

# EL USO DE LA VISUALIZACIÓN COMO UNA ESTRATEGIA DE APOYO EN EL ESTUDIO DE COMBINACIONES LINEALES.

C. OROPEZA LEGORRETA; PROFESOR DE TIEMPO COMPLETO INTERINO; carlos\_oropezamx@yahoo.es

## RESUMEN

En este trabajo se realiza una exploración del funcionamiento y efecto del uso de elementos de carácter visual que se ponen en juego al trabajar un diseño de ingeniería didáctica y su conexión con las características específicas del concepto de combinación lineal. Los objetivos son: la elaboración de situaciones didácticas tomando como fundamento a la ingeniería didáctica, para la construcción del concepto de combinación lineal haciendo uso de la visualización como una herramienta didáctica, y la exploración del funcionamiento de elementos de carácter visual que se ponen en juego en el momento de trabajar las situaciones diseñadas y su conexión con las características específicas del concepto referido. Según Douady [1] "... el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos...". La hipótesis afirma que un estudiante alcanza una idea clara y precisa del concepto de combinación lineal cuando es conducido a escenarios de representación geométrica. En el reporte se muestran algunas evidencias de exploraciones que se han realizado en diversos foros con estudiantes de ingeniería, por otra parte se informan las regularidades que se han encontrado hasta esta fase de la investigación.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se pretenden investigar las ventajas, dificultades y limitantes que los estudiantes enfrentan cuando hacen uso de la visualización como una herramienta didáctica en el estudio del concepto de combinación lineal al resolver un diseño de ingeniería didáctica.

Después de realizar una revisión documental, se encontró que en la mayoría de los textos de Álgebra Lineal incluidos en la bibliografía que se recomienda consultar en los cursos para ingenieros en México en general y en particular en veinte libros que se analizan, éstos cuentan con escasa información de ejercicios resueltos relacionados con el concepto de combinación lineal, más aún sólo algunos de ellos proporciona una interpretación geométrica del concepto. Reconociendo la naturaleza abstracta del álgebra lineal, se observó que en los libros de texto consultados una buena parte de los conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos, ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. Además de que el álgebra lineal es generalmente considerada uno de los prerrequisitos más importantes para muchos campos de matemáticas, ciencia e ingeniería. Consistentemente, los cursos de álgebra lineal están provistos de una gran variedad de disciplinas en el nivel licenciatura. A pesar de ello, y aunque la enseñanza del álgebra lineal es percibida comúnmente como una falta de experiencia (Carlson, 1993; Hillel, 2000), la investigación en álgebra lineal es un campo de exploración muy reciente.

Por otra parte, considerando las experiencias vertidas en diversos cursos que he impartido durante diez años en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, se han observado diversas problemáticas relacionadas a la asignatura de álgebra lineal entre las cuales se cita la referente a la dificultad que tienen los estudiantes para dar evidencias tangibles de un significado distinto a los desarrollos analíticos que puedan alcanzar en la solución de un problema, por tanto se propone hacer uso de la visualización como una herramienta que puede motivar a la creación, interpretación y reflexión del concepto en estudio.

La propuesta de hacer uso de la visualización tiene que ver con dos aspectos: el primero se refiere a los antecedentes de geometría analítica que deben cubrir los estudiantes de la facultad antes referida previos al curso de álgebra lineal y el segundo motivo se relaciona con la experiencia que adquirí en un diplomado de didáctica de las matemáticas que centraba su atención en el análisis de los polinomios desde una perspectiva visual.

Es por ello, entre otras razones que los objetivos planteados para el desarrollo del presente trabajo son:

La elaboración de situaciones didácticas tomando como fundamento a la ingeniería didáctica, para la construcción del concepto de combinación lineal haciendo uso de la visualización como una herramienta didáctica.

Y la exploración del funcionamiento y efecto del uso de aquellos elementos de carácter visual que se ponen en juego en el momento de trabajar la ingeniería didáctica y su conexión con las características específicas del concepto de combinación lineal.

En la hipótesis planteada se afirma que: un estudiante alcanza una idea clara y precisa del concepto de combinación lineal cuando es conducido a escenarios de representación geométrica, vía el diseño de una ingeniería didáctica.

El marco teórico utilizado en la investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas y como herramienta didáctica se considera a la Visualización. La Teoría de Situaciones Didácticas, formulada inicialmente por Guy Brousseau (1983), se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción

*...una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción...*

y retomada, reformulada y enriquecida por una amplia comunidad de investigadores, fundamentalmente de la comunidad francesa de la Didáctica de las Matemáticas. Se sabe también que la Ingeniería Didáctica se basa en los conocimientos científicos y sus distintas fases son: análisis preliminares; concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas; experimentación y análisis a posteriori con la evaluación. Así mismo existen tres tipos de

situaciones a-didácticas que inducen a los alumnos a transitar por diversas etapas propias de la actividad matemática, la acción, la formulación y la validación.

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1998, p. 33):

“Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”

En contraste, la visualización tiene diversas acepciones por los investigadores que se han encargado de estudiarla, sin embargo, en este trabajo será considerada como: la capacidad, el proceso, el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento, (Arcavi, 1999).

Es precisamente la consideración de usar la visualización como herramienta de estudio y el diseño de actividades didácticas que serán puestas en escena lo que hace diferencia entre este trabajo y los que ya se han producido; además de que el estudio toma como elemento principal a los polinomios de segundo grado, siendo éste otro factor que marca la distinción con los otros.

La percepción es el vínculo por el que conectamos el mundo exterior con nuestro interior; la percepción táctil, gustativa, auditiva, dolorosa o visual confrontan la condición interna de nuestro ser con las prevalecientes en el derredor.

De todas estas modalidades de intercomunicación, la visual recibe, en el caso del hombre, una máxima atención. La evolución biocultural del hombre ha conducido a la visión, más que a ninguna otra función sensitiva del intelecto, a su acoplamiento con las transformaciones del intelecto.

El mundo tridimensional se ha condensado en las imágenes representadas sobre las superficies y, por otra, la función visual ha tenido que aprender aparejadamente, a contender con perfección con las abstracciones así realizadas.

Todo esto analizado permitirá avanzar nuestro conocimiento en la “ciencia acerca del hombre”. Para emparejar nuestro conocimiento referente al hombre y llevar el paso con el de su creación intelectual, es preciso enfrentar la labor conjunta sugerida.

Por último cabe señalar que en diversos trabajos de investigación en la disciplina de la matemática educativa, se ha reconocido que todo lo que implica la construcción de conocimientos matemáticos interesa a la didáctica. En consecuencia una vez identificada la dificultad por parte de los estudiantes (e incluso de algunos profesores) citada anteriormente, esta investigación aspira proporcionar elementos que aporten ideas para profundizar reconocer y replantear en la manera de lo posible los elementos que habrían de ponerse en juego para implementar estrategias alternativas que motiven el interés por parte

de los estudiantes a realizar actividades distintas a las convencionales y llevar los resultados pertinentemente al sistema de enseñanza (al menos en nuestra facultad) lo cual es inherente a la labor de investigación.

## **JUSTIFICACIÓN**

En su libro de Álgebra Lineal en la página 32, Kenneth Hoffman y Ray Kunze editado en 1973 afirman que:

“Ciertas partes del álgebra lineal están íntimamente relacionadas con la geometría. La misma palabra <<espacio>> sugiere algo geométrico, como lo hace el vocablo <<vector>> para muchos. Cuando se avance en el estudio de los espacios vectoriales, el lector observará que mucha de la terminología tiene una connotación geométrica. Para concluir esta sección introductoria sobre espacios vectoriales, se considerará la relación de los espacios vectoriales con la geometría, hasta un grado que indicará al menos el origen del nombre <<espacio vectorial>>”.

Más adelante en la página 33 también comentan que:

“De vez en cuando el lector encontrará probablemente provechoso <<pensar geoméricamente>> en espacios vectoriales, eso es, trazar gráficos que lo ayuden a ilustrar y motivar alguna de las ideas. Ciertamente, deberá hacerlo. Sin embargo, al hacer tales ilustraciones, debe tenerse presente que, por tratar los espacios vectoriales como sistemas algebraicos todas las demostraciones que se hagan deben ser de naturaleza algebraica”.

Por otra parte el libro de texto Matrix Algebra de Winter, D. (1992) en el prefacio menciona que:

“La matriz algebraica es vitalmente importante como una herramienta en la cual las materias tales como: química, economía, ingeniería, matemáticas, física y computación científica. Los problemas importantes en estos campos pueden ser reducidos a problemas en la matriz algebraica, los cuales pueden ser resueltos precisamente con la alta velocidad de las computadoras. Por esta razón, los estudiantes suelen tener un primer curso de álgebra lineal en los inicios de su plan de estudios. Una desventaja de esto es que los aspectos geométricos del álgebra lineal frecuentemente consiguen poca atención. Esto es desafortunado, por mucho el álgebra lineal debe su existencia a las intuiciones geométricas de sus creadores, y muchos de sus métodos pueden ser mejor entendidos en conexión con sus interpretaciones geométricas”.

“En este libro, la matriz algébrica, presenta al álgebra lineal computacional dentro de un contexto geométrico. El tema general es la manipulación de la matriz, de la cual mantiene cosas a un nivel concreto y computacional. Los fenómenos geométricos son ilustrados por diagramas que simplifican y complementan la discusión y ayudan al lector a obtener una mayor profundización, mayor comprensión conceptual de la asignatura. De esta forma, el libro puede ser completo a demás de accesible”.  
(Traducción).

Las afirmaciones anteriores, revisión de tesis relacionadas con temas de estudio de álgebra lineal y algunas exploraciones realizadas sobre la interpretación geométrica de la combinación lineal permitieron estructurar la justificante para la realización del presente trabajo de investigación.

## METODOLOGÍA

A pesar de que la investigación se encuentra en una etapa intermedia de desarrollo, en este reporte se da cuenta de los resultados arrojados al poner en acción una actividad didáctica. La actividad fue puesta en escena en un diplomado para profesores realizado en el CCH Sur de la UNAM en México. El cuestionario se aplicó a un grupo de doce profesores; la primera parte fue resuelta en forma individual y posteriormente se formaron cuatro equipos con la finalidad de que en cada uno de ellos se analizaran y discutieran las propuestas individuales, para que al final expusieran solamente una en común acuerdo por equipo. Después de haber finalizado el desarrollo de sus propuestas, se estableció la exposición del trabajo de cada equipo; en esta fase se obtuvo una retroalimentación por parte de los profesores que jugaron el rol de estudiantes así como del profesor instructor. El objetivo de la actividad centra su atención en encontrar la combinación lineal de un par de matrices haciendo uso de la visualización. En ella se pone en juego el análisis gráfico de una matriz, que se pide graficar en un plano cartesiano. Dicha gráfica corresponde a cada uno de los vectores columna que la constituyen. También se tiene la necesidad de hacer algunas operaciones básicas con matrices. Durante el desarrollo de la actividad intervienen planteamientos de carácter algebraico y geométrico.

## ALGUNAS EXPLORACIONES

A continuación se reportan parte de los resultados obtenidos por parte de los profesores que resolvieron la propuesta didáctica. Es importante aclarar que a pesar de que en la actividad se indica hacer uso de estuche geométrico, para el grupo en especial de profesores se tomó la decisión de no proporcionarles dicho material con la intención de observar las estrategias adicionales que ellos utilizarían.

La razón de mostrar este extracto del trabajo es porque las imágenes nos proporcionan evidencias de algunos rasgos característicos que se encontraron en el grupo de trabajo.

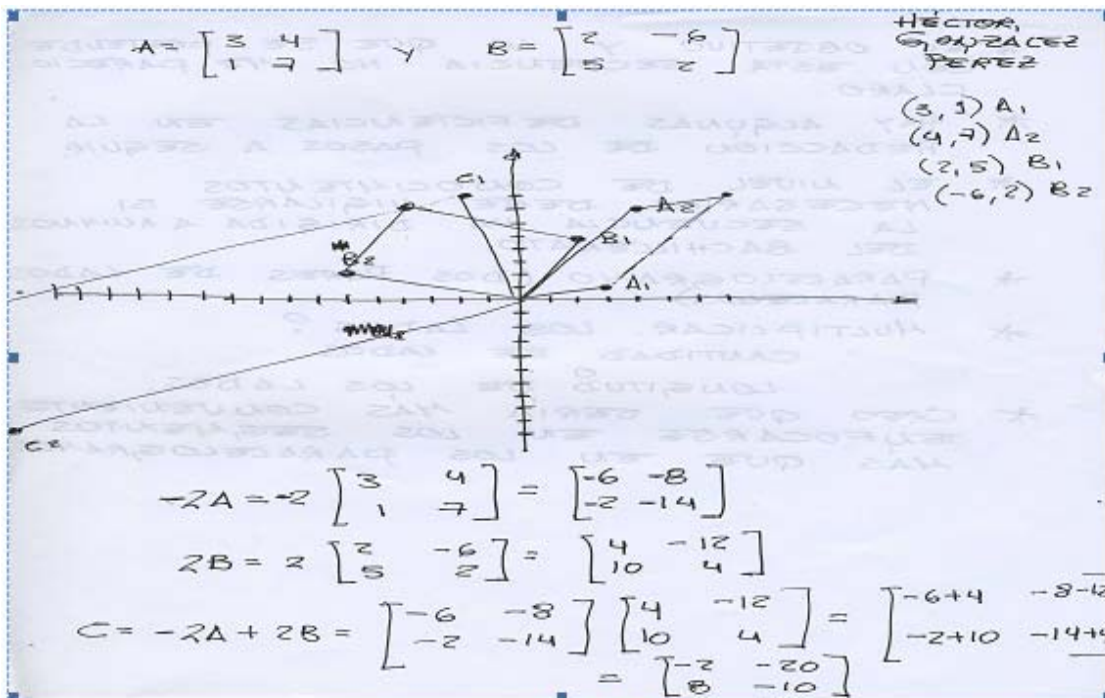


Figura 1

En la figura 1, se puede apreciar que el profesor resuelve con claridad la parte algebraica haciendo uso de las operaciones básicas entre matrices. También se puede apreciar que el profesor no comete errores en procedimiento realizado. Este hecho permite suponer que en la parte gráfica el profesor, ya no recupera las partes que le permitían llegar a identificar la combinación lineal con dicha estrategia. Razón por la cual podemos afirmar que el profesor tiene una predilección por la estrategia algebraica.

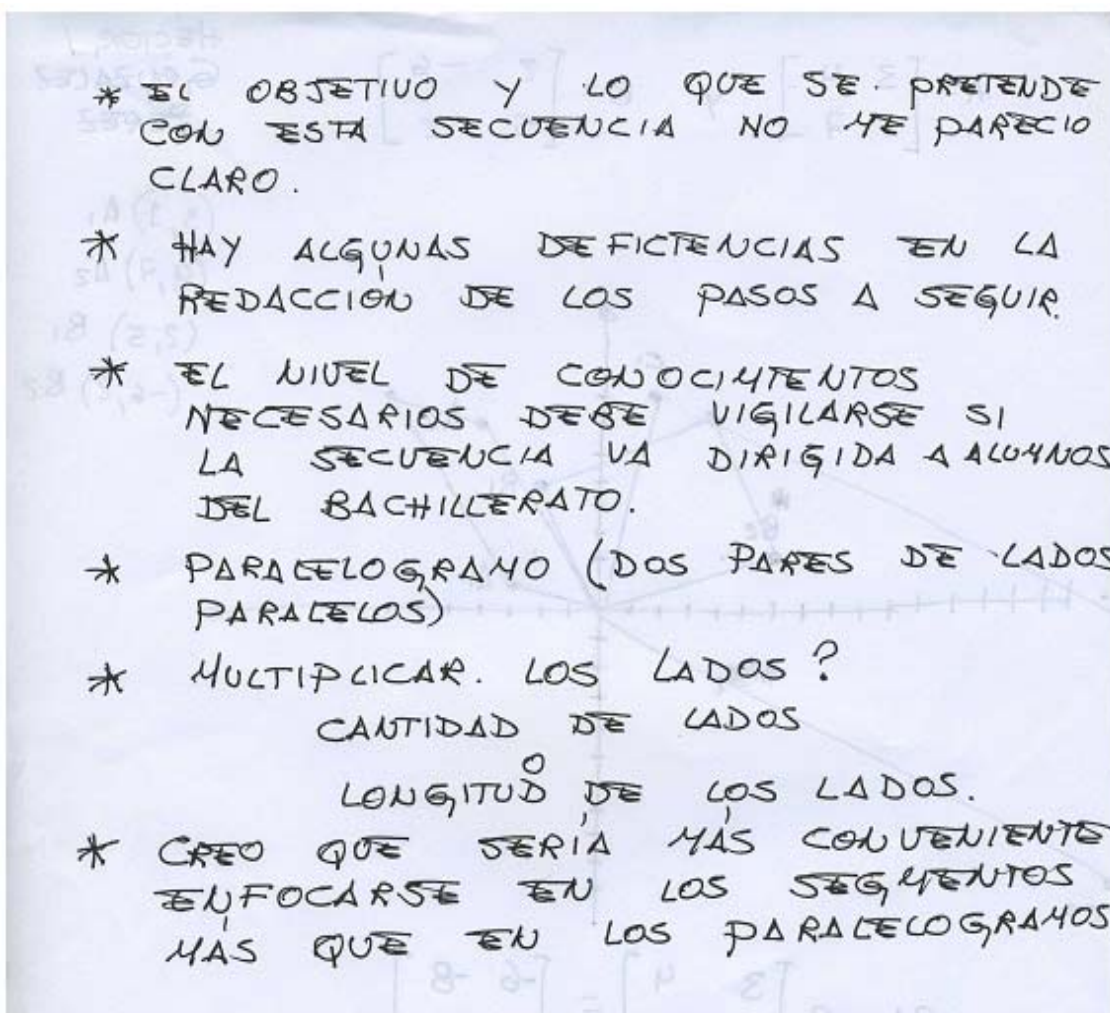


Figura 2

En la figura 2 se puede dar lectura a los comentarios reportados en forma escrita por el mismo profesor del caso anterior. Observe cómo trata de responder de alguna manera al desarrollo preferentemente algebraico que predominó en sus respuestas. La parte rescatable es que aporta observaciones y recomendaciones sobre el diseño mismo de la secuencia.

En esta primera sección de resultados, la idea es observar cómo la parte algebraica en un número considerable tanto de estudiantes como de profesores está arraigada al grado de sobreponerse a la estrategia de visualización propuesta para este caso.

En contraste a continuación se muestran tres ejemplos, en los cuales la estrategia de visualización fue preferentemente más estructurada de acuerdo con los desarrollos realizados por parte de los profesores que participaron en la puesta en escena de la situación.

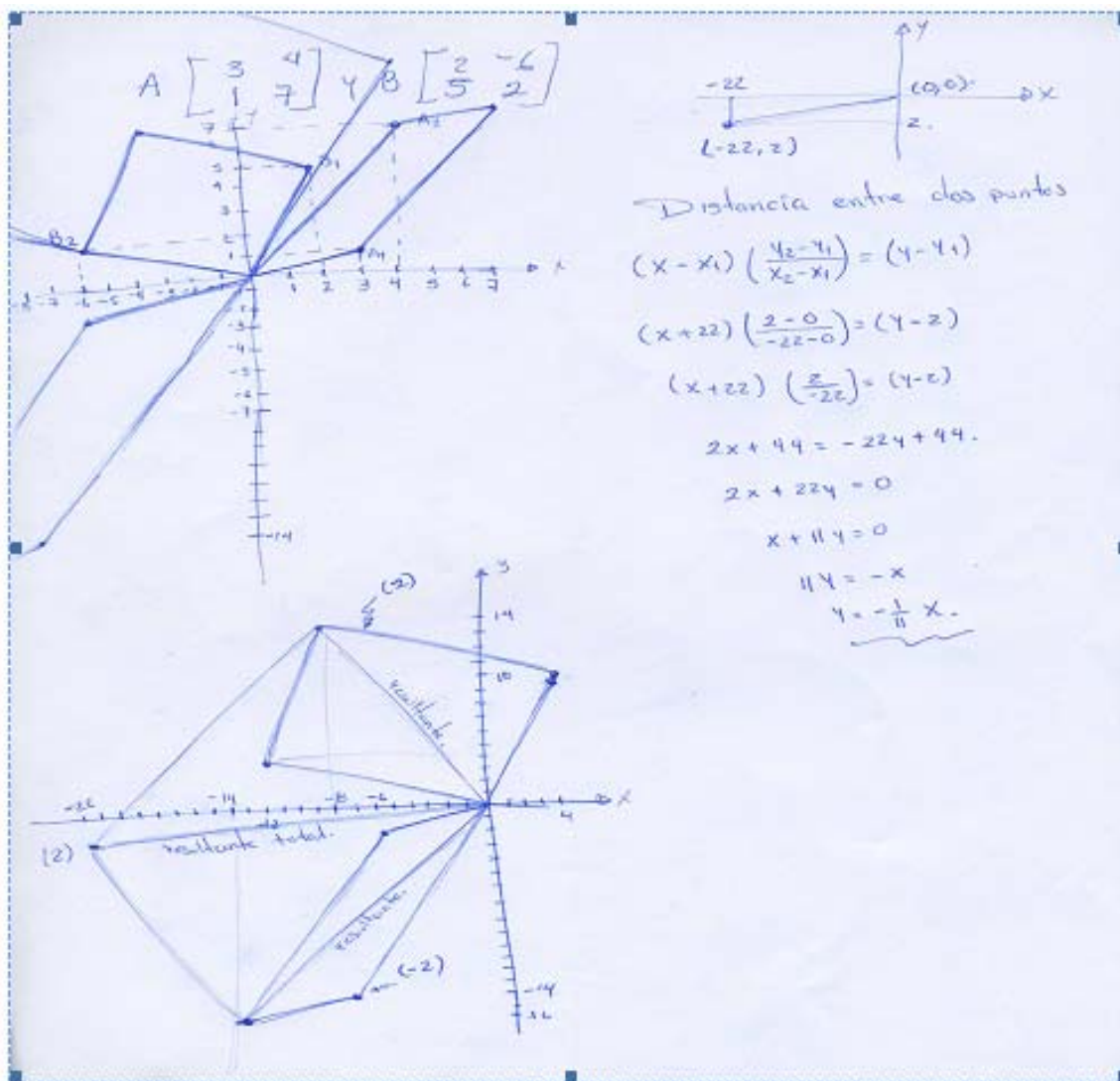


Figura 3

La figura 3 está compuesta de dos diagramas principales, en los que en principio se pueden identificar dos momentos: en el primer diagrama el profesor plasma los paralelogramos correspondientes a las matrices propuestas originalmente y en el segundo diagrama se puede apreciar el manejo de la suma de las resultantes para obtener lo que nombró “*resultante total*” como si se tratara de la suma de vectores libres. Por otra parte también se puede apreciar la manera en que obtuvo la ecuación de dicha resultante a pesar de que comete un error en el valor de la ordenada del punto elegido, ya que el signo debía ser negativo es decir el punto final de la resultante según su diagrama es (-22 , -2).

Lo destacable en esta propuesta es que se responde haciendo uso plenamente de aspectos geométricos y que la única parte algebraica utilizada es para obtener la ecuación de la recta que denomina “*resultante total*”. Cabe mencionar que a pesar de no hacer alguna propuesta con relación a la expresión que plantea la combinación lineal de las matrices, si da evidencias de favorecer el uso de la visualización para tal efecto.

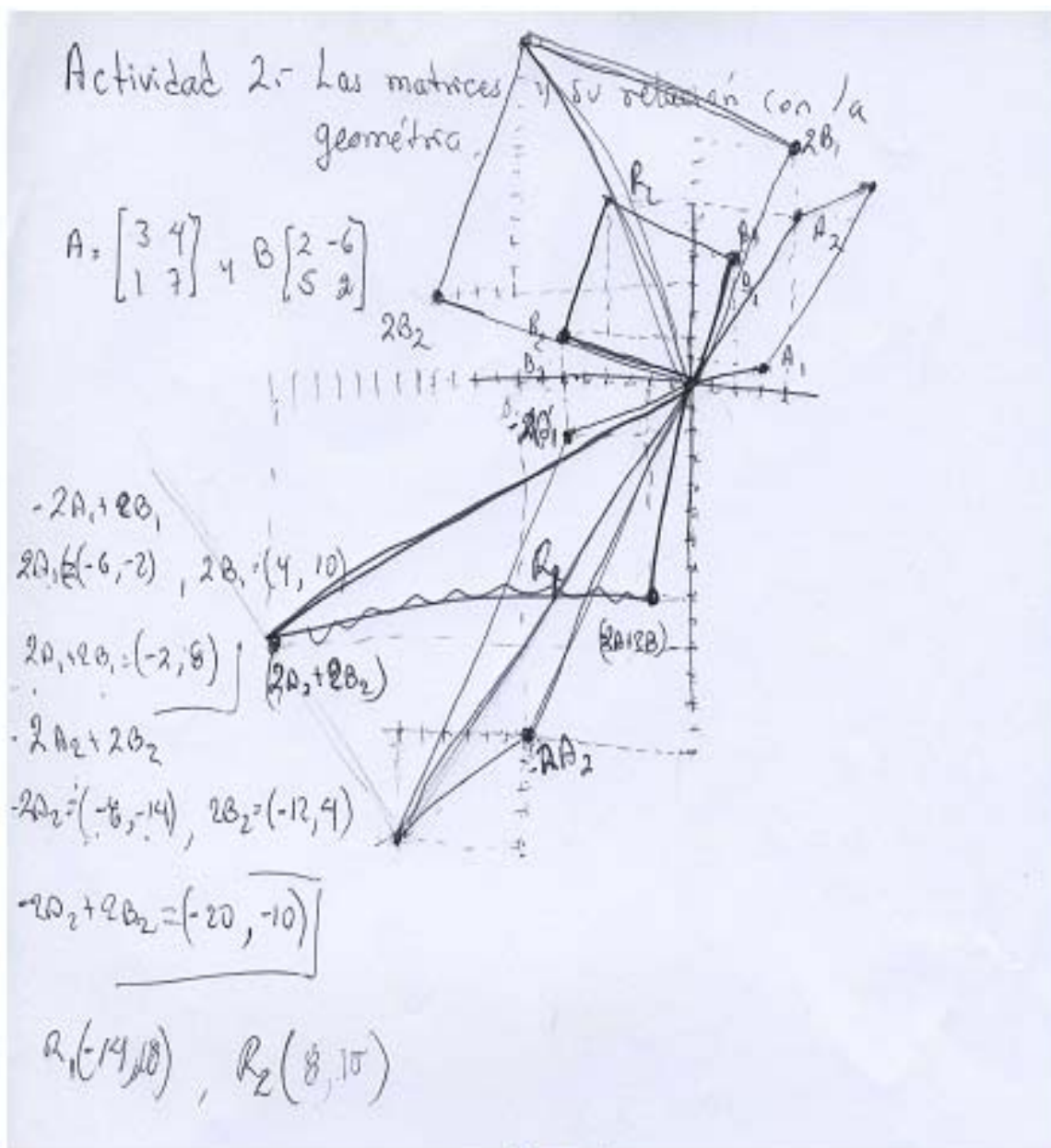


Figura 4

Lo que se puede apreciar en la solución planteada en la figura 4, es como el profesor al resolver la situación trata de manejar los dos enfoques tanto el analítico como el geométrico. Hace el planteamiento parecido a la ecuación de una combinación lineal en forma parcial, es decir para una parte de las matrices pero no puede recuperar la combinación lineal de las matrices en general.



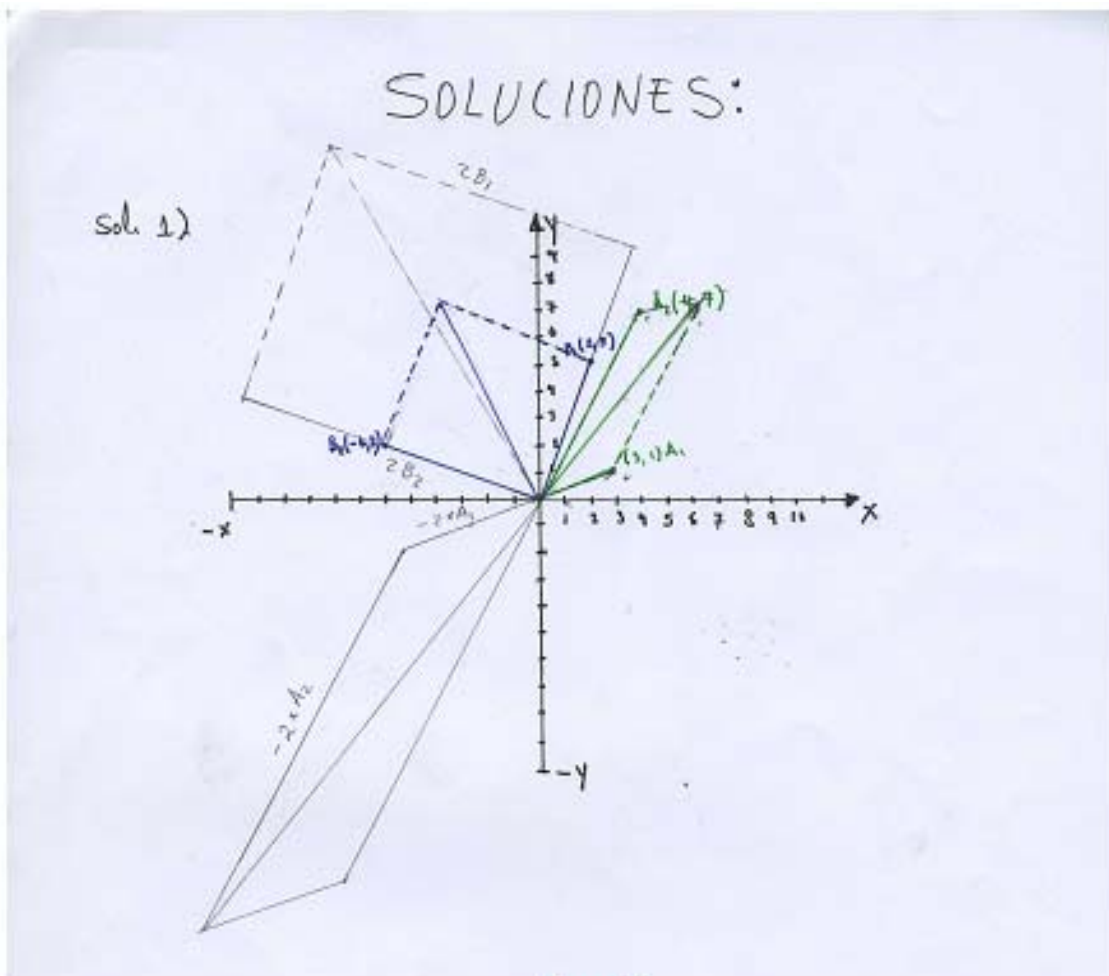


Figura 5

Lo sobresaliente de la solución incluida en la figura 5 es que centra su atención en aspectos geométricos, es decir en consecuencia hace uso de la visualización y no muestra rasgos de las operaciones con las matrices en forma algebraica. No obtiene la resultante final ni tampoco hace propuesta alguna de alguna expresión que denote la combinación lineal entre ellas.

## CONCLUSIONES

Dentro de las regularidades presentadas por parte de los profesores participantes en la solución de la propuesta didáctica enlistamos lo siguiente:

Cuando resolvieron la actividad en forma individual el grupo mostró cierta preocupación por que se sintió observado y se pudo identificar con regularidad las dificultades que presentaron al manejar aspectos de carácter geométrico.

Cuando trabajaron en equipos cada uno de los integrantes asumieron diversos roles entre los que podemos citar: los dominantes, quienes ejecutan, los que sólo observan, los que proponen, los que discuten sin tener una propuesta, etc. Es decir que parecía el escenario

con estudiantes de otro nivel educativo y no de un grupo de profesores, hecho que enriqueció la experiencia. Parte de este hecho se puede identificar en el abanico de propuestas de solución realizado por los profesores.

Al realizarse la exposición por equipos se analizaron y discutieron profundamente todas y cada una de las propuestas. Esto permitió que al final todo el grupo de participantes identificara los objetivos de la actividad en estudio, estrategias y formas de resolver la actividad didáctica en estudio, es decir todos terminan por comprender el concepto.

Antes de finalizar el desarrollo de la actividad, uno de los equipos cuestionó el uso de este tipo de material (actividades didácticas) en un curso convencional por el tiempo que se necesita dedicar en su solución. Ante esta posición el resto de los equipos participantes coincidieron en que si es posible su realización y que ahora lo importante era realizar una buena planeación para lograr su ejecución.

Finalmente el grupo examinado dejó evidencias verbales de la motivación y diversidad de propuestas que se generan al resolver actividades de esta naturaleza. Y que como consecuencia su aplicación con los estudiantes puede ser considerada como una oportunidad de desarrollo en las habilidades de cada uno de ellos. También dejaron entrever la posibilidad de aplicar la estrategia a otros cursos y según manifestaron fue una experiencia significativa para ellos.

## RECOMENDACIONES

Replantear el diseño de la situación didáctica con las observaciones obtenidas en este trabajo.

Aplicar la puesta en escena de la situación didáctica en diversos sistemas educativos ya sean privados y públicos para fortalecer las regularidades observadas y con ello poder contrastar la hipótesis propuesta.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Douady, R. "Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde". En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M, 1996.
- [2] Arcavi, A. "Plenary lecture at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference (PME-NA)", Cuernavaca, México, appeared in Hitt, F. and Santos, M. (eds.), *Proceedings of the 21<sup>st</sup> Annual Meeting of PME-NA*, ERIC, Claeringhouse for Sciece, Mathematics and Environmental Education, OH, pp. 55-80, 1999.
- [3] Brousseau, G. "*Obstacles épistémologiques en mathématiques*". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2): 167-198, 1983.
- [4] Carlson, D. "Teaching linear algebra: must the fog always roll in?", *College Mathematics Journal*, 25(1) 29-40, 1993.
- [5] Hoffman, K. y Kunze, K. "Espacios Vectoriales en Álgebra Lineal", pp.32. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., 1973.
- [6] Winter, D. "*Matrix Algebra*". USA: Macmillan Publishing Company, 1992.