OPERADORES INVERSOS DE HEAVISIDE COMO PROPUESTA PARA REDUCCIÓN DE LOS CONTENIDOS TEMÁTICOS EN LA UNIDAD DE APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN LAS ESCUELAS DE INGENIERÍA

B. LÓPEZ CARRERA; PROFESOR-INVESTIGADOR; beneleci@gmail.com

E. SALINAS HERNÁNDEZ; PROFESOR-INVESTIGADOR; esalinas@ipn.mx

J. SANCHEZ JUAREZ; PROFESOR-INVESTIGADOR; jsanchezj@ipn.mx

RESUMEN

Uno de los problemas principales que se presentan durante el desarrollo de cualquier unidad de aprendizaje es la optimización y el manejo del tiempo.
El presente trabajo muestra un resumen sobre los operadores inversos de Heaviside; su motivación para proponerlos y la manera en la que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes no homogéneas. También se presenta una extensión a ecuaciones diferenciales homogéneas e incluso se discute su aplicación a ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables. El objetivo central es proponer la compactación de contenidos temáticos tradicionales como el método de coeficientes indeterminados, variación de parámetros, operador aniquilador e incluso ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes al usar el método de los operadores inversos. Esto generaría minimizar el tiempo invertido en la impartición de este tema.

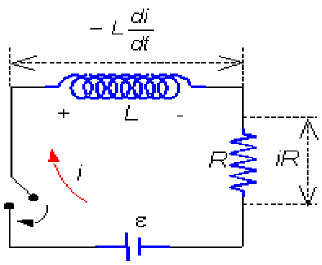
INTRODUCCIÓN

Para resolver una ecuación diferencial lineal, generalmente uno solo puede resolver de forma analítica las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, la forma de hacerlo es usando el método bien conocido de proponer la solución como una exponencial para resolver la parte homogénea. Esta propuesta nos lleva a resolver una ecuación algebraica, la determinación de sus raíces. La parte no homogénea se resuelve con el método llamado coeficientes indeterminados, el cual solo funciona para algunas funciones bien conocidas; polinomios de x, senos y cosenos, exponenciales o una combinación lineal de ellos o a lo más algunos productos de los mismos. Una variante de este método es el método del operador aniquilador, que básicamente se reduce al anterior y que su contribución principal es la correcta proposición de la forma de la solución.
Existe también un método llamado el de los operadores inversos, el cual solo se aplica a los mismos casos.
El método más general, el cual nos permite resolver los casos antes descritos y en general, cualquier tipo de función en la parte no homogénea es el método de variación de parámetros. El resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es un punto y aparte en la teoría, solo algunos casos particulares pueden ser resueltos, como la ecuación de Cauchy-Euler o la ecuación lineal de Legendre.
Este trabajo presenta una propuesta para minimizar el tiempo invertido en la distribución de los contenidos temáticos de la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales, al pretender compactar los métodos antes descritos en un solo método; el método de los operadores inversos. El trabajo inicia con un bosquejo de cómo Heaviside propuso esta teoría, posteriormente proponemos una forma diferente de interpretar el método y finalmente presentamos la forma en que pretendemos sea planteado y manejado el

contenido temático de las ecuaciones diferenciales lineales.

ANÁLISIS

Iniciaremos el trabajo con la presentación del análisis que abordó Heaviside en su momento sobre el cálculo funcional, la herramienta que desarrolló para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Tomemos el caso de un circuito RL, conectado a una Batería de corriente directa $E=E_o\Theta(t)$ donde $\Theta(t)$ es la función escalón.



La ecuación diferencial que modela dicho circuito es $E_o\Theta(t)-L\dfrac{di(t)}{dt}-iR=0$

Que podemos escribir como, quitando las dependencias explicitas en la corriente

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_o}{L}\Theta(t)$$

En término de operadores se escribe como

$$(D+k)i=\frac{E_o}{L}\Theta(t) \quad \text{Donde } k=R/L$$

La base fundamental del cálculo funcional es proponer que la derivada se puede manejar como cualquier otra variable, por lo tanto si quiero conocer la corriente, solo tengo que despejarla

$$i=\frac{1}{(D+k)}\frac{E_o}{L}\Theta(t)$$

Pero para poder manejarla la llamaremos p.

$$i=\frac{1}{p\left(1+\dfrac{k}{p}\right)}\frac{E_o}{L}\Theta(t)$$

$$i=p^{-1}\left(1+\left(\frac{k}{p}\right)\right)^{-1}\frac{E_o}{L}\Theta(t)$$

Si expandimos el binomio

$$i = p^{-1}\left(1+(-1)kp^{-1}+k^2\,\frac{p^{-2}}{2!}(-1)(-2)+k^3\,\frac{p^{-3}}{3!}(-1)(-2)(-3)+\ldots\right)\frac{E_o}{L}\,\Theta(t)$$

Simplificando y ordenado los términos obtenemos

$$i = \frac{E_o}{L}\,p^{-1}\left(1-kp^{-1}+k^2p^{-2}-k^3p^{-3}+k^4p^{-4}-\ldots\right)\Theta(t)$$

Que también se escribe como

$i = \frac{E_o}{L}\left(p-kp^{-2}+k^2p^{-3}-k^3p^{-4}+k^4p^{-5}-\ldots\right)\Theta(t)$ como se aprecia, debemos tener en cuenta que habrá varios productos de p y la función escalón, Lo que debemos abordar de la siguiente manera; si p es la derivada entonces, la inversa de p debe ser la integral. Por lo tanto

$$p^{-1}\Theta(t) = \int \Theta(t)dt = t \quad \text{al repetir la operación, esto es}$$

$$p^{-2}\Theta(t) = p^{-1}\left(p^{-1}\Theta(t)\right) = \int p^{-1}t\,dt = \frac{t^2}{2} \quad \text{análogamente}$$

$$p^{-3}\Theta(t) = \int p^{-1}\,\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{t^3}{(2)(3)}$$

en general tendremos

$$p^{-n}\Theta(t) = \frac{t^n}{n!}$$

Sustituyendo en la ecuación de la corriente

$$i = \frac{E_o}{L}\left(t-k\,\frac{t^2}{2!}+k^2\,\frac{t^3}{3!}-k^3\,\frac{t^4}{4!}+k^4\,\frac{t^5}{5!}-\ldots\right)\Theta(t) \quad \text{Multiplicando por k/k}$$

$$i = \frac{E_o}{kL}\left(tk-k^2\,\frac{t^2}{2!}+k^3\,\frac{t^3}{3!}-k^4\,\frac{t^4}{4!}+k^5\,\frac{t^5}{5!}-\ldots\right) \quad \text{Sumando un cero}$$

$$i = \frac{E_o}{kL}\left(1-\left[1-tk+k^2\,\frac{t^2}{2!}-k^3\,\frac{t^3}{3!}+k^4\,\frac{t^4}{4!}-k^5\,\frac{t^5}{5!}+\ldots\right]\right)$$

Al poner atención en la expansión, podemos escribir finalmente

$$i(t) = \frac{E_o}{kL}\left(1-e^{-kt}\right)$$

Que es la solución correcta de la ecuación diferencial.

Debido a que en el tratamiento de Heaviside aparece la exponencial, cuando Pincherle y Volterra formalizaron el análisis funcional todos sus teoremas la llevan presente. Existen también formas simplificadas del método que permiten resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes no homogéneas, particularmente dan la solución particular de la no homogénea [1],[2],[3],[4]. En este libro, los teoremas que dán orígen al cálculo funcional se proponen como ejercicio, pero lo abordan desde un punto de vista diferente[5]. De hecho, el método se basa en las no homogéneas y únicamente es aplicable a las ecuaciones lineales.

A continuación, abordaremos la solución desde un punto de vista diferente.

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$y' = 0$$

que escribimos como

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Obviamente uno ya conoce la solución, pero pensemos que queremos escribirla en forma de operadores, esto es

$$Dy = 0$$

Si quisiera resolver esta ecuación se podría pensar en un operador inverso $\frac{1}{D}$ tal que actuando sobre D se anule, sea su operador inverso y me permita despejar y. Suponiendo que tal operador existe tenemos que

$$\frac{1}{D}[Dy] = \frac{1}{D}0$$

$$y = \frac{1}{D}[0]$$

El operador inverso de la derivada ya existe, es obviamente la integral; tenemos que integrar cero, lo que nos proporciona una constante, la cual satisface la ecuación diferencial propuesta. Entonces podemos decir que

$$\frac{1}{D}[0] \equiv \int (0)dx = C$$

El aplicar el operador inverso a cero tiene sentido, puesto que el operador "actua sobre cero", no se multiplica. Este simple enfoque nos permite usarlo en las ecuaciones homogéneas

Supongamos que ahora la ecuación a resolver es la siguiente

$$y' = K$$

donde K es una constante cualquiera. De forma similar la podemos escribir como

$$Dy = K$$

Nuevamente, aplicando el operador inverso

$$y = \frac{1}{D}[K]$$

Realmente lo estamos aplicando a

$$y = \frac{1}{D}[K + 0]$$

Que me proporciona el resultado bien conocido, estamos suponiendo que es un operador lineal, tal como lo es la derivada

$$y = Kx + C$$

Puesto que integré un cero, integración que proporciona la constante de integración C.

Tomemos ahora la siguiente ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = 0$$

$p(x)$ es una función cualquiera de x. Resolviendo la ecuación muy sencilla llegamos a la siguiente solución

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Si la ecuación anterior la escribiera en forma de operadores, tenemos

$$(D + p(x))y = 0$$

As que si quisiera despejar a y, lo que tendria que hacer es postular la existencia de un operador $\frac{1}{(D + p(x))}$ que al ser aplicado a la ecuación anterior

$$\frac{1}{(D + p(x))}(D + p(x))y = \frac{1}{(D + p(x))}[0]$$

me da como resultado

$$y = \frac{1}{(D + p(x))}[0]$$

Y este operador debe actuar, segun el resultado ya conocido, como

$$\frac{1}{(D + p(x))}[0] \equiv e^{-\int p(x)dx}C$$

Nuevamente apreciamos la actuación del operador sobre cero.

Ahora tomemos una ecuación más general, sea la ecuación lineal

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Nosotros sabemos bien cuál es su solución, ya sea al haber usado factor integrante o variación de parámetros, tenemos que

$$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C$$

Si despejamos a y obtenemos

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right]$$

Si en la ecuación anterior, uso los operadores, la puedo escribir como

$$(D + p(x))y = q(x)$$

al aplicar el operador inverso, tendré

$$y = \frac{1}{(D + p(x))}[q(x)]$$

Por lo tanto este operador debe actuar como

$$\frac{1}{(D + p(x))}\rfloor q(x) \lfloor = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right]$$

Entonces propongamos lo siguiente

El operador $\frac{1}{(D+p(x))}$ *sobre una función* $\beta(x)$ *actua de la siguiente manera*

$$\frac{1}{(D+p(x))}\left[\beta(x)\right]=\frac{1}{(D+p(x))}\left[\beta(x)+0\right]\equiv e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}(q(x)+0)dx\right]$$

Que da como resultado

$$\frac{1}{(D+p(x))}\left[q(x)\right]=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

Este operador también puede actuar sobre cero, puesto que

$$\frac{1}{(D+p(x))}\left[0\right]=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}(0)dx\right]$$

$$=e^{-\int p(x)dx}\left[\int(0)dx\right]$$

$$\frac{1}{(D+p(x))}\left[0\right]=e^{-\int p(x)dx}C$$

Que es el resultado antes planteado para el caso homogéneo.
Lo interesante de abordar el operador inverso de esta forma es que no se restringe solo a ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, se puede apicar también a ecuaciones con coeficientes variables, ademas de permitir aplicarse también a ecuaciones homogeneas.
Por otro lado, es claro ver que este enfoque se reduce a lo que todos sabemos de los operadores inversos, es un caso particular cuando p(x) es una constante. Lo que podemos encontrar en la literatura, la simplificación es solo para ese caso particular.

El operador no conmuta. Solo lo hace cuando $p(x)$ es una constante. Puesto que en general

$$\left[D+p_2(x)\right]\left[D+p_1(x)\right]\neq\left[D+p_1(x)\right]\left[D+p_2(x)\right]$$

se debe tener cuidado al aplicarlo.
Asi, proponemos la siguiente afirmación
Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$$

Que pueda expresarse como

$$\left[D+p_n(x)\right]\left[D+p_{n-1}(x)\right]\left[D+p_{n-2}(x)\right]..\left[D+p_2(x)\right]\left[D+p_1(x)\right]y=\frac{g(x)}{a_n(x)}$$

Puede resolverse usando los operadores inversos de la siguiente manera

$$y=\left[\frac{1}{\left[D+p_1(x)\right]}\left[\frac{1}{\left[D+p_2(x)\right]}\left[\frac{1}{\left[D+p_3(x)\right]}\left[\ldots\left[\frac{1}{\left[D+p_n(x)\right]}\frac{g(x)}{a_n(x)}\right]\ldots\right]\right]\right]\right]$$

Observece con cuidado la forma de operar.
El aplicar el operador a un ejemplo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes estara por demás, aunque su aplicación no se restringe a unas cuantas funciones como lo afirma la teora conocida, se pueden resolver tambien ecuaciones que generalmente se resuelven con variación de parámetros.
El primer ejemplo que resolveremos es de ese tipo, una ecuación que resolvemos con variación de parámetros. Sea la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$$

Que se puede expresar como

$$(D+1)(D+2)y = \sin(e^x)$$

Recordemos que debemos quitar el operador $(D+1)$ lo cual se logra aplicando su inverso

$$\frac{1}{(D+1)}(D+1)(D+2)y = (D+1)\left[\sin(e^x)\right]$$

Que conduce a

$$(D+2)y = (D+1)\left[\sin(e^x)\right] = e^{-\int(1)dx}\left[\int e^{\int(1)dx}(\sin(e^x))dx\right]$$

nos lleva a

$$(D+2)y = e^{-x}\left[\int e^x \sin(e^x)dx\right]$$

Integrando

$$(D+2)y = e^{-x}\left[-\cos(e^x) + C_1\right]$$

$$(D+2)y = -e^{-x}\cos(e^x) + C_1 e^{-x}$$

Aplicando ahora el operador inverso de $(D+2)$

$$\frac{1}{(D+2)}(D+2)y = \frac{1}{(D+2)}\left[-e^{-x}\cos(e^x) + C_1 e^{-x}\right]$$

$$y = \frac{1}{(D+2)}\left[-e^{-x}\cos(e^x) + C_1 e^{-x}\right]$$

$$y = e^{-\int(2)dx}\left[\int e^{\int(2)dx}\left[-e^{-x}\cos(e^x) + C_1 e^{-x}\right]dx\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}\left[-e^{-x}\cos(e^x) + C_1 e^{-x}\right]dx\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[-\int e^{2x}e^{-x}\cos(e^x) + C_1\int e^{2x}e^{-x}dx\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[-\int e^{x}\cos(e^x)dx + C_1\int e^{x}dx\right]$$

Integrando encontramos la solución

$$y = e^{-2x}\left[-\sin(e^x) + C_1 e^x dx + C_2\right]$$

O bien

$$y = -e^{-2x}\sin(e^x) + C_1 e^{-x} dx + C_2 e^{-2x}$$

Solución que obtenemos, como ya mencioné, al usar el método de variación de parámetros. El haber resuelto este pequeño problema nos muestra lo sencillo que es usar los operadores inversos y podemos compararlo muy bien con el metodo regular usado.

El siguiente ejemplo es bastante ilustrativo

Tomemos la ecuación diferencial

$$xy'' - (x\tan x + 1)y' + (\tan x - x\sec^2 x)y = x^2$$

Dividiendo entre x

$$y'' - (\tan x + \frac{1}{x})y' + (\frac{\tan x}{x} - \sec^2 x)y = x$$

$$y'' - y'\tan x - \frac{1}{x}y' + \frac{\tan x}{x}y - y\sec^2 x = x$$

Nevamente, como

$$D(y\tan x) = y\sec^2 x + y'\tan x$$

La ecuación la podemos ecribir como

$$D(y') - D(y\tan x) - \frac{1}{x}y' + \frac{\tan x}{x}y = x$$

$$D(y' - y\tan x) - \frac{1}{x}(y' - y\tan x) = x$$

$$(D - \frac{1}{x})(y' - y\tan x) = x$$

Finalmente se escribe como

$$(D - \frac{1}{x})(D - \tan x)y = x$$

Aplicando el operador que anula a $(D - \frac{1}{x})$

$$\frac{1}{(D - \frac{1}{x})}\left[(D - \frac{1}{x})(D - \tan x)y\right] = \frac{1}{(D - \frac{1}{x})}[x] = \frac{1}{(D - \frac{1}{x})}[x + 0]$$

$$(D - \tan x)y = e^{\int\frac{dx}{x}}\left[\int e^{-\int\frac{dx}{x}}(x + 0)dx\right]$$

$$= x\left[\int dx + C_1\right] = x[x + C_1]$$

$$(D - \tan x)y = x^2 + C_1 x$$

Aplicando el operador inverso $\frac{1}{(D - \tan x)}$

$$y = \frac{1}{(D - \tan x)}\left[x^2 + C_1 x + 0\right]$$

$$y = e^{\int \tan x dx}\left[\int e^{-\int \tan x dx}(x^2 + C_1 x + 0)dx\right]$$

$$y = \sec x\left[\int x^2 \cos x dx + C_1 \int x \cos x dx + C_2\right]$$

$$y = \sec x\left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_1 x \sin x + C_1 \cos x + C_2\right]$$

Finalmente, la solución es

$$y(x) = x^2 \tan x + 2x - 2\tan x + C_1 x \tan x + C_1 + C_2 \sec x$$

La verificación no es nada sencilla, as que no la pondré explisitamente, pero ya se ha verificado, edectivamente la solución propuesta satisface la ecuación diferencial inicial. La ecuación diferencial propuesta se corrió en Mathematica, desafortunadamente no la pudo resolver.

Conclusión

Como ya se habrá notado, el problema que presenta el método es la solución de las integrales, de hecho, las ecuaciones que se ponen como ejemplo fueron cuidadosamente seleccionadas para poder resolverse. Es obvio que las únicas ecuaciones que se pueden resolver son las que se pueden factorizar como producto de los operadores sencillo de primera especie, la forma de actuar de los operadores como $\frac{1}{D^2 + p(x)}$ o incluso los operadores de la forma $\frac{1}{D^2 + p_1(x)D + p_2(x)}$ es desconocida, y es un tema de invastigación de los llamados métodos de invastigación. Pero como lo mencionamos al inicio, la motivación principal de usar estos operadores es proponer una forma alternativa de resolver las ecuaciones lineales e incluso proponerlo como una opción general y suprimir los tópicos de coeficientes indeterminados, operador aniquilador y variación de parámetros. La elección está en sus manos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Rainville Earl D., “Ecuaciones diferenciales elementales”, Editorial trillas, 1969.
[2] Hutchinson C. A., “An operational formula”, Amer. Math. Monthly, 40, 1933, pgs 482-483.
[3] Hutchinson C. A., “Note on an operational formula”, Amer. Math. Monthly, 44, 1937, pgs 371-372.
[4] Frank A. Jr., “Theory and problems of differential equations”, Schaum Publishing Co., 1952.
[5] Coddington E. A., “An introduction to ordinary differential equations”, Dover Publications, 1989.