ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS A UN MODELO DE COMPETENCIAS

Teodoro M. Ceballos; Coordinador de Proyectos de Investigación de la DCB; ceballos1492@yahoo.com.mx
Jesús López Sánchez; Profesor de Enseñanza Superior; lsjesus@hotmail.com
Martín Lazo Toriz; Estudiante del ITTLA; martin_lazo@hotmail.com

Temática 5. Funciones académica: Reporte de investigación.
Palabra clave: competencias.

ANTECEDENTES DEL PROYECTO

En este trabajo, nos complace poner a discusión de profesores y estudiantes latinoamericanos; ésta, que para nosotros es una propuesta de orientaciones metodológicas y científicas para la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden y primer grado (*EDOPOPG*). Iniciaremos los trabajos haciendo una breve revisión de lo que algunas organizaciones han y están haciendo actualmente.

Por ejemplo, uno de los propósitos de la Organization for Economic Co-operation and Develoment (*OECD*), al evaluar los sistemas educativos a través de su Programme for International Student Assesment (*PISA*), es el de comprobar la capacidad del aprendedor para comprender el papel que juegan las matemáticas hoy día y, muestre una tendencia por apropiarse de ellas, de forma tal que, satisfaga sus necesidades como parte de la sociedad. Como consecuencia, PISA dispone una especial importancia en valorar su conocimiento matemático e inteligencia para resolver sus problemas del mundo real (*MR*) y, profesionales.

En esta dirección, los resultados que obtuvieron en su evaluación en el 2000, provocaron una fuerte polémica en *educación matemática*, y en la forma en que ésta, interrelaciona las matemáticas con los problemas que surgen del MR. Creemos que la modelación matemática (*MM*) y las aplicaciones de éstas, son sin duda, la respuesta más cercana a este debate, por parte de los matemáticos. La evaluación del PISA para el 2003, se amplía en la resolución de problemas del MR y de la matemática misma (*OECD, 2003*). Estos hechos, han focalizado la importancia de la MM en los procesos de aprendizajes.

También, el investigador Gil, G. (S.F.), sostiene que el programa PISA tiene su origen por el interés que tienen los gobiernos de los países que pertenecen a la OECD y, por el control de los recursos destinados a los sistemas educativos y sus contenidos. Así que, porque los gobiernos se encuentran comprometidos con la educación básica, el interés de las evaluaciones está centrado en determinar el nivel de conocimiento que adquieren los aprendedores, además, de su capacidad para utilizarlo en la resolución de problemas del mundo real (*MR*).

El origen del uso de la modelación en el Discurso Matemático Escolar (*DME*), con una focalización opuesta a la extendida aquí, podría atribuírsele a Hans Freudenthal (*1905-1990*) y su fenomenología didáctica aplicada en la Universidad de Utrecht en los países bajos. Con la misma corriente ideológica, los enfoques de modelos y modelación, sugerimos que existen líneas de investigación intermedias que utilizan la construcción de modelos matemáticos y la modelación como una forma de

aprendizaje, en la que el énfasis se focaliza en las actividades de modelación y en el modelo matemático que permiten una profundización de los conceptos matemáticos.

PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO.

Nuestro objetivo es tomar como marco teórico de este trabajo; las teorías de modelación y la física (*cinemática*); dado que es aquí, donde se estudia el movimiento de las partículas y de los cuerpos en general. Por consiguiente, como el movimiento es el significado de la diferenciabilidad en matemáticas (*Newton*) y, esta tiene una relación directa con la derivada y ecuaciones diferenciales; entonces, a través de las ecuaciones escalares de la cinemática, nosotros proponemos redefinirlas como modelos matemáticos (*MM*) de las mismas y cuidando desde luego, que la divulgación de estos saberes en el salón de clases, sea por competencias.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación se circunscribe dentro del área de una *Investigación Básica*, como consecuencia, es de corte metodológico y como hemos sostenido, el propósito es presentar una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, utilizando un proyecto experimental sobre la apropiación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para estudiantes de las carreras de ingeniería, en el área de las Ciencias Básicas. En este congreso, nuestro trabajo está relacionado con las modalidades sobre *Didáctica, contenidos, competencias y modelación de las matemáticas en un entorno del aprendizaje de las mismas.*

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A lo largo de casi treinta largos años y otros tantos de mis colegas en el quehacer educativo, y trabajando arduamente en el área de la enseñanza de las matemáticas y la física; siempre me he preguntado, ¿cómo hacer para que mis alumnos aprendan con o sin dificultad el saber matemático?; y en múltiples ocasiones también, no he descubierto esa piedra filosofal que culmine con la solución. Como consecuencia, en esta investigación nos planteamos la siguiente pregunta ¿Qué efectos puede tener en la comprensión y habilidades de modelación, la didáctica de la matemática en el contexto de las ciencias (*MCC*), con una orientación hacia la modelación del concepto de ecuación diferencial (*ED*) por contenidos y competencias.

HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Dado a los altos índices de reprobación que estadísticamente año con año escolar se tienen en las diferentes instituciones de educación en nuestro país, México; nosotros sostenemos la siguiente suposición: la gran mayoría de todos los que estudian en cualquier carrera, y tienen la obligación de apropiarse de los conceptos matemáticos formales; no están interesados en aprender la teoría correspondiente; es más, no quieren asumir la responsabilidad de formarse como ingenieros competentes.

JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

Nos es difícil imaginar siquiera un producto, de los que disponemos hoy día, que no sea una aplicación de algún principio físico. Esto significa que, independientemente de la carrera que se haya elegido, siempre será necesario entender la física, por lo menos hasta cierto punto. En la misma dirección, aun cuando resulta claro que algunas ocupaciones y profesiones no requieren una comprensión tan profunda como las que exigen los usos de la teoría académica de esta ciencia en ingeniería, la verdad es que en todos los campos se usan y aplican estos conceptos.

OBJETIVO

El aprendedor dominará la teoría de las ecuaciones diferenciales por contenidos, con un nivel de competencia, a través de la modelación pura (*MP*) y modelación matemática (*MM*).

MARCO TEÓRICO

La cinemática es una parte de la física y de la mecánica que estudia el movimiento de las partículas, líneas y cuerpos sin tomar en consideración las fuerzas requeridas para producir o mantener el movimiento. Sabemos que para estudiar el efecto de sistemas de fuerzas no equilibrados sobre los cuerpos, es esencial conocer las relaciones existentes entre *la posición, el tiempo, la velocidad, la aceleración, el desplazamiento y la distancia recorrida por las partículas, líneas y cuerpos.*

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Evidentemente, este es el tipo de movimiento que utilizaremos en esta propuesta, por esta razón, extendemos aquí, una breve descripción de esta teoría. Se dice que el movimiento de una partícula es <u>rectilíneo</u> cuando la trayectoria descrita es una línea recta. Al aplicar la definición de la velocidad al movimiento de una partícula, concluimos que ésta es el vector tangente a la trayectoria, siempre tendrá la misma dirección-la de la línea recta-y por tanto, sólo varía su magnitud, la dirección de la aceleración (el cambio de la velocidad por unidad de tiempo, i.e. la primera variación) también coincide con la línea recta. Por consiguiente, las ecuaciones de movimiento que se cumplen para este tipo de movimiento, son $v = \frac{ds}{dt}$, $ds = vdt$, $a = \frac{dv}{dt}$, $dv = a\ dt$, $a = v\frac{dv}{ds}$ & $vdv = a\ ds$.

METODOLOGÍA

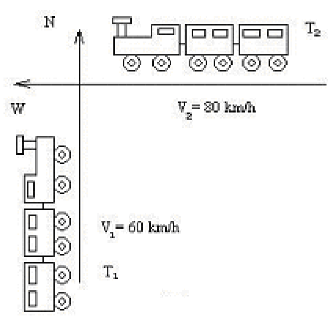
1. Desarrollar el proceso de modelación pura (*MP*), i. e., observar todos los eventos que estén ocurriendo en el MR y, que sean de interés para nuestro propósito, registrar los datos, escribir el enunciado de observado en forma de problema, modelarlo matemáticamente, resolver el modelo matemático (*MM*), interpretar los resultados y resolver el problema del mundo real (*PMR*).
2. Ser profesor de la asignatura con la que se experimentará bajo el plan piloto.
3. Trabajar con el grupo asignado por las autoridades educativas del instituto, y decidido al azar.
4. El grupo de estudiantes fue de un máximo de veinte aprendedores y con edades entre veinte y veintidós años.
5. Planear, construir, aplicar y evaluar estadísticamente; un examen de diagnóstico a todos los estudiantes que participen en el proyecto de investigación.
6. Durante el desarrollo de la experiencia, asistir con asesorías supervisadas a todos los alumnos que estén participando en el proyecto de investigación.
7. Llevar a cabo cuatro entrevistas clínicas, que estén repartidas en espacios iguales de tiempo durante todo el período escolar, con tres estudiantes escogidos al azar.

Para verificar mediante observación directa los posibles cambios conductuales y/o académicos que los participantes del evento observen.

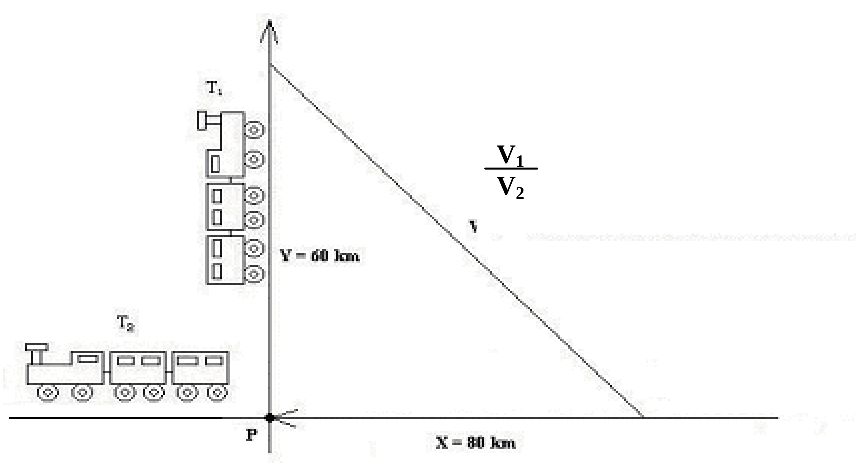
8. Efectuar dos evaluaciones bimestrales durante el tiempo que dure el período escolar.
9. Aplicar un examen diagnóstico al término de la experiencia, usando el mismo examen que se aplicó al inicio del proyecto, para la evaluación final.
10. Redactar un informe estadístico detallado de todo el desarrollo del proyecto.
11. Desarrollar el proyecto en el Instituto Tecnológico de Tlalnepantla.

INICIO DE LA MODELACIÓN PURA

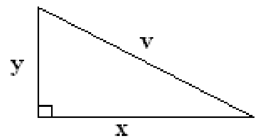
Enunciado del ejercicio del MR. Un tren corre hacia el norte a una velocidad de $60\frac{Kms}{hs}$; otro tren corre hacia el oeste a una velocidad de $80\frac{Kms}{hs}$. Si a las 4 horas de la madrugada el segundo tren cruza la ruta del primero en el punto por el que este había pasado dos horas antes, (a) construir un modelo matemático que defina estos movimientos, (b) identificar el tipo de modelo hallado (c) resolver el modelo matemático encontrado en el inciso b.



INICIO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA



De esta visualización gráfica se desprende que se puede construir el siguiente triángulo rectángulo



Así que, del triángulo rectángulo y por el teorema de Pitágoras obtenemos que $v^2 = x^2 + y^2$ o, también $x^2 + y^2 = v^2$; ahora derivamos implícitamente en ambos lados de de la misma, i.e., $\frac{d(x^2)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d(y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d(v^2)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \Longrightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2v\frac{dv}{dt}$; pero como todos sabemos, *v* es la velocidad relativa que existe entre los trenes T_1 y T_2; por consiguiente, $v \xrightarrow{R} \mathbb{R}$; por consiguiente,$v = C = constante \ \therefore \frac{dv}{dt} = 0$. Por lo cual,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2v\frac{dv}{dt};$$

sustituyendo $v = 0$ sobre la esta ecuación, obtenemos que $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2(0)\frac{d(0)}{dt}$; por lo tanto, $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$. A esta ecuación, la multiplicamos por la diferencial dt; i.e., $dt\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\right)$; realizando el producto obtenemos

$$2x\left(dt \cdot \frac{1}{dt}\right)dx + 2y\left(dt \cdot \frac{1}{dt}\right)dy = dt \cdot 0;$$

de donde, finalmente puntualizamos el modelo matemático (*MM*), i.e.

$$2xdx + 2ydy = 0 \longrightarrow MM \qquad (1)$$

IDENTIFICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El MM es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, primer grado, lineal y de variable separable; por lo tanto, se resolverá con el siguiente proceso

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.()$$

Así que, de (1), se implica que $M(x) = x \,\&\, N(y) = y$; por lo que sustituyendo sobre $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$; tendremos que la $\int x\,dx + \int y\,dy = C$. Para resolver estas dos integrales, fácilmente podemos darnos cuenta que las funciones de las diferenciales que se van a integrar, son polinomiales, por lo que se integrarán directamente con la fórmula que resuelve a este tipo de integrales, i.e., $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$. Aplicamos el segundo lado de la $\int u^n du$ sobre la $\int x\,dx$ e $\int y\,dy$; de donde obtenemos $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Sin embargo, esta ecuación no es la resolución del modelo matemático (*MM*); por lo que multiplicaremos por dos, a la ecuación $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$.

$$2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-C_1\right)\longrightarrow\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)x^2+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)y^2-2C_1$$

de la cual, se desprende la resolución siguiente

$$x^2+y^2=C\Longrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=C\longrightarrow \textit{Solución general implícita, y}\\ y=\sqrt{C-x^2}\longrightarrow \textit{Solución general explícita.}\end{cases}$$

COMENTARIOS FINALES

1. Se percibe una necesidad internacional de interrelacionar el saber matemático, con las actividades personales y del mundo real (MR) (*Blum, 2002;OECD, 2003*)
2. La investigación reporta que las acciones de la MM agrupa muchas de las condiciones para desarrollar las habilidades que exige una sociedad basada en el conocimiento; sin embargo, observamos diferentes propósitos y papeles en los procesos de aprendizajes que se utiliza en la MM.
3. Por una parte, encontramos la modelación tradicional (*Berry & Houston, 1995; Houston & Neill, 2003*) donde el propósito de la educación más bien, es la de aprender a modelar matemáticamente, como una extensión del uso de las matemáticas en el MR.
4. Por otra, también está la *RME (Gravemeijer & Terwel, 2000; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003 y Doorman, 2005)*, cuyo objetivo es la construcción de nuevos conceptos matemáticos, a través de los procesos de modelación.
5. Aquí, el papel de l concepto matemático es central, funciona como un administrador matemático de cierto grupo de fenómenos o eventos del MR y, no se requiere tenerlo como prerrequisito antes del proceso de aprendizaje.
6. Hasta este momento, podemos decir que, en otro tipo de corrientes intermedias que están enfocadas sobre los modelos y la MM, creemos que el objeto del proceso de aprendizaje, es que el estudiante aprenda el proceso de modelación pura y MM, para resolver los problemas que tengan que ver con él, la sociedad y el mundo real.
7. En el proceso de aprendizaje, la teoría de la modelación juega un papel central, mientras que, concepto matemático es utilizado como una herramienta.
8. Los enfoques de modelo (*M*) y modelación matemática (*MM*), corresponden más directamente a las exigencias de PISA/OECD por ubicarse en la educación obligatoria.
9. Finalmente, una modelación tradicional, aunque pone en contacto el conocimiento matemático con el mundo real (*MR*), para nosotros, juega un roll menos importante sobre el aprendizaje de los conceptos formales y la profundización de los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Higdon, Stiles, **“***Engineering Mechanics”*, Prentice-Hall, España 1982

2. Zill, Denis. “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado”*, Thompson 1986

3. Farfán, R.M. “*Ingenierías Didácticas”*, Grupo Editorial Iberoamericana. México 1997

4. Levi, Lattes, Enzo. **“***Teoría y métodos de las matemáticas aplicadas”*, Talleres de Impresiones-UNAM México 1986
5. Cantoral, R. “*Proyecto: Pensamiento y lenguaje variacional”,* Documento interno de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN México 1996
6. Chevellard, Y. **“***La transposition Didactique”,* Francia 1985
7. Artigue, M. **“***Ingeniería Didáctica”* Editorial Iberoamericana. Colombia 1995.
8. Ceballos, T.M. “*La cinemática en la física*: *una fuente germinal para la modelación matemática”* Reporte de investigación. Comat. La Habana 2003.