METODOLOGIA PARA HALLAR SOLUCIONES RESTRINGIDAS A LA ECUACION DE RICCATI

E. SALINAS HERNANDEZ; PROFESOR- INVESTIGADOR ; esalinas@ipn.mx

B. LOPEZ CARRERA; PROFESOR- INVESTIGADOR; beneleci@gmail.com

J. SANCHEZ JUAREZ; PROFESOR-INVESTIGADOR;jsanchezj @ipn.mx

RESUMEN

De la literatura se sabe que para poder hallar la solución a la ecuación diferencial de *Riccati*, se debe de conocer necesariamente una solución partícular a dicha ecuación, ya que de otra forma (en principio) no es posible. En este trabajo proporcionamos un camino, sobre como poder generar Ecuaciones Diferenciales Tipo *Riccati* , las cuales cuentan ya con su solución de manera directa, a través de una fórmula generál ; siempre y cuando se satisfaga una restricción que se tiene que cumplir entre los coeficientes de la ecuación y el término libre.

INTRODUCCION

En la actualidad como hace tres siglos, cuando *Jacopo Francesco Riccati* hablara de su famosa ecuación (aunque se dice que en realidad esta fue propuesta por *Daniel Bernoulli*) sigue generando encrusijadas en el desarrollo de las ingenierías, la Física y sobre todo en matemáticas, ya que hasta el momento no ha sido resuelta de manera analítica. La motivación de éste trabajo radica en otorgar un mecanismo para poder generar ecuaciones diferenciales tipo *Riccati*, las cuales una vez que satisfacen la restricción requerida; la solución a ésta se puede encontrar de manera inmediata a través de una fórmula general, lo cual puede resultar didáctico en un curso de ecuaciones diferenciales. Es importante mencionar que en ninguno de los libros de la literatura clásica aparecen resultados parecidos, además de que en todos ellos se ataca la ecuación de *Riccati* de la forma tradicional, es decir dada una solución particular a dicha ecuación, se emplea una transformación adecuada la cual lleva dicha ecuación de *Riccati* a una de tipo *Bernoulli*, la cual es soluble de manera directa.

ANALISIS

Antecedentes

Método convencional para la solución a la ecuación de Riccati

Sea la ecuación diferencial tipo Riccati en su forma general

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

Supóngase que $y_1(x)$, es una solución partícular, luego se propone que $z = y_1 + w$ con ello la expresión anterior se transforma en

$$w' + Pw + Qw^2 + 2Qwy_1 + y'_1 + Py_1 + Qy_1{}^2 = R$$

luego como y_1 es solución particular, dicha expresión se reduce a

$$w' + w(P + 2Qy_1) = -Qw^2$$

Ésta es una ecuación tipo Bernoulli, la cual se puede resolver con un el cambio de variable $z = w^{1-n}$, en este caso $n = 2$, entonces la ecuación previa se transforma en

$$z' - (P + 2Qy_1)z = -Q$$

y cuya solución esta dada por

$$z = -e^{\int (P+2Qy_1)dx} \int e^{-\int (P+2Qy_1)dx} Q dx + ce^{\int (P+2Qy_1)dx}$$

y finalmente

$$y = y_1 + \frac{e^{-\int (P+2Qy_1)dx}}{c + \int e^{-\int (P+2Qy_1)dx} Q dx}$$

Deducción de la fórmula

-A partir de la ecuación diferencial tipo *Riccati* en su expresión general

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

Considerese la siguiente transformación $y = uz^{\frac{1}{2}}$, donde u es una función a encontrar.

A partir de ahí, la expresión anterior se transforma en

$$z' + \frac{2z}{u}(u' + Pu) + 2uQz^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{u}z^{\frac{1}{2}}R$$

impongamos que se cumpla $u' + Pu = 0$, lo que implica $u = e^{-\int Pdx}$, luego la ecuación a resolver es

$$z' + 2uQz^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{u}z^{\frac{1}{2}}R$$

Ahora si escogemos que $\beta = z^{\frac{1}{2}}$, con ello

$$\beta' + uQ\beta^2 - \frac{R}{u} = 0$$

Si pedimos que $R = Qu^2$, entonces la expresión se reduce a

$$\beta' + uQ\beta^2 - Qu = 0$$

o también

$$\beta' = uQ[1 - \beta]^2$$

la cuál es separable, y cuya solución es

$$\beta = \frac{ce^{2s} - 1}{ce^{2s} + 1}$$

Donde $s = s(x) = \int Qudx$; por otro lado si recordamos que $y = uz^{\frac{1}{2}} = u\beta$, entonces resulta que

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\frac{ce^{2\int Qe^{-\int Pdx}dx} - 1}{ce^{2\int Qe^{-\int Pdx}dx} + 1}\right]$$

al hacer $c = e^{2k}$, llegamos a una expresión más grata

$$y = e^{-\int Pdx}\tanh\left[\int Qudx + k\right]$$

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = Q(x)e^{-2\int P(x)dx}$$

Como puede observarse, en este tipo de ecuaciones tipo *Riccati* no se requiere alguna solución particular, como se maneja en la literatura clásica. También es importante señalar que este resultado se encuentró reportado en el *Handbook solution to differential equation*, el cuál en principio maneja otros argumentos para llegar al mismo resultado.

Ejemplo:

Dada la siguiente ecuación diferencial tipo *Riccati*,

$$y' + e^{\lambda x} Tanh(e^{\lambda x}) y + Cos^{\frac{-1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \left[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}\right] y^2 = Cos^{\frac{-1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \left[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}\right] Cos^{\frac{2}{\lambda}}(e^{\lambda x})$$

donde se identifican $P(x) = e^{\lambda x} Tanh(e^{\lambda x})$, $Q(x) = Cos^{\frac{-1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \left[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}\right]$ y

$$R(x) = Q(x) e^{-2\int P(x)dx} = Cos^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \left[x^{\alpha} - \frac{\beta}{4x^{\gamma}}\right] Cos^{\frac{2}{\lambda}}(e^{\lambda x})$$

Cuya solución está dado por

$$y = Cos^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}) \mathrm{Tanh} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\beta+1}{4(\gamma+1)x^{\gamma+1}} + k\right]$$

CONCLUSIONES

Como puede apreciarse, el método anterior proporciona un mecanismo para construir toda una gama de ecuaciones diferenciales tipo *Riccati*, las cuales tienen su solución de manera directa a través de una fórmula deducida en este trabajo; todas estas ecuaciones, se salen de la manera tradicional en su tratamiento para la obtención de su solución, ya que no requieren de la solución partícular como es usual en el tratamiento.

Por otro lado, la desventaja que se tiene, radica en el hecho de que el número de ecuaciones a resolver ya no es tan arbitrario, como uno quisiera, ya que estas deberán de satisfacer las restricciones pedidas.

BIBLIOGRAFÍA

1.- Dennis Zill “ Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones”, Grupo editorial Iberoamérica, tercera edición, Julio 2001.

2.- Murray R. Spiegel “ Ecuaciones diferenciales aplicadas”.Prentice-Hall,1983.

3.- Paul Blanchard. “Ecuaciones diferenciales” Editorial Thompson, 1999.