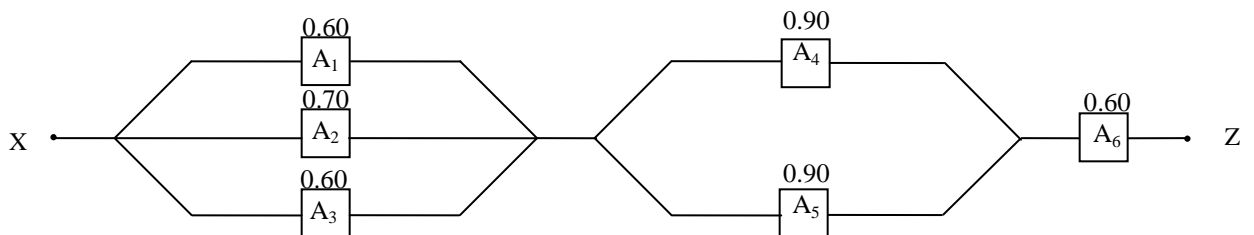
2.6 Considérese un sistema integrado por los componentes A_1 , A_2 , A_3 , A_4 y A_5 que funcionan de manera independiente, uno del otro, con probabilidad de que así sea como se indica en el diagrama:

- Calcular la probabilidad de que el sistema funcione.
- Calcular la probabilidad de que el sistema funcione al menos con cuatro componentes.



2.7 Sea el siguiente sistema eléctrico formado por seis componentes, con probabilidad de funcionar de manera independiente, cada uno de ellos, como se indica en el diagrama:

- Calcular la probabilidad de que el sistema funcione.
- Calcular la probabilidad de que al menos funcione con cuatro componentes.



2.8 En un grupo de Probabilidad y Estadística hay 15 mujeres y 35 hombres. De las mujeres sólo 3 rebasan los 1.70 m de estatura y en el caso de los hombres 25 de ellos lo superan. Si el profesor elige una persona de manera aleatoria para pasar al pizarrón:

- Obtener la probabilidad de que sea una persona con estatura mayor de 1.70 m.
- Calcular la probabilidad de que tenga una estatura menor a 1.70 m, si él decidió previamente que sea una mujer.

2.9 Una compañía automotriz fabrica tres tipos de coches: compacto (A_1) en un 50%, mediano (A_2) en un 30% y grande (A_3) en un 20%. Por registros estadísticos que ha seguido esta empresa se conoce que la probabilidad de que un automóvil se desvíele, antes de un año de uso, en cada categoría es de: 0.01, 0.02 y 0.03 respectivamente. A una persona que compró hace menos de un año un automóvil de esta marca se le desvíela y presenta una reclamación a la compañía. ¿Qué probabilidad hay de que:

- El automóvil sea un compacto,
- Que no sea ni compacto ni grande?

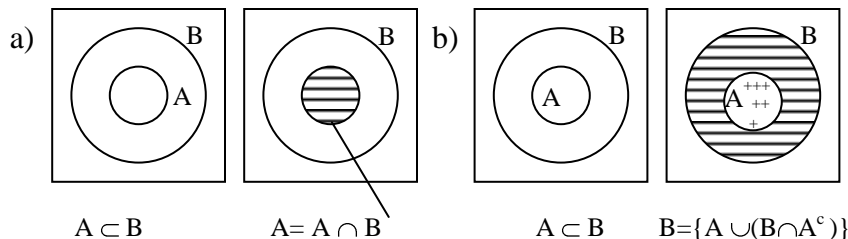
2.10 En un centro espacial se tienen 27 ingenieros, 12 con nivel de doctorado y los otros con nivel de maestría. Sólo diez de ellos, tres con maestría, según exámenes clínicos, por sus condiciones físicas pueden ser seleccionados para viajar en el próximo vuelo espacial alrededor de Marte. Si en una reunión a la que asisten los 27, uno de ellos manifiesta abiertamente su gran interés para ser considerado a viajar en el mencionado vuelo:

- Si se sabe que cuenta con las capacidades físicas específicas, ¿Qué probabilidad hay de que tenga un nivel de maestría?
- Si carece de las condiciones físicas requeridas, ¿Qué probabilidad existe de que sea una persona con nivel de doctorado?

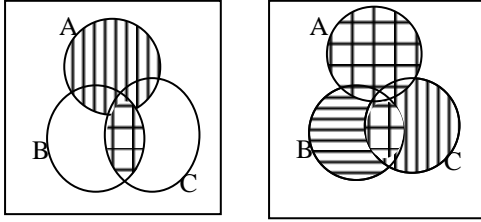
SOLUCIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS No. 1

- 1.1 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7, 9\}$
- $A^c \cap B = \{6\}$
 - $A^c \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 - $(A^c \cap B^c)^c = \{2, 4, 5, 6\}$
 - $[(A \cap B)^c \cap A]^c = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 - $[A \cup (B \cap C)^c]^c = \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$

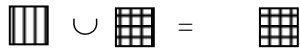
1.2 Apoyándose en diagramas de Venn...



c)



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



1.3 a) $n_A = P_{C_8} P_2^2 = 7! 2! = 10080$ formas

b) $n_B = P_2^2 P_1^1 P_7^7 = 2! 1! 7! = 10080$ formas

c) $n_C = P_5^5 P_1^1 P_4^4 = 5! 1! 4! = 2880$ formas

1.4 a) $n_S = P_{4,3}^7 = \frac{7!}{4! 3!} = 35$

b) $C = \{AABABAB, AABAABB, AAABBAB, AAABABB, AAAABBB\}$ $n_C = 5$

c) $D = \{AAABBAB, BBAAAAB, AABBAAB, ABBAAB, ABABAAB, BABAAAB, BAAABAB, BAABAAB, ABAABAB, AABABAB\}$, $n_D = 10$

c) Otra forma: $n_D = P_{3,2}^5 P_1^1 P_1^1 = \frac{5!}{3! 2!} = 10$

1.5 a) $S = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B ; a = 0, 1, 2, 3, 4 ; b = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $n_S = 30$

b) $C = \{(a, b) \mid a > b ; a = 1, 2, 3, 4, ; b = 0, 1, 2, 3\}$

$C = \{(1,0) (2,0) (2,1) (3,0) (3,1) (3,2) (4,0) (4,1) (4,2) (4,3)\}$, $n_C = 10$

c) $D = \{(a, b) \mid a + b = 5 ; a = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ } b = 1, 2, 3, 4, 5\}$

$D = \{(0,5) (1,4) (2,3) (3,2) (4,1)\}$, $n_D = 5$

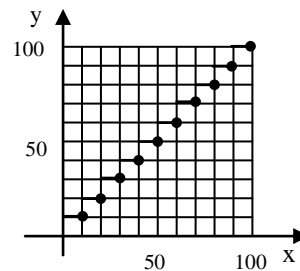
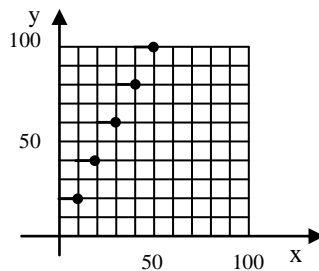
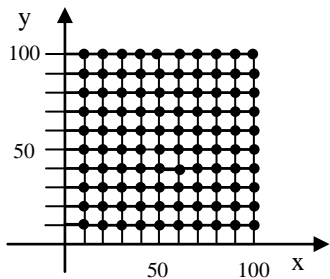
1.6 Un lote contiene...

a) $S = \{(x, y) \mid x = 10, 20, 30, \dots, 100 ; y = 10, 20, 30, \dots, 100\} = \{(10, 10) (10, 20) \dots (10, 100) (20, 10) \dots (100, 100)\}$

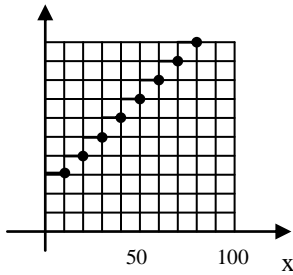
$n_S = 10 \times 10 = 100$

b) $B = \{(x, y) \mid y = 2x\}$; $n_B = 5$

c) $C = \{(x, y) \mid x = y\}$; $n_C = 10$



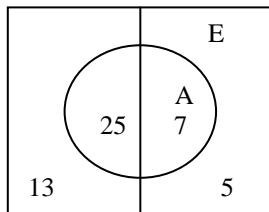
d) $D = \{(x,y) \mid x = y - 20\}$; $n_D = 8$



- 1.7 a) $n_A = \{8 \text{ ó } 9 \text{ ó } 10 \text{ preguntas bien contestadas}\} = \sum_{r=8}^{10} C_r^n = C_8^{10} + C_9^{10} + C_{10}^{10}$
 $n_A = 45 + 10 + 1 = 56$ formas $r =$ número de preguntas bien contestadas
- b) $n_B = \{\text{Las 3 primeras y 5 de las 7 restantes bien contestadas ó las 3 primeras y 6 de las 7 restantes bien contestadas ó las 3 primeras y 7 de las 7 restantes bien contestadas}\}$.
 $n_B = C_3^3 C_5^7 + C_3^3 C_6^7 + C_3^3 C_7^7 = 21 + 7 + 1 = \underline{29}$ formas
- c) $n_C = \{\text{Contesta bien 4 de las primeras 5 y 4 de las restantes 5 ó contesta bien 4 de las primeras 5 y 5 de las restantes 5}\}$
 $n_C = C_4^5 C_4^5 + C_4^5 C_5^5 = 25 + 5 = \underline{30}$ formas
- 1.8 a) $n_a = C_3^9 = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \underline{84}$
- b) $n_b = C_1^4 C_2^5 = 4 \times 10 = \underline{40}$
- c) $n_c = C_1^5 C_1^3 C_1^1 = 5 \times 3 \times 1 = \underline{15}$
- 1.9 a) $n_A = C_2^3 C_3^5 C_1^2 = 3 \times 10 \times 2 = \underline{60}$
- b) $n_B = C_1^3 C_3^5 C_2^2 = 3 \times 10 \times 1 = \underline{30}$
- c) $n_C = C_1^3 C_3^5 C_2^2 + C_1^3 C_4^5 C_1^2 + C_2^3 C_3^5 C_1^2 = 120$

SOLUCIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS No. 2

2.1 a)



- b) $N = \{\text{Nacionales}\}$
 $E = \{\text{Extranjeros}\}$
 $A = \{\text{Titulados}\}$
 $A^C = \{\text{No Titulados}\}$

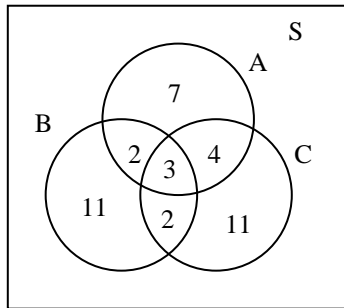
- c) $N \cap E = \emptyset$; N y E Son mutuamente excluyentes.
 $A \cap A^C = \emptyset$; A y A^C Son mutuamente excluyentes.
 $N \cup E = S$; N y E Son complementarios
 $A \cup A^C = S$; A y A^C Son complementarios

$$d) \quad P(A) = P[(A \cap N) \cup (A \cap E)] = P(A \cap N) + P(A \cap E) = \frac{n(A \cap N)}{n_{S_s}} + \frac{n(A \cap E)}{n_s} = \frac{25}{50} + \frac{7}{50} = 0.64$$

$$e) \quad P(E \cap A^c) = \frac{n(E \cap A^c)}{n_s} = \frac{5}{50} = 0.10$$

$$f) \quad P[N \cup (E \cap A)] = P(N) + P(E \cap A) = \frac{n(N)}{n_s} + \frac{n(E \cap A)}{n_s} = \frac{38}{50} + \frac{7}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

2.2 a)



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$1 = \frac{16}{40} + \frac{18}{40} + \frac{20}{40} - \frac{5}{40} - \frac{7}{40} - P(B \cap C) + \frac{3}{40}$$

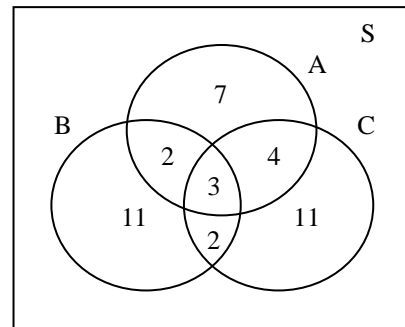
$$P(B \cap C) = \frac{5}{40} = 0.125 \quad ; \quad n(B \cap C) = 5$$

$$b.1) \quad P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] - P[(A \cap B) \cap (B \cap C)] - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] + P[(A \cap B) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C)] =$$

$$\frac{5}{40} + \frac{7}{40} + \frac{5}{40} - 3\left(\frac{3}{40}\right) + \frac{3}{40} = \frac{11}{40}$$

$$P(\text{Cursan 2 de esas materias}) = \frac{11}{40} - \frac{n(A \cap B \cap C)}{n_s}$$

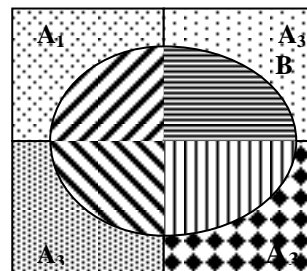
$$= \frac{11}{40} - \frac{3}{40} = \frac{8}{40} = 0.2000$$



$$b.2) \quad P(\text{Cursa ninguna ó una materia}) = \frac{7}{40} + \frac{11}{40} + \frac{11}{40} = \frac{29}{40} = 0.7250$$

2.3 En una agencia automotriz . . .

a)



$$b) \quad S = \{\text{Todos los automóviles de la agencia}\} ; n(S) = 50$$

$A_1 = \{Compactos\}$; $n(A_1) = 20$ $A_2 = \{Sedanes\}$; $n(A_2) = 15$
 $A_3 = \{Camionetas\}$; $n(A_3) = 10$ $A_4 = \{Camiones\}$; $n(A_4) = 5$
 $B = \{Vehículo con aire acondicionado\}$
 $B^c = \{Vehículo sin aire acondicionado\}$



$A_1 \cap B = \{Compacto con aire acondicionado\}$; $n(A_1 \cap B) = 10$



$A_2 \cap B = \{Sedán con aire acondicionado\}$; $n(A_2 \cap B) = 12$



$A_3 \cap B = \{Camioneta con aire acondicionado\}$; $n(A_3 \cap B) = 5$



$A_4 \cap B = \{Camión con aire acondicionado\}$; $n(A_4 \cap B) = 2$



$A_1 \cap B^c = \{Compacto sin aire acondicionado\}$; $n(A_1 \cap B^c) = 10$



$A_2 \cap B^c = \{Sedán sin aire acondicionado\}$; $n(A_2 \cap B^c) = 3$



$A_3 \cap B^c = \{Camioneta sin aire acondicionado\}$; $n(A_3 \cap B^c) = 5$



$A_4 \cap B^c = \{Camión sin aire acondicionado\}$; $n(A_4 \cap B^c) = 3$

c) $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B) = \frac{29}{50} = 0.58$

d) $P(B \mid A_3) = 0.50$

2.4 a) $P(A) = P(3 \text{ rojas}) = \frac{1}{56} = 0.01785$

b) $P(B) = \frac{30}{56} = 0.53571$

c) $P(C) = 1 - P(C^c) = \frac{46}{56} = 0.8214$

2.5 a) $P(A) = \{dos ases y cualquier otra\}$, $P(A) = \left(\frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{48}{50} \right) = 0.01303$

b) $P(B) = P\{Dos ases y un rey\}$; $P(B) = 3 \left(\frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{4}{50} \right) = 0.00108$

c) $P(C) = P\{Tres ases\}$; $P(C) = \frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{2}{50} = 0.00018$

Otra forma: $P(A) = \frac{C_2^4 C_1^{48}}{C_3^{52}} = 0.01303$

$$P(B) = \frac{C_2^4 C_1^4 C_0^{44}}{C_3^{52}} = 0.00108$$

$$P(C) = \frac{C_3^4 C_0^{48}}{C_3^{52}} = 0.00018$$

2.6 Eventos: $F = \{Funciona el sistema\}$

$A_i = \{Funciona el componente A_i\}$ $i = 1, 2, \dots, 5$

$A_i^c = \{No funciona el componente A_i\}$

a) $P(F) = P[A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5)] = 0.6997$

b) $P(B) = P\{\text{funcione con 4 ó 5 componentes}\} = 0.51884$

2.7 $P(F) = P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5) \cap (A_6)]$
 $= [1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)] [1 - P(A_4^c \cap A_5^c)] P(A_6)$
 $= [1 - 0.40 (0.30) (0.40)] [1 - (0.10)^2] (0.60) = 0.5655$

2.8 Eventos:

$M = \{\text{mujer}\}$

$H = \{\text{hombre}\}$

$E = \{\text{estatura} > 1.70 \text{ m}\}$

a) $P(E > 1.70) = \frac{28}{50} = 0.56$

b) $P(E < 1.70 | M) = \frac{12}{15} = 0.80$

2.9 Eventos $A_1 = \{\text{Compactos}\}$, $A_2 = \{\text{mediano}\}$ $A_3 = \{\text{grande}\}$ $D = \{\text{automóvil desviado}\}$
 $P(D) = 0.50(0.01) + 0.30(0.02) + 0.20(0.03) = 0.017$

a) $P(A_1 | D) = \frac{P(A_1)P(D|A_1)}{P(D)} = 0.294$

b) Si no es compacto ni grande es mediano

$$P(A_2 | D) = \frac{0.30(0.02)}{0.017} = 0.353$$

2.10 Eventos: $A_1 = \{\text{Ing. con doctorado}\}$, $A_2 = \{\text{Ing. con maestría}\}$
 $B = \{\text{Apto físicamente para viajar en el vuelo espacial}\}$

a) $P(A_2 | B) = 0.3000$

b) $P(A_1 | B^c) = 0.29412$

BIBLIOGRAFÍA

HINES, William, et al.
Probability and Statistics in Engineering
Fourth edition
New Jersey
Jonh Wiley & Sons, 2003.

DEVORE, Jay L.
Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias
5a edición
México
Thomson, 2005.

WAKERLY, Dennis D., et al.
Estadística Matemática con Aplicaciones
6a edición
México
Thomson., 2002.

CANAVOS George.
Probabilidad y Estadística
1a edición
México
McGraw-Hill, 1994.

MILTON J. Susan, et al.
Probabilidad y Estadística con Aplicaciones para Ingeniería y Ciencias Computacionales
4a edición
México
McGraw-Hill, 2004.

LIPSCHUTZ, Seymour
Probabilidad
1ª Edición
México
McGraw-Hill, 1994

SPIGEL, Murray R.
Estadística
2a edición
México
McGraw-Hill, 1991.

MONTGOMERY, Douglas C., et al.
Probabilidad y Estadística Aplicada a la Ingeniería
2a edición
México

Limusa Wiley, 2002
WEIMER, Richard C.
Estadística
1a edición
México
CECSA, 1996.

MEYER, Paul L.
Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas
2ª edición
México
Addison-Wesley Iberoamericana, 1992

WALPOLE, Ronald E., et al
Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias
8a edición
México
Pearson Educación. Prentice Hall, 2007

ROSS, Sheldon M.
Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias
2ª edición
México
McGraw Hill, 2000