La Docencia y la importancia de la investigación en Ingeniería

J.M. CARBALLO JIMÉNEZ. Profesor Investigador de ESCOM IPN. jcarballojimenez@gmail.com

J. GARCÍA MARTINEZ. Investigador de la ESFM-IPN. bucefalot@yahoo.com.mx

J.A.JUÁREZ RAMÍREZ. Profesora Investigadora de la ESCOM IPN. jjuarezr@ipn.mx

RESUMEN

Actualmente en el mundo globalizado se ha alcanzado un desarrollo científico y tecnológico sorprendente. Las grandes potencias industrializadas nos muestran a los países en vías de desarrollo que es evidente encontrar las estrategias para impulsar y motivar tanto a los estudiantes de Ingeniería como a los ingenieros para crear tales estrategias. En este trabajo se presenta una aplicación de la ecuación de Schrödinger generalizada a la solución de un problema de ingeniería que está relacionado con el modelado de una ecuación del "lodo" (del inglés wet soil) que aparece en la mecánica de fluidos y que representa una aplicación importante en algunas ramas de la ingeniería aplicada. El propósito es mostrar cómo se vincula la investigación con los problemas de ingeniería expuestos en el aula. En este sentido se considera la ecuación del lodo y se relaciona con la ecuación de Schrödinger para aplicar la técnica de solución vía la transformación generalizada de Darboux.

1. INTRODUCCIÓN

La transformación de Darboux es una herramienta que permite generar casos exactamente solubles a la ecuación de Schrödinger. La característica clave es la transformación de una ecuación diferencial en otra ecuación diferencial de la misma forma [1]. En su primer versión [2] la transformación de Darboux es aplicable a la ecuación estacionaria de Schrödinger. En algún momento [1] se descubrió que la aplicabilidad de la transformación de Darboux podría ampliarse al caso dependiente del tiempo y que era equivalente al formalismo de la mecánica cuántica supersimétrica [3]. La transformación de Darboux de orden arbitrario para una ecuación de Schrödinger generalizada dependiente del tiempo representa una herramienta matemática muy importante, por los casos de aplicación donde aparece. Ejemplos de tales ecuaciones que permiten la transformación de Darboux son la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con derivada de primer orden, la ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición o la ecuación de Schrödinger estacionaria con energía ponderada. Las transformaciones de Darboux de estas ecuaciones particulares presentan varias similitudes, lo que ha permitido la construcción de una transformación de Darboux más general. En la sección 2 se presenta un panorama general de la transformación de Darboux para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo estándar. En la sección 3 planteamos los resultados de la transformación de Darboux para la ecuación generalizada de Schrödinger en (1+1) dimensiones [4]. En la sección 4 se presenta la ecuación del lodo [5] y se logra la identificación con la ecuación generalizada de Schrödinger de la sección anterior.

2. ANTECEDENTES

La transformación de Darboux. Considérese la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\psi_t + \frac{1}{2m}\psi_{xx} - V\psi = 0, \qquad (1)$$

donde m es una constante que denota la masa estándar y $V = V(x,t)$ es el potencial.
La transformación de Darboux de *n*-ésimo orden para una solución ψ de la ecuación (1) esta definida como

$$D_{n,(u_j)}(\psi) = L\frac{W_{n,(u_j),\psi}}{W_{n,(u_j)}}, \qquad (2)$$

donde $L = L(t)$ es una función arbitraria que depende únicamente del tiempo, la familia (u_j) de n soluciones auxiliares de (1) son tales que el conjunto $(u_1, u_2, ..., u_n, \psi)$ es linealmente independiente, y $W_{n,(u_j)}$,$W_{n,(u_j),\psi}$ denotan los Wronskianos de las familias (u_j) y de (u_j, ψ) respectivamente. Nótese que estos Wronskianos dependen de las variables x y t.
Ahora bien la función

$$\phi = D_{n,(u_j)}(\psi),$$

es solución de la ecuación

$$i\phi_t + \frac{1}{2m}\phi_{xx} - U\phi = 0, \qquad (3)$$

donde el nuevo potencial *U* puede escribirse como

$$U = V + i\frac{L'}{L} - \frac{1}{m}\left[\log\left(W_{n,(u_j)}\right)\right]_{xx} \qquad (4)$$

De ésta manera la transformación de Darboux de *n*-ésimo orden establece una relación entre la ecuación (1) que identificaremos con las siglas TDSE (Time Dependent Schrödinger Equation) con la ecuación (3), que es de la misma forma pero con el nuevo potencial *U* dado por (4).
La transformación de Darboux de *n*-ésimo orden dada por la ecuación (2) tiene las siguientes propiedades fundamentales:

a) Se puede escribir como una iteración de n transformaciones de Darboux de primer orden[6]
b) Existe una condición sobre la función *L*, tal que el potencial transformado *U* deberá ser una función real valuada.[7]

En la ecuación [4] se muestra que estas propiedades se mantienen al considerar una ecuación generalizada de Schrödinger

3. ECUACIÓN GENERALIZADA DE SCHRÖDINGER

Una ecuación generalizada de Schrödinger en (1+1) dimensiones es una ecuación cuya estructura matemática es la siguiente:

$$ih(x,t)\psi_t + f(x,t)\psi_{xx} + g(x,t)\psi_x - V(x,t)\psi = 0, \tag{5}$$

donde los subíndices denotan derivación parcial, y todas las funciones *h*, *f*, *g* *y* *V* dependen de las variables *x y t*. Nótese que la función *h* no tiene nada que ver con la constante de Planck que en este caso y por simplicidad se considera igual a la unidad. Se puede entonces observar como la ecuación (5) se generaliza en la ecuación (1) conocida como la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, fundamentalmente por la presencia del nuevo termino que contiene a la primera derivada parcial.

3.1. La transformación de Darboux

Sea ψ una solución de la ecuación (5) y sea (u_j) una familia de *n* soluciones auxiliares de la ecuación (5), donde además la familia (u_j, ψ) es linealmente independiente. Definimos la transformación de Darboux de *n*-ésimo orden de la solución ψ como:

$$B_{n,(u_j)}(\psi) = L\left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{W_{n,(u_j),\psi}}{W_{n,(u_j)}}, \tag{6}$$

donde $L = L(t)$ es una función de la variable *t.* Ahora bien la función

$$\hat{\phi} = B_{n,(u_j)}(\psi),$$

es solución de la siguiente ecuación generalizada de Schrödinger

$$ih(x,t)\hat{\phi}_t + f(x,t)\hat{\phi}_{xx} + g(x,t)\hat{\phi}_x - U(x,t)\hat{\phi} = 0. \tag{7}$$

Con la función *U = U(x,t)* dada explícitamente por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} U = {} & V + iv'h\frac{L'}{L} - 2\sqrt{fh}\left[\sqrt{\frac{f}{h}}\left[\log\left(\left(\frac{f}{hv'}\right)^{\frac{k}{2}} W_{n,(u_j)}\right)\right]_x\right]_x \\ & + 2nf\left(F_{xx} + \frac{F_x}{2}\left[\log\left(\frac{f}{h}\right)\right]_t\right), \end{aligned} \tag{8}$$

donde *k = n(n-1)/2,* v' es la derivada de una función arbitraria $v = v(t)$ y *F = F(x,t)* viene dada por

$$F = -\int\left(\frac{g}{2f} + \frac{h_x}{4h} - \frac{f_x}{4f} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{h}{v'f}}\left[\sqrt{v'}\int\sqrt{\frac{h}{f}}\,dx\right]_t\right)dx. \tag{9}$$

3.2. Transformación de Darboux de primer orden.

En el caso particular de una transformación de Darboux de primer orden *(n = 1)*, la ecuación (6) se expresa como sigue:

$$B_{1,(u_j)}(\psi) = L\left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{(u_1)_x}{u_1}\psi + \psi_x\right) \tag{10}$$

y el nuevo potencial $U = U(x,t)$ de la ecuación (7) está dado por:

$$U = V + iv'h\frac{L'}{L} - 2\sqrt{fh}\left[\sqrt{\frac{f}{h}}\left[\log(u_1)\right]_x\right]_x + 2f\left(F_{xx} + \frac{F_x}{2}\left[\log\left(\frac{f}{h}\right)\right]_t\right). \tag{11}$$

En resumen la transformación de Darboux (6) relaciona las soluciones ψ y $B_{n,(u_j)}(\psi)$ de las ecuaciones generalizadas de Schrödinger, ecuaciones (5) y (7) respectivamente.

4. LA ECUACIÓN DEL LODO

Una ecuación que aparece en el modelado de la tierra mojada (wet soil) lodo es

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \beta\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \delta\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{12}$$

H es la presión hidrostática y $\alpha, \beta, \delta, \psi, \frac{\partial F}{\partial t}$ son ciertas funciones de la posición y el tiempo.

Si $\frac{\alpha}{\delta} = cte,$ mediante la transformación

$$H = \frac{\delta}{\alpha}\ln\varphi \tag{13}$$

la ecuación (12) se transforma en la ecuación lineal

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \delta\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\delta}\varphi\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

al multiplicar por i, y expresando las derivadas en términos de subíndices la ecuación (14) se expresa como

$$i\varphi_t + i\delta\varphi_{xx} + i\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi_x + \frac{\alpha}{\delta}i\frac{\partial F}{\partial t}\varphi = 0 \tag{15}$$

Comparando (15) con (5) al hacer

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ f &= i\delta \\ g &= i\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ V &= -i\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{16}$$

se obtiene una ecuación de Schrödinger generalizada de la misma estructura que la ecuación (5). Por lo que de acuerdo a la transformación de Darboux dada por la ecuación (6) podemos escribir [4]

$$\begin{aligned} B_{n,(vj)}(\varphi) &= L\left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{W_{n,(vj),\varphi}}{W_{n,(vj)}} = \hat{\varphi} \\ B_{n,(vj)}(\varphi) &= L(i\delta)^{\frac{n}{2}}\frac{W_{n,(vj),\varphi}}{W_{n,(vj)}} \end{aligned} \tag{17}$$

De la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{gathered} \hat{H} = \frac{\delta}{\partial}\log(\hat{\varphi}) = \frac{\delta}{\alpha}\log\left[L(i\delta)^{\frac{n}{2}}\frac{W_{n,(vj),\varphi}}{W_{n,(vj)}}\right] \\ \varphi = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}H\right) \\ vj = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}U_j\right), \quad j = 1,2\ldots n,\ donde \\ U_1, U_2 \ldots U_n \end{gathered} \tag{18}$$

son soluciones de la ecuación de lodo inicial.

4.1. Simplificación de los determinantes

$$n = 1: \quad \hat{H} = \frac{\delta}{\alpha}\log\left[L\sqrt{i\delta}\,\frac{W_{1,(v1),\varphi}}{W_{1,(v1)}}\right] \tag{19}$$

donde

$$W_{1,(v_1)} = \det(v_1) = v_1 = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}U_1\right)$$

y

$$\begin{aligned} W_{1,(v_1),\varphi} &= \det\begin{pmatrix} v_1 & \varphi \\ (v_1)_x & \varphi_x \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \exp(\frac{\alpha}{\delta}U_1) & \exp(\frac{\alpha}{\delta}H) \\ \exp(\frac{\alpha}{\delta}U_1)\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x & \exp(\frac{\alpha}{\delta}H)\frac{\alpha}{\delta}(H)_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Desarrollando este determinante de orden 2x2 y simplificarlo obtenemos:

$$W_{1,(v_1),\varphi} = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}(U_1 + H)\right)\frac{\alpha}{\delta}(H_x - (U_1)_x) \tag{21}$$

Esto implica que

$$\hat{H} = \frac{\delta}{\alpha}\log\left[L\sqrt{i\delta}\exp(\frac{\alpha}{\delta}H)\frac{\alpha}{\delta}(H_x - (U_1)_x)\right] \tag{22}$$

O bien si escribimos

$$\hat{L} = \sqrt{i}\,\frac{\alpha}{\delta}L \tag{23}$$

se obtiene

$$\hat{H} = \frac{\delta}{\alpha}\log\left[\hat{L}\sqrt{\delta}\exp(\frac{\alpha}{\delta}H)\frac{\alpha}{\delta}(H_x - (U_1)_x)\right] \tag{24}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\delta}H\right) + \frac{\delta}{\alpha}\log\left[i\sqrt{\delta}(H_x - (U_1)_x)\right] \\ \hat{H} &= H + \frac{\delta}{\alpha}\log\left[i\sqrt{\delta}(H_x - (U_1)_x)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

4.2. Transformación de primer orden

Para *n* arbitrario:

$$W_{n,(v_1)} = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ (v_1)_x & (v_2)_x & \cdots & (v_n)_x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{x,n-1} & (v_2)_{x,n-1} & \cdots & (v_n)_{x,n-1} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$v_1 = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta} U_1\right),$$

$$(v_1)_x = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta} U_1\right)\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x$$

$$(v_1)_{xx} = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta} U_1\right)\left[\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x\right]^2 + \exp\left(\frac{\alpha}{\delta} U_1\right)\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_{xx}$$

4.3. Potencial transformado

Potencial inicial

$$V = -i\frac{\alpha}{\delta}F_t \tag{27}$$

Potencial transformado para *n = 1*

$$U = V + i\frac{L'}{L} - 2\sqrt{i\delta}\left[\sqrt{i\delta}\left[\log(v_1)\right]_x\right]_x + 2i\delta\left(G_{xx} + \frac{G_x}{2}\left[\log(i\delta\right]_t\right) \tag{28}$$

con

$$G = -\int\left(\frac{i\beta\psi_x}{2i\delta} - \frac{i\delta_x}{4i\delta} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{i\delta}}\left[\int\sqrt{\frac{1}{i\delta}}dx\right]_t\right)dx$$

O bien simplificando los subíndices *i*

$$G = -\int\left(\frac{\beta\psi_x}{2\delta} - \frac{\delta_x}{4\delta} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{\delta}}\left[\int\sqrt{\frac{1}{i\delta}}dx\right]_t\right)dx \tag{29}$$

donde G es la función F [4].

A partir de la ecuación (28)

$$-i\frac{\alpha}{\delta}\hat{F}_t = -i\frac{\alpha}{\delta}F_t + i\frac{L'}{L} - 2\sqrt{i\delta}\left[\sqrt{i\delta}\left[\log\left(\exp\left(\frac{\alpha}{\delta}U_1\right)\right)\right]_x\right]_x \tag{30}$$

donde

$$V = -i\frac{\alpha}{\delta}F_t \tag{31}$$

$$-i\frac{\alpha}{\delta}\hat{F}_t = -i\frac{\alpha}{\delta}F_t + i\frac{L'}{L} - 2\sqrt{i\delta}\left[\sqrt{i\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x\right]_x \tag{32}$$

De donde

$$\hat{F}_t = F_t - \frac{\delta}{\alpha}\frac{L'}{L} - 2i\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{i\delta}\left[\sqrt{i\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x\right]_x \quad \text{(primer orden)} \tag{33}$$

4.4 Ecuación del lodo inicial

Los resultados para n = 1 (primer orden) son:

$$H_t + \alpha H_x{}^2 + (\beta\psi_x)H_x + \delta H_{xx} + F_t = 0 \tag{34}$$

4.5 Ecuación del lodo transformada

$$\hat{H}_t + \alpha\hat{H}_x{}^2 + (\beta\psi_x)\hat{H}_x + \delta\hat{H}_{xx} + \hat{F}_t = 0, \tag{35}$$

donde

$$\hat{H} = \frac{\delta}{\alpha}\log\left[L\sqrt{i\delta}\,\frac{W_{n,(v_j),\varphi}}{W_{n,(v_j)}}\right] \tag{36}$$

con

$$\begin{gathered} \varphi = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}H\right), \\ v_j = \exp\left(\frac{\alpha}{\delta}U_j\right), \quad j = 1,\ldots,n \end{gathered} \tag{37}$$

y

$$\hat{F}_t = F_t - \frac{\delta}{\alpha}\frac{L'}{L} - 2i\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{i\delta}\left[\sqrt{i\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}(U_1)_x\right] \tag{38}$$

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado la forma de lograr que la ecuación de Schrödinger generalizada dependiente del tiempo admite una transformación de Darboux generalizada manteniendo las propiedades fundamentales de la transformación de Darboux convencional. Así mismo y como parte medular de este trabajo se presenta la ecuación del lodo para la cual es posible realizar un mapeo con la ecuación generalizada de Schrödinger y aplicar estos resultados a tal ecuación en la inteligencia de mostrar como el comportamiento de ciertos fenómenos a nivel macroscópico pueden ser modelados vía el desarrollo de una técnica de la mecánica cuántica super-simétrica. Finalmente el objetivo de este trabajo es acercar a los estudiantes de Ingeniería al fascinante mundo de la investigación científica.

6. REFERENCIAS

[1] Matveev V B and Salle M A 1991 *Darboux transformations and Solitons (Berlin: Springer).*

[2] Darboux MG 1882 Sur une proposition relative aux equations linéaires C,R.Acad. Sci., Paris **94** 1456-9.

[3] Bagrov V G and Samsonov B F 1996 Supersymmetry of a nonstatiorary Schrödinger equation. Phys. Lett. A **210** 60-4.

[4] Schulze-Halberg A, Pozdeeva E and Suzko A 2009 Explicit Darboux transformations of arbitrary order for generalized time-dependent Schrödinger equations. J.Phys, A Math. Theor. **42** 115211.

[5] Florin V A 1948 *Some of the simplest nonlinear problems arising in the consolidation of wet soil.* Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Otd. Tehn. 1389-1402.

[6] Arrigo DJ and Hickling F 2003 An nth-order Darboux transformations for the one-Dimensional time-dependent Schrödinger equation J. Phys. A: Math. Gen **36** 1615-21.

[7] Bagrov V G and Samsonov B F 1997 Darboux transformation of the Schrödinger equation. Phys. Part. Nucl **28** 374-97.