

ECUACIÓN POLAR EN FORMA GENERAL PARA ALGUNAS CURVAS CARACTERÍSTICAS

A. VELÁSQUEZ MÁRQUEZ; PROFESOR DE CARRERA; velasquez777@yahoo.com.mx

A. S. ROMÁN GARCÍA; PROFESORA DE ASIGNATURA; ayesha_roman@yahoo.com.mx

Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México

RESUMEN

En este trabajo se propone la ecuación $r^x = A \cos (B\theta + C) + D$, como una *Ecuación Polar en Forma General para Algunas Curvas Características* como son ciertas circunferencias, rosas de n pétalos, caracoles, cardioides y lemniscatas; además, se presenta un poster con un cuadro resumen, donde se aprecian los cambios que se presentan cuando cambia el valor de las variables x , A , B , C y D , lo que permite identificar rápidamente curvas cuya ecuación polar se puede escribir de la forma $r^x = A \cos (B\theta + C) + D$; finalmente, dicho cuadro-resumen se puede extrapolar a curvas cuya ecuación polar pueda escribirse de la forma $r^x = A \sin (B\theta + C) + D$.

INTRODUCCIÓN

En el programa de la asignatura Geometría Analítica que se imparte en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM (FI, UNAM), el segundo tema es “Curvas en el Plano Polar” en el cual se abordan las ecuaciones polares de curvas como circunferencias, rosas de n-pétalos, cardioides y lemniscatas, entre otras. Tales curvas presentan ciertas similitudes, lo cual, generó la inquietud por establecer una ecuación polar que incluyera todas las curvas antes mencionadas; de esta forma, se planteó una ecuación polar con base en las semejanzas que existen entre las correspondientes ecuaciones polares de tales curvas, dicha ecuación contiene ciertos parámetros que al ir cambiando de valor permite obtener las ecuaciones polares no solo de las curvas ya mencionadas, sino de otras más.

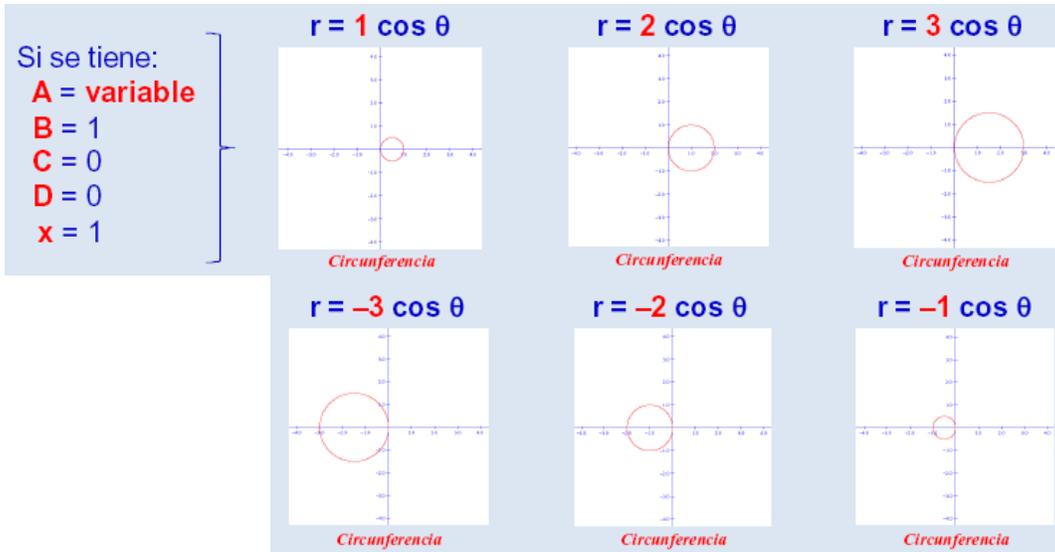
ANÁLISIS

Durante el semestre 2008-2, surgió la inquietud por encontrar una ecuación polar en forma general, para diversas circunferencias, caracoles, cardioides, rosas de n-pétalos y lemniscatas. Para ello, se propusieron y analizaron diferentes ecuaciones polares basadas en las coincidencias que presentaban las ecuaciones de las curvas antes mencionadas, lo que se buscaba era obtener una ecuación polar que contuviese ciertos parámetros, tales que al modificar sus valores permitiesen pasar de la ecuación de una curva a otra. La ecuación que brindó mejores resultados fue la siguiente:

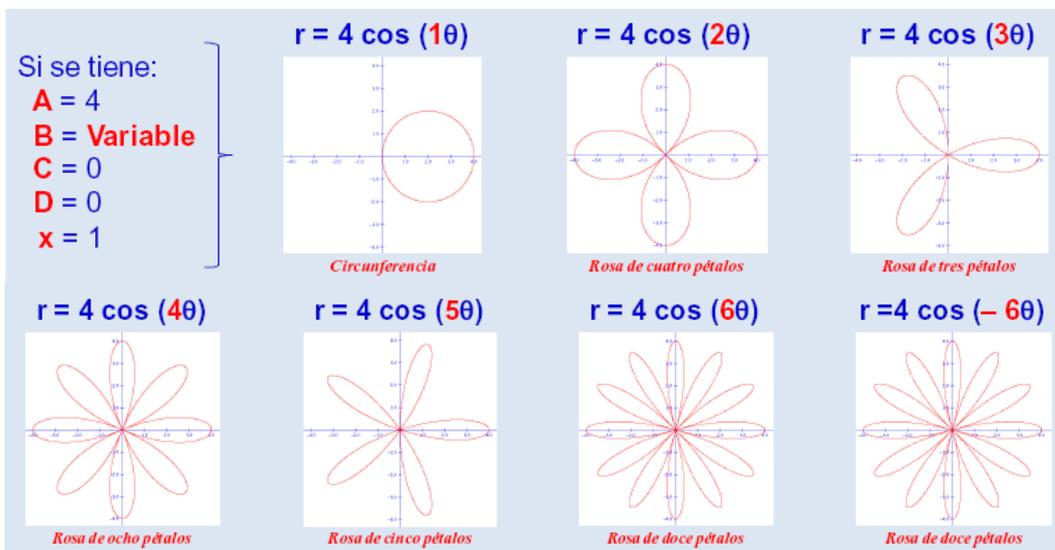
$$r^x = A \cos (B\theta + C) + D$$

donde, las literales x , A , B , C y D , son los parámetros que al ir cambiando de valor permiten obtener las ecuaciones de diferentes curvas características.

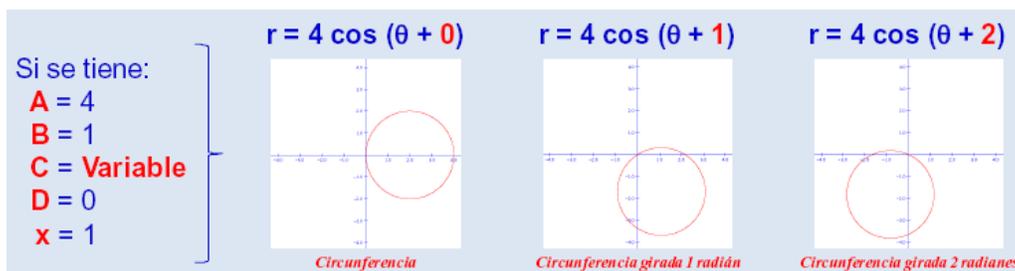
Así, si se inicia con una ecuación en donde $x=1$, $B=1$, $C=0$, $D=0$ y A va cambiando de valor, se obtienen las gráficas siguientes:

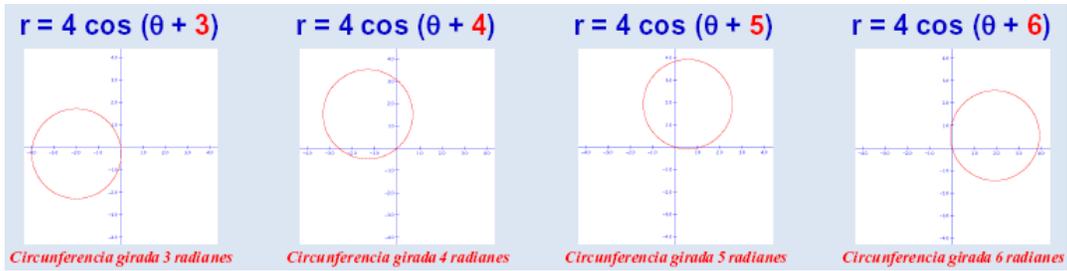


Como se puede observar, el valor de **A** modifica el tamaño de la curva y su posición, pero no su forma. Si ahora se deja constante el valor de **A** y se modifica el valor de **B**, se obtienen las gráficas siguientes:

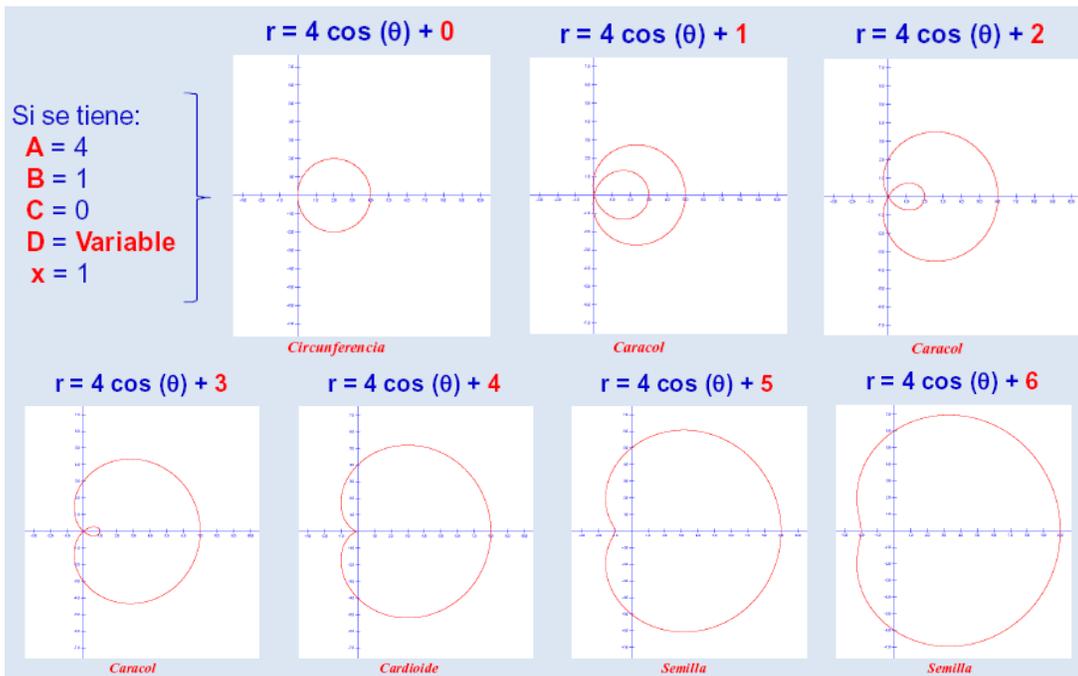


Como se puede observar, el valor de **B** modifica el número de pétalos pero no su tamaño, si el valor de **B** es impar se tienen **B** pétalos en la curva, pero si el valor de **B** es par se tienen **2B** pétalos en la curva. Si ahora se dejan constantes los valores de **A** y **B**, y se modifica el valor de **C**, se obtienen las gráficas siguientes:



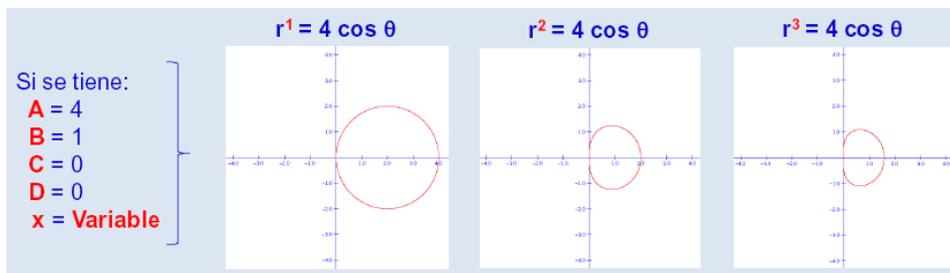


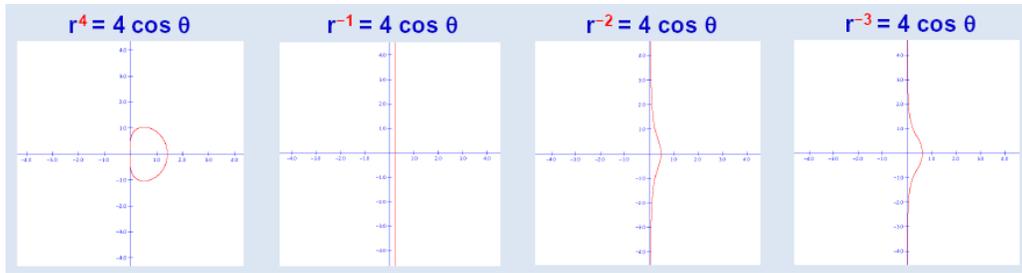
Como se puede observar, el valor de **C** hace girar la curva alrededor del polo, **C** radianes en sentido dextrógiro (horario), manteniendo su forma y tamaño. Si ahora se dejan constantes los valores de **A**, **B** y **C**, y se modifica el valor de **D**, se obtienen las gráficas siguientes:



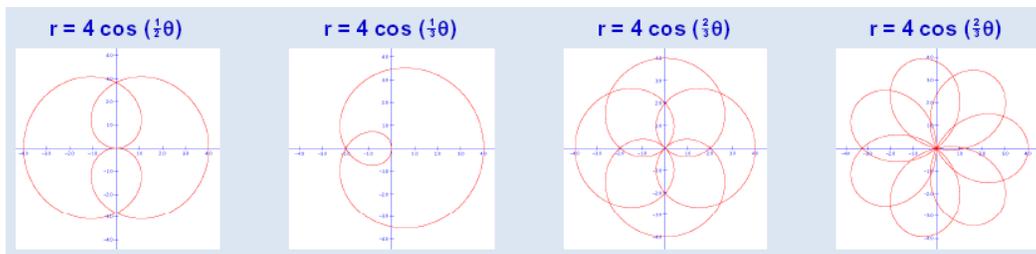
Como se puede observar, el valor de **D** cambia la forma y el tamaño de la curva, pudiéndose obtener circunferencias, caracoles, cardioides o “semillas”.

Si finalmente si se dejan constantes los valores de **A**, **B**, **C** y **D**, y se modifica el valor de **x**, se obtienen las gráficas siguientes:

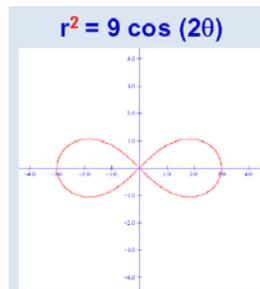




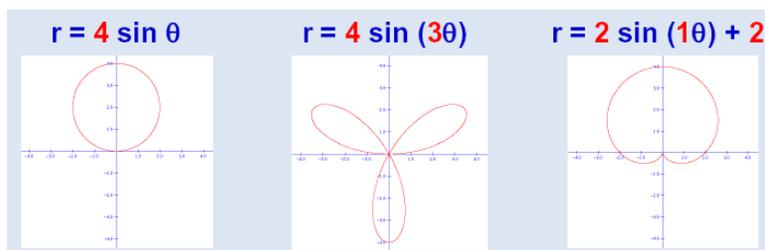
Como se puede observar, el valor de **x** cambia la forma de la curva llegando a obtener incluso una recta. En las graficas anteriores los valores que se emplearon para los diferentes parámetros fueron en todos los casos números enteros; sin embargo, también se pueden emplear fracciones. Un caso particular se presenta cuando se emplean fracciones como valores de **B** ya que pueden obtener curvas como las siguientes:



Por todo lo anterior, se propone que la ecuación $r^x = A \cos(B\theta + C) + D$, se utilice como una ECUACIÓN POLAR EN FORMA GENERAL para algunas de las curvas más características que se analizan comúnmente en el curso de Geometría Analítica. Cabe mencionar que esta ecuación también incluiría a la curva llamada lemniscata de Bernoulli como se muestra en la grafica siguiente:



Por otro lado, si se cambia la función **coseno** por la función **seno**, se obtendrían las mismas curvas pero alineadas o rotadas con respecto a la línea a 90° , como se muestra en los ejemplos siguientes:



Con todo el análisis anterior, se pudo elaborar un cartel que se exhibirá en este foro y que muestra como se ve afectada la curva al cambiar los valores de los diferentes parámetros

Es conveniente mencionar que aún queda mucho trabajo por realizar ya que principalmente se trabajó con valores enteros para los parámetros y falta por analizar completamente las gráficas de las funciones trigonométricas **seno** y **tangente**. Sin embargo, con lo analizado hasta el momento, se podrían identificar con facilidad curvas cuyas ecuaciones polares fuesen como las siguientes:

$$r = 5\cos(3\theta)$$

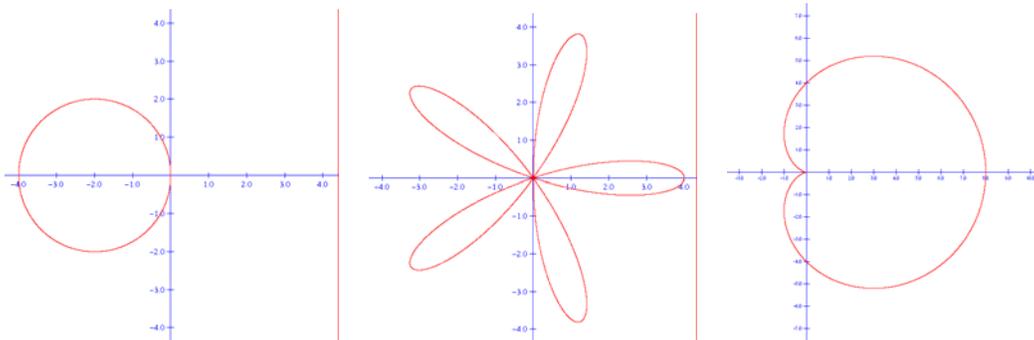
$$r = 3\cos(2\theta + (\pi/4))$$

$$r = 5\cos(\theta) + 3$$

$$r = 4\cos(\theta) + 4$$

$$r^2 = 25\cos(2\theta)$$

Así también, se podrían identificar algunas curvas cuyas gráficas fuesen las siguientes:



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El análisis realizado, permitió obtener una ecuación polar que contiene 5 parámetros, los cuales al cambiar de valor dan como resultado las ecuaciones de diferentes curvas características y de manejo común en el curso de Geometría Analítica impartido en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Se propone que la ecuación $r^x = A \cos(B\theta + C) + D$, sea utilice como una ECUACIÓN POLAR EN FORMA GENERAL para las curvas mencionadas anteriormente.

Las graficas de las curvas obtenidas con esta ecuación permitieron diseñar un cartel que muestra como se ve afectada la curva al cambiar los valores de los diferentes parámetros.

Dicha ecuación, se puede extrapolar para las funciones trigonométricas seno y tangente; sin embargo el análisis de estas funciones no se ha completado.

Se recomienda utilizar valores simples (números enteros o fracciones sencillas) en los parámetros para que las gráficas que se obtengan sean simples y no sean complicadas de dibujar.

BIBLIOGRAFÍA

1. Lehmann C. H, “Geometría Analítica”, Ed. Limusa, México, 1992.
2. Fuller G, Tarwater D, “Geometría Analítica”, 2ª ed. Pearson Education, México, 1999.
3. Filloy E, Yagüe F, Espinosa H, “Geometría Analítica”, Ed. Iberoamérica, México, 1992.
4. De Oteyza E, Osnaya E, Hernández C, Carrillo A. M, Ramírez A, “Geometría Analítica y Trigonometría”, Ed. Pearson Education, México, 2001.
5. Riddle D. F, “Analytic Geometry”, Ed. PSW Publishing, Boston, USA, 1996.