

# USO DE LA HOJA DE CÁLCULO PARA LA SOLUCIÓN DE MATRICES DE 3x4 CENTRADO EN EL ESTUDIO DE ALGUNOS CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL.

J.A. OSORIO VAZQUEZ; ESTUDIANTE; aosorio0677@yahoo.com.mx

C. OROPEZA LEGORRETA; PROFESOR DE TIEMPO COMPLETO INTERINO; carlos\_oropezamx@yahoo.es

## RESUMEN

Las matrices consideradas como una herramienta, coadyuvan a la solución de un sin número de problemas matemáticos, su aplicación en el Álgebra Lineal es extenso y forma parte de uno de sus ejes fundamentales en su estudio. El trabajo que se presenta es una propuesta didáctica cuyo objetivo principal es atender la solución de espacios vectoriales (sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia lineal, bases y dimensiones, rango, nulidad, espacio de los renglones y espacio de las columnas) con el empleo de un asistente matemático llamado hoja cálculo proporcionado por el programa Excel, su estructura se fundamenta en funciones lógicas. La propuesta está dirigida a estudiantes que inician su formación como ingenieros, resuelve ejercicios mostrando los desarrollos, lo que permite al estudiante contrastar sus resultados analíticos con los obtenidos en la hoja de cálculo. También se contempla aquella que tiene que ver con la dificultad que enfrentan los estudiantes al resolver matrices que hacen uso de números racionales o decimales, reconociendo que algunos de ellos no tienen la habilidad para resolverlas. Además atiende algunas de las afirmaciones de O'Farrill [1], en el sentido de que: El uso de las computadoras en la enseñanza es de gran utilidad... las capacidades de comunicación de las computadoras modernas y el uso de las nuevas tecnologías de la información proporcionan flexibilidad, personalización, interactividad y calidad a las aplicaciones obtenidas.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad es común escuchar acerca de la importancia de la incorporación de las tecnologías en la enseñanza-aprendizaje y particularmente en las matemáticas. Este movimiento ha sido generado a nivel internacional por dos aspectos: el primero de ellos, es la incorporación de las tecnologías de procesos productivos y de educación, el segundo, a los medios de comunicación, particularmente internet, que ha permitido rebasar fronteras de una manera ágil. En México se han realizado diversas experiencias de aprendizaje utilizando medios tecnológicos. Entre los apoyos tecnológicos utilizados encontramos el uso de hojas electrónicas, software de contenido matemático como Maple, Derive, Cendirella, Geogebra, Cabri, etc. De igual manera, se han incorporado el uso de calculadoras graficadoras, sensores y herramientas o servicios de internet.

Tecnologías de la información y comunicación para la enseñanza básica y media, disponible en internet en (<http://www.eduteka.org/HojaCalculo2.php>). La primera hoja de cálculo (VisiCalc) fue inventada por Dan Bricklin en 1979 y funcionaba en un computador Apple II. El éxito rotundo experimentado por las hojas de cálculo desde sus inicios se debe al empoderamiento que representa esta tecnología en manos de profesionales que conocen los problemas comunes y reales que afrontan las empresas y en la forma de representar esos problemas con números y fórmulas.

Hoja de cálculo provee un magnífico ambiente para el estudio de la representación (modelación) de problemas, para el uso de fórmulas en cálculos matemáticos y para la solución de diversos problemas

Se considera que la hoja de cálculo es una herramienta de aprendizaje poderosa y que si los estudiantes tienen acceso a computadoras, deben utilizarlas. Los estudiantes desarrollan habilidades para:

- ❖ Organizar datos (ordenar, categorizar, generalizar, comparar y resaltar los elementos clave):

- ❖ Realizar diferentes tipos de gráficas que agrupen significados a la información ayudando en la interpretación y análisis.
- ❖ Identificar e interpretar para un conjunto de datos, el máximo y mínimo, media, mediana y moda.
- ❖ Utilizar elementos visuales concretos con el fin de explorar conceptos matemáticos abstractos (inteligencia visual y espacial).
- ❖ Descubrir patrones.

Existen muchos autores que trabajan como ambientes tecnológicos, por mencionar unos:

Hitt,(2003). Reflexiona sobre la tecnología como una interesante herramienta para la construcción de conceptos matemáticos en los estudiantes, que se refleja en un proceso para resolver problemas abogando por el uso reflexivo sobre este medio. Falcade, Laborde y Mariotti (2004) se interesan en analizar el rol que juegan como instrumentos de mediación semiótica, las herramientas de Cabri en la construcción de los conceptos. En el mismo sentido Artigue, (2000) afirma que el uso de las herramientas computacionales en la práctica matemática ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan.

Y (Vigotsky, 1979, citado por Larios, 2006) considera que es necesario preparar al docente en la utilización adecuada de esta herramienta como mediador semiótico entre el conocimiento y el alumno.

La actividad del aprendizaje se realiza en la vida escolar, se trata de entender la escuela como un lugar de actividad, un mundo en pequeño en el cuál ocurren cosas semejantes a las del gran mundo.

El aprendizaje se manifiesta en los procesos de *adecuación objetiva, forma correcta y valor y sentido*, si queremos avanzar en estos planteamientos, debemos realizar una distinción fundamental, entre el aprendizaje estructural y el aprendizaje de refuerzo. El aprendizaje estructural tiene fundamento en la construcción de una estructura o reconstruir el proceso u objeto a representar, su conexión se centra en las técnicas de *observaciones con observaciones, observaciones con actividades y actividades entre sí*. El aprendizaje estructural es por tanto una actividad productiva constructiva.

Por otra parte, el aprendizaje de reforzamiento fortalece las relaciones ya producidas que se le denomina *asociaciones* de tal manera que fluyan con mayor fuerza, rapidez y seguridad y a veces también con armonía, este proceso de aprendizaje consolida lo estructurado. La teoría clásica del aprendizaje ha estudiado primordialmente estos procesos y descubierto multiplicidad de leyes en este aprendizaje.

Sumados los aprendizajes estructural y de reforzamiento se da lugar a un aprendizaje exitoso, que consiste por lo tanto, en generar los procesos de las conexiones adecuadas y construir con ello, paso a paso, una nueva actividad. Cuando el alumno realiza la integración de estos aprendizajes de manera automática, se dice que tiene la visión para la solución de problemas.

A medida que vamos adquiriendo conocimientos dentro de nuestra formación como universitarios, es importante tomar sentido de lo aprendido y aprovechar todo este recurso al máximo. Hoy en día los sistemas computacionales son una herramienta básica y de suma importancia, la tecnología de software que básicamente es el funcionamiento de aplicación para nuestra computadora ha venido avanzando a pasos agigantados lo cual se traduce a que debemos innovar y optimizar dicha tecnología. Cuando se relaciona teoría y práctica se originan herramientas didácticas que podemos aplicarlas como una alternativa de apoyo complementario en la formación profesional de los estudiantes.

Así mismo la informática abarcando el estudio y aplicación del procesamiento automático de la información. Conforme a ello, los sistemas informáticos deben realizar las siguientes tres tareas básicas: entrada (captación de la información), proceso (tratamiento de la información) y salida (transmisión de resultados). En los inicios del proceso de información con la informática sólo se facilitaban los trabajos repetitivos y monótonos del área administrativa. La automatización de esos procesos trajo como consecuencia directa, una disminución de los costos y un incremento en la productividad.

Aquí, en la informática, convergen los fundamentos de las ciencias de la computación, la programación y metodologías para el desarrollo de software, la arquitectura de computadoras, las redes de computadores, la

inteligencia artificial y ciertas cuestiones relacionadas con la electrónica. Se puede entender por informática a la unión sinérgica de todo este conjunto de disciplinas.

De igual manera, las matemáticas no pueden permanecer al margen del avance tecnológico y el desarrollo de la informática, por eso se ha convertido en una necesidad básica en el uso de calculadoras y computadoras para la comunidad estudiantil.

En particular en el presente reporte, abordamos una propuesta de estudio en álgebra lineal, entendida ésta como la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de vectores, los espacios vectoriales, las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones lineales. Los espacios vectoriales son fundamentales en las matemáticas modernas; el álgebra lineal es ampliamente utilizada tanto en el álgebra abstracta como en el análisis funcional, tiene una representación concreta en la geometría analítica, además de aplicaciones importantes en la ingeniería y en otros campos como en las ciencias naturales y en las ciencias sociales, ya que muchos modelos no lineales pueden ser aproximados por modelos lineales.

Relacionando conceptos de álgebra lineal con la tecnología de Microsoft Office y en particular con la hoja de cálculo que en algún momento hemos usado y que puede ser considerada como una herramienta de dominio público en la adquisición de conceptos y destrezas matemáticas para estudiantes de cualquier nivel educativo, en el desarrollo de la propuesta se estructura un modelo en hoja de cálculo de una matriz con dimensiones 3 renglones y 4 columnas ( $M_{3 \times 4}$ ) diseñada bajo funciones lógicas como se da en los lenguajes de programación, manteniendo siempre en cada concepto que se aborda su principio matemático. No se trata de que el alumno aprenda el funcionamiento de la hoja de cálculo como una herramienta informática, basta que conozca su potencialidad y con ello podría desarrollar la creación de nuevas propuestas.

## ANÁLISIS

La línea de actuación que presento va encaminada a la realización de los modelos relacionados directamente con algunos conceptos matemáticos, con la firme intención de proporcionar a los estudiantes que cursan sus estudios de matemáticas básicas una hojas de trabajo que les permita interactuar de manera dinámica entre lo teórico y lo práctico.

El arreglo se enfoca a una serie de problemas de rutina del álgebra lineal, en los que tanto el docente como el estudiante podrán resolver mediante las bondades de la hoja de cálculo EXCEL, la cual se usará como medio de prueba para formar una visión en el estudiante de aprovechar sus conocimientos y crear sus propios apoyos de estudio.

Con la integración de la hoja de cálculo y el álgebra lineal propongo este modelo en donde podemos resolver matrices y observar la solución de un sistema de ecuaciones, conocer si los vectores que lo conforman son dependientes o independientes linealmente, si forman una combinación lineal y/o saber su Rango, Nulidad y Espacios en renglones y columnas. Todos estos temas se centran en el estudio de los espacios vectoriales.

La ventaja principal es la de simular experimentos con un número importante de datos, algo imposible de conseguir en una clase normal, elaborar conjeturas y comprobar y validar las mismas y a partir de ahí construir y afianzar el concepto estudiado. Pero su aplicación también se puede extender al estudio del álgebra y de las funciones.

Para ello se trabajo con una hoja de cálculo realizando un arreglo matemático a base de funciones lógicas (figura 1), apegándome a un procedimiento lo más sencillamente posibles evitando la complejidad para el uso de nuestro programa, por lo que su aplicación sólo se limita al ingreso de datos en pantalla.

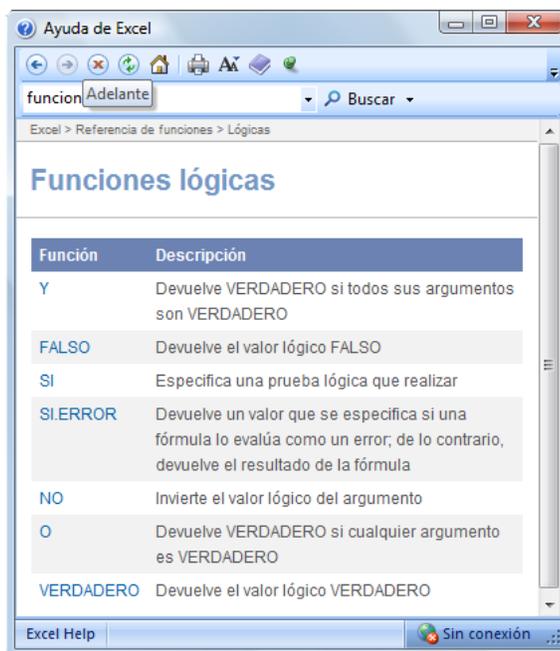
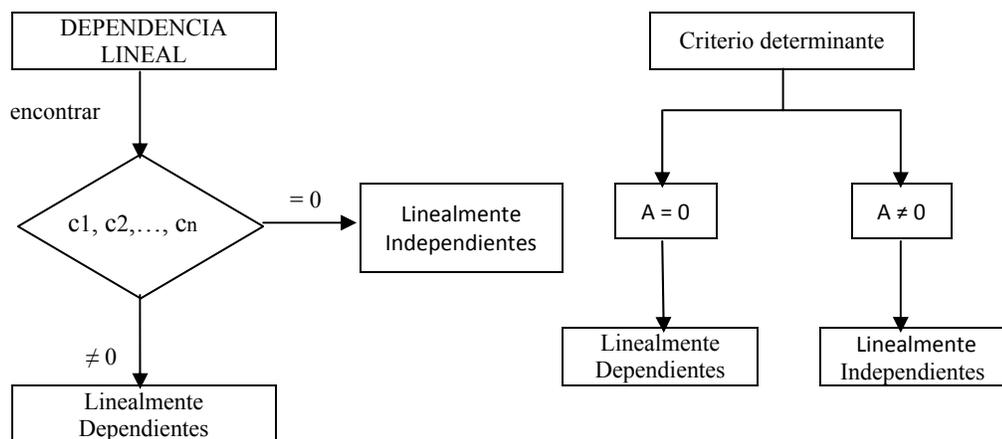
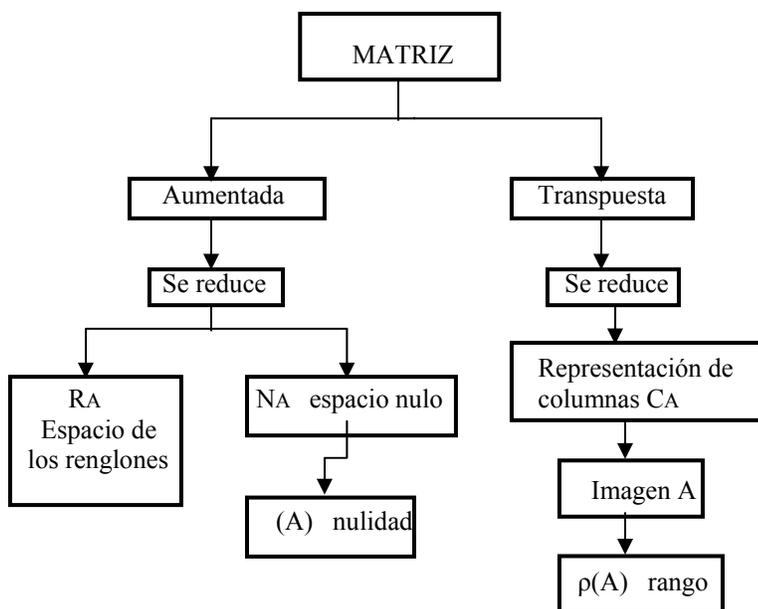


Figura 1 Funciones lógicas

El arreglo se estructuró bajo las siguientes definiciones manteniendo siempre su principio algebraico



<b>RA</b> = espacio generado por los vectores de la matriz reducida (renglones).
<b>NA</b> = los vectores que forman una base.
<b><math>\rho(A)</math></b> = dimensión de NA.
<b>CA</b> = espacio generado por los vectores finales al reducir la matriz transpuesta, en los renglones.
Imagen de $A = CA$
<b><math>\rho(A)</math></b> = dimensión de imagen de A.



**Combinación Lineal.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores en un espacio vectorial  $V$ . Entonces cualquier expresión de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son escalares, se llama **combinación lineal** de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Conjunto generador de un espacio vectorial.** Se dice que los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  en un espacio vectorial  $V$  **generan**  $V$  si todo vector de  $V$  se puede expresar como una combinación lineal de ellos. Dicho de otra manera, para todos  $v \in V$  existen escalares  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tales que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

**Dependencia e Independencia Lineal.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen  $n$  escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no todos cero, tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes.

**Base** Un conjunto de vectores  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  es una base del espacio vectorial  $V$  si

- i.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente.
- ii.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  genera  $V$

**Núcleo y Nulidad de una matriz.**  $N_A$  recibe el nombre de núcleo de  $A$  y  $\dim(N_A) = \dim N_A$  se le llama nulidad de  $A$ . Si  $N_A$  contiene solamente el vector cero, entonces  $\dim(N_A) = 0$

**Recorrido de una matriz.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Entonces el recorrido de  $A$ , denotado por  $\text{Recorrido } A$ , está dado por.

$$\text{Recorrido } A = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

**Rango de una matriz.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Entonces el rango de  $A$  denotado por  $\rho(A)$ , está dado por

$$\rho(A) = \dim \text{Recorrido } A$$

**Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz.** Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , sean  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  los renglones de  $A$  y  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  las columnas de  $A$ . Entonces se definen

$$R_A = \text{espacio de los renglones de } A = \text{gen}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Y

$$C_A = \text{espacio de las columnas de } A = \text{gen}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

La pantalla denominada *DATOS* está estructurada de manera que solo se tengan que ingresar los valores de los vectores que son objeto de estudio, mostrándonos el desarrollo de la matriz. El cálculo fue basado en los

principios del álgebra lineal para la solución de matrices, en la que el valor del *pivot* sea 1 y de ahí ir eliminando por el método Gauss – Jordan.

Campos para el Ingreso de datos

Desarrollo de la matriz, si al calcular el sistema ya no reconoce valores reales imprimirá en pantalla “#####”, lo que nos indicara que ya concluyo su proceso, de manera contraria si existen valores reales los seguirá imprimiendo.

Pestaña DATOS, RESULTADOS.

El sistema calcula la matriz transpuesta, lo que servirá para poder encontrar  $R_A$ ,  $N_A$  y  $C_A$

Desarrollo de la matriz transpuesta, de igual manera imprimirá en pantalla “#####” cuando ya no existan valores reales, de lo contrario los seguirá imprimiendo.

Figura 2 Pantalla para el ingreso de datos

La pantalla *RESULTADOS* muestra los valores calculados de los vectores que ya fueron ingresados en la pantalla *DATOS*, para cambiar de una pantalla a otra solo hay que seleccionar la pestaña de la que se quiera visualizar.

Los resultados que podemos consultar en pantalla son Independencia o Dependencia Lineal, Combinación Lineal, Núcleo generado ( $N_A$ ), Espacio de los renglones ( $R_A$ ), Espacio de las columnas ( $C_A$ ). Por lo que podemos resolver matrices hasta una dimensión 3 X 4, y saber si dicho sistema de ecuaciones es consistente o inconsistente

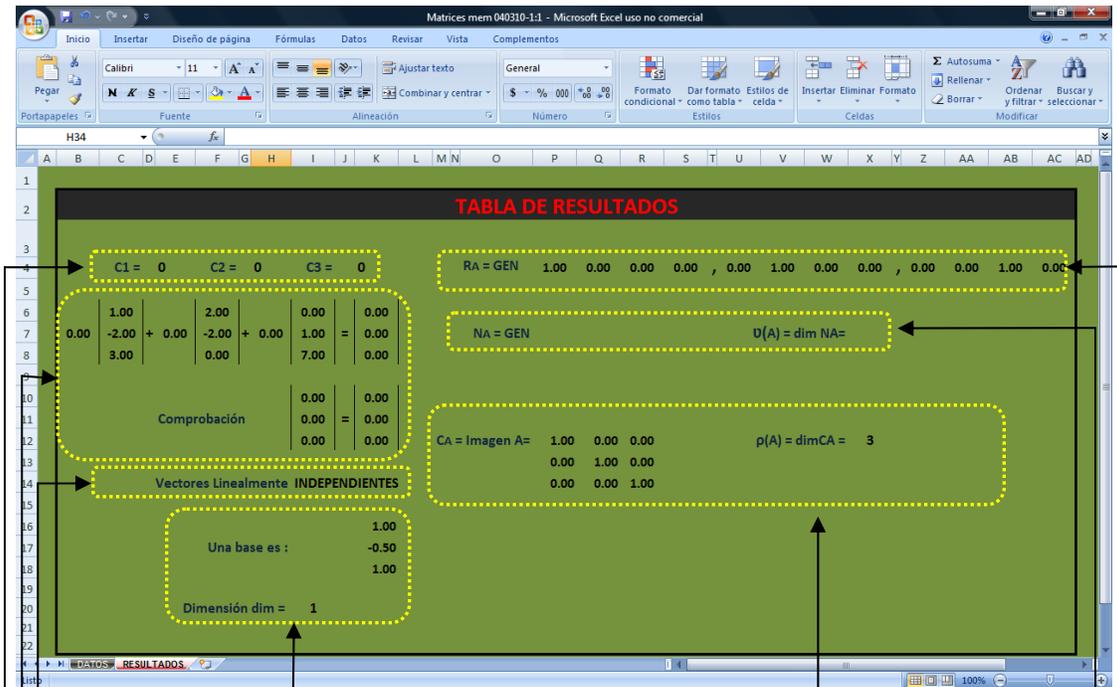


Figura 3 Pantalla de resultados

Muestra la Base generada y su dimensión, caso contrario imprimirá la leyenda "no genera base"

Espacio en columnas y su dimensión, de no generar valores los campos quedaran en blanco.

Este campo muestra si se trata de una Dependencia o Independencia Lineal, cuando el sistema sea inconsistente el campo quedara en blanco.

Núcleo generado y su dimensión(o nulidad de A). Si se genera la nulidad se reflejara en pantalla, de no ser así quedaran los campos en blanco.

Comprobación de los valores de C1, C2 y C3. Cuando no existan valores se imprimirá la leyenda "Sistema Inconsistente"

Espacio de los renglones de A, los resultados se muestran de manera horizontal separados por una coma (,), cuando existan valores se imprimirán, de lo contrario quedaran campos en blanco.

Valores de C!, C2 y C3 en soluciones triviales o no triviales, cuando el sistema sea inconsistente no se imprimirán.

## RECOMENDACIONES

La importancia de contar con apoyos didácticos como una alternativa aportara beneficios al reafirmar lo estudiado y llegar a su comprensión, por otra parte este apoyo tendrá mayor significancia si lo hacemos nosotros mismos.

Aunque ya existen software matemático avanzados como en el caso del maple, matlab, etc., que ya realizan los cálculos y gráficos de manera directa únicamente ingresando los datos, siempre existirán desventajas para el usuario, estos software generalmente nos dan los resultados finales y no los desarrollos o procesos lo que para algunos estudiantes resulta una dificultad.

Para estos casos es de gran utilidad realizar nuestros propios modelos en computadora y así obtendremos los resultados que realmente nos interesan, con ello podremos ejecutar un sinfín de cálculos con gráficos, interpolaciones, conversiones y hasta vincular un software matemático avanzado con algún otro programa. Excel es una gran herramienta pero también existen variados lenguajes de programación que resultan ser una excelente opción y más ahora que se encuentran en versiones *visual* que los hacen ser interactivos a diferencia de las versiones clásicas.

## BIBLIOGRAFÍAS

- [1] O’Farril Y, “Sistema Entrenador Inteligente con Tecnología Multimedia Óptima-Geometría”, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, No.2 Vol. 3, México, julio 2000.
- [2] Apolo C. “Uso de Recursos Tecnológicos en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas”, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, No. 22, México, 2009.
- [3] Pascual F. “Guía del Campo de Excel 2007” Alfaomega, México, 2008.
- [4] Menchén A. “Tablas Dinámicas en Excel 2007”, Alfaomega, México, Junio 2009.
- [5] Zitzmann W. “Valoración de Empresas con Excel, simulación Probabilística”, Alfaomega, México, 2009.
- [6] Korol J. “Excel 2007 VBA Programming With XML and ASP”, Wordware, United State of America, 2009.
- [7] Artigue M. “Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental”, México Group Editorial Iberoamérica, 2000
- [8] Falcade R, Laborde C y Marriotti M. “Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2, 367-374”, Bergen, University of Norway, 2004.
- [9] Hitt F. “Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología”, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2), 213-223”, 2003.
- [10] Larios V.”La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de Geometría Dinámica en el nivel medio”. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(3), 363-386”. 2006.
- [11] “La Hoja de cálculo una poderosa herramienta de aprendizaje”, extraído 20 de agosto de 2010 desde <http://www.eduteka.org/HojaCalculo2.php>.