



SERIE “LA RECTA Y EL PLANO”

1. Sea L la recta cuyas ecuaciones son:

$$L: \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Calcular:

- La distancia del origen de coordenadas, a la recta L.
- La distancia entre la recta L y el eje de las cotas.
- Los ángulos α , β y γ que forma la recta L con los ejes coordenados X, Y y Z, respectivamente.

2. Sean L_1 y L_2 las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1: x = 1; \quad \frac{y-1}{a} = \frac{3-3z}{-3}$$

$$L_2: \frac{x}{b} = y = -\frac{4z}{-4}$$

Si dichas rectas son perpendiculares entre sí, y además se intersecan, determinar los valores de “a” y “b”.

3. Sean las rectas L y R definidas de la siguiente manera:

L: contiene al origen, está contenida en el plano YZ, y forma un ángulo de 60° con el eje Y.

R: es paralela al eje Z y corta al eje X en el punto P de coordenadas (2, 0, 0).

- Determinar unas ecuaciones paramétricas de las rectas L y R.
- Indicar si las rectas L y R definen un ángulo entre sí. En caso afirmativo, calcularlo; en caso contrario, justificar su respuesta.

4. Sean las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son:

$$L_1: \vec{p} = (1-t, 0, 1-t)$$

$$L_2: 1-x = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3z}{2}}{-3}; y=0$$

- Determinar si L_1 y L_2 son paralelas, si se cruzan o si se cortan.
- En caso de que L_1 y L_2 se corten, determinar el punto de intersección; en caso de que se crucen o sean paralelas, calcular la distancia entre ellas.



5. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre la recta:

$$L: \begin{cases} \frac{x-4}{-4} = \frac{z}{8} \\ y = 6 \end{cases}$$

y la recta R que contiene a los puntos (4, 6, 8) y (0, 6, 0).

6. Calcular la distancia entre la recta

$$L: \begin{cases} z = 8 - 2x \\ y = 6 \end{cases}$$

y el eje de las abscisas.

7. Sea la recta R que contiene al punto P(4, -1, 0), que es perpendicular al eje X, y cuyo vector director tiene como ángulos directores $\beta < 90^\circ$ y $\gamma = 126.87^\circ$; y sea la recta L, una de cuyas ecuaciones vectoriales es:

$$\bar{p} = (2, y_0, -1) + t(1, -3, c)$$

Determinar los valores de y_0 y c , tales que las rectas R y L se intersequen perpendicularmente.

8. Sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: -2x - 4 = -2z \quad ; \quad y + 6 = 0$$

Determinar las coordenadas del punto de la recta que está más cerca del origen de coordenadas.

9. Obtener una ecuación vectorial de una recta L que contiene al punto A(-2, -4, 1), es paralela al plano XZ y forma con el plano $\pi: 4 - 2z = 0$ un ángulo de 60°
10. Determinar unas ecuaciones paramétricas de la recta R, que contiene al punto A(3, 1, 0), y que corta perpendicularmente a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: \frac{4-2x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{2}$$

11. Sea la recta L_1 la cual contiene al punto A(2, 2, 3) y se interseca con la recta $L_2: \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ y forman un ángulo de 30° . Determinar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.



12. Calcular la distancia entre las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{-(z+4)}{5}$$

$$L_2: \frac{x+5}{5} = \frac{6-6y}{-12} = \frac{z+9}{4}$$

13. Sea la viga \overline{AB} que tiene por extremos a los puntos A(1, 2, 3) y B(7, 6, 5). Si desde el punto C(4, 5, 10) cae en forma vertical un objeto, determinar si éste golpea a la viga. En caso afirmativo, determinar el punto de contacto; en caso contrario, calcular a qué distancia de la viga pasará el objeto.
Nota: despreciar el ancho de la viga y el del objeto.

14. Sea la recta L que contiene al punto A(2, 4, 6) y que forma ángulos agudos iguales con los ejes X y Y. Si el ángulo entre la recta L y el eje Z es de 45° , determinar:

- El ángulo que forma la recta L con los ejes X y Y;
- Unas ecuaciones paramétricas de la recta L;
- El punto en el cual la recta L se interseca con el plano XZ.

15. Sea la recta L_1 que contiene al punto A(4, 0, 4), que interseca a la recta L_2 y forma con ésta un ángulo de 60° . Si las ecuaciones de la recta L_2 son:

$$2 - x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

determinar las coordenadas de los puntos de intersección entre L_1 y L_2 (hay dos soluciones).

16. Sean las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = -y = \frac{3z-6}{9}$$

$$L_2: \frac{4-2x}{-4} = 1-y = \frac{2z-8}{6}$$

- Calcular el ángulo que forman L_1 y L_2 .
- Determinar la distancia entre L_1 y L_2 .
- Obtener la ecuación cartesiana del plano definido por L_1 y L_2 .



17. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L: \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{2z+6}{4} \\ R: \begin{cases} \frac{2-x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{6-z}{9} \end{cases} \end{cases}$$

- a) Si L y R se intersecan, determinar el punto de intersección; en caso contrario calcular la distancia entre dichas rectas.
b) Determinar el punto de intersección de la recta R con el plano XY.

18. Sean los planos:

$$\pi_1 : 6x - 3y + z = 0$$

$$\pi_2 : 3x + 2y - 4 = 0$$

Determinar:

- a) La ecuación cartesiana del plano π_3 que contiene al punto A(0, 7, -1) y que es simultáneamente perpendicular a los planos π_1 y π_2 ;
b) Unas ecuaciones paramétricas de la recta R de intersección del plano π_2 con el plano YZ;
c) El ángulo que forma el plano π_2 con el eje Z.
19. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L: \begin{cases} 4x + 6y - 12 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$$R: \begin{cases} 2x - 4z - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Determinar si las rectas L y R definen un plano. En caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana de dicho plano; en caso contrario, explicar porqué no definen un plano.

20. El punto A(3,3,4) es simétrico del punto B(3,5,6) respecto al plano π . Obtener la ecuación cartesiana del plano π .

21. Determinar la ecuación cartesiana del plano que forman las rectas:

$$M : \vec{p} = (4, 0, 8) + t(-4, 6, 0)$$
$$L : \begin{cases} \frac{x-4}{-4} = \frac{z}{8} \\ y=6 \end{cases}$$



22. Sea la recta L de ecuaciones cartesianas $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{5} = \frac{5z-3}{10}$. Determinar las coordenadas de los dos puntos A y B que pertenecen a la recta L y cuya distancia al punto $C\left(5, -2, \frac{8}{5}\right)$ es igual a $3\sqrt{6}$.

23. Sea el plano π definido por los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 0, 6)$.

- a) Calcular la distancia entre el punto $Q(3, 2, 3)$ y el plano π .
b) Determinar las coordenadas del punto de intersección entre el plano π y la recta L que contiene al punto $(4, 5, 6)$ y que es normal al plano π .

24. Determinar la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano π_1 cuya ecuación es $y = 0$, y que contiene a la recta L de ecuaciones:

$$L: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

25. Sea el plano π cuya ecuación es $3x - 6y + z + 6 = 0$ y sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: x - 3 = y - 3 = \frac{3 - z}{-3}$$

Determinar, si existe, la intersección entre la recta y el plano.

26. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $P(2, -1, 4)$ y que es perpendicular a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: \begin{cases} 2x - 4y - 6z + 7 = 0 \\ x + 3y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$$



27. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $A(1, -2, 3)$ y al eje X .
28. Determinar las ecuaciones cartesianas de los tres planos que contienen a la recta L de ecuaciones

$$L: \frac{8-2x}{6} = y = \frac{16-z}{7}$$

y que son perpendiculares a los tres planos coordenados.

29. Determinar la ecuación cartesiana del plano π_1 que contiene al punto $A(-1, 2, 1)$ y a la recta L de intersección del plano π_2 cuya ecuación es $5x - 2y + 4z - 4 = 0$ con el plano YZ .
30. Sean la recta L y el plano π representados por las ecuaciones:

$$L: \begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases} \quad \pi: \vec{p} = s\vec{i} + t\vec{j}$$

- a) Obtener las coordenadas del punto F , intersección de L con π .
- b) Calcular el ángulo que forman L y π .
- c) Determinar, unas ecuaciones cartesianas en forma general de la recta R que resulta de la intersección del plano π con el plano cartesiano YZ .
31. Sean las rectas L_1 y L_2 que se cruzan en el espacio, sin cortarse, y cuyas ecuaciones son

$$L_1: \{P_0(0, 0, 0); \vec{u} = (-1, -4, 0)\}$$
$$L_2: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

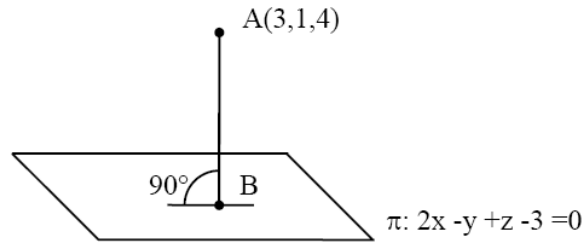
Determinar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L_1 y a L_2 , siendo ésta última ortogonal tanto a L_1 como a L_2 .

32. Determinar una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial del

plano π que contiene a las rectas $L: x-1 = \frac{2y+2}{4} = \frac{1-z}{-3}$ y $R: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 - 6t \end{cases}$.



33. Determinar las coordenadas del punto B que se muestra en la siguiente figura.



34. Determinar la ecuación cartesiana del plano que es bisector del ángulo que forman las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: x = y = z$$

$$L_2: x = -y = z$$



35. Sea la recta L, unas de cuyas ecuaciones son:

$$L: \frac{-x}{5} = \frac{10-2z}{-10}; y = 0$$

y sea π el plano cuya ecuación es:

$$\pi: 2x - 3y + 2z - 10 = 0$$

- a) Calcular el ángulo que forma L con π .
b) Determinar la intersección de L con π , si ésta existe.
36. Sea la recta L que contiene al punto A(7, 0, 0) y que es normal al plano π de ecuación:

$$\pi: 4x - 2y + 2z + 8 = 0$$

- a) Determinar el punto de intersección entre dicha recta y el plano.
b) Si T1 y T2 son las rectas de intersección del plano π con los planos coordenados XZ y YZ, respectivamente, calcular el ángulo comprendido entre T1 y T2.
c) Determinar unas ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene al punto A y que es simultáneamente perpendicular a las rectas mencionadas en el inciso anterior.
37. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta L y que es perpendicular al plano π si:

$$L: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-2} = \frac{3z-12}{9} \end{array} \right.$$

$$\pi: 2x + 3y - 4z - 9$$

38. Sea el plano π_1 que contiene a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \frac{-2x}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{3(z-3)}{18}$$

$$L_2: \vec{p} = (1, 2, 3) + t(-2, 2, 0)$$

Determinar:

- a) La ecuación cartesiana del plano π_1 .
b) La distancia entre el punto P(1,0,3) y el plano π_1 .
c) Las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas L_1 y L_2



39. Sean la recta L y el plano π , cuyas ecuaciones son:

$$L: \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3} \quad \pi: 3x - 2y + nz = 0$$

Determinar los valores de "m" y "n" que hacen a la recta y el plano perpendiculares.

40. Obtener una ecuación vectorial de la recta L_3 que interseca perpendicularmente a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \frac{4x-4}{4} = 2 - y = z + 1$$

$$L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{1-y}{-1} = z - 2$$

41. Obtener la ecuación cartesiana de un plano π que es perpendicular a la recta representada por la ecuación $\vec{p} = (2,1,3) + t(-2,2,1)$ y dista seis unidades del origen.

42. Sean la recta $L: \begin{cases} x = t \\ z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi: y = 5$, y sean también los puntos

A(4,0,0) y B(8,6,10)

Determinar:

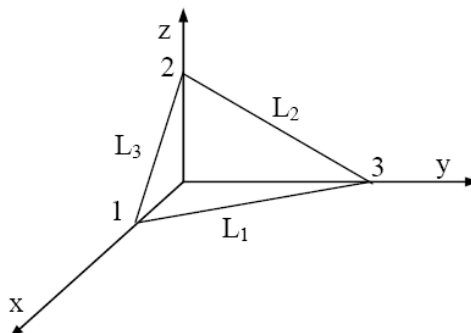
- el ángulo que forman L y π ,
- si existe, la intersección de la recta L con el plano π ,
- la distancia del punto A a la recta L, y
- la distancia del punto B al plano π .

43. Sea la recta L de ecuaciones: $\begin{cases} x-1=0 \\ 2z+6=0 \end{cases}$ Determinar:

- Las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta, tal que la distancia entre dicho punto y el plano XZ sea 8 unidades.
- Las coordenadas del punto Q que pertenece a la recta L y que es el más próximo al punto A(3, 4, 1).



44. Sean los segmentos de recta L_1 , L_2 , L_3 que se muestran en la figura.



- a) Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es paralelo al plano que contiene a L_1 , L_2 , L_3 , y que dista de él 7 unidades.
- b) Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a L_2 y es perpendicular al plano YZ .
45. Sea la recta L representada por la ecuación vectorial $\vec{p} = (t, t, t)$. Determinar las coordenadas del punto B que pertenece a dicha recta y que se encuentra más cerca del punto $A(12, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
46. Sea R la recta que contiene a los puntos $A(1,2,3)$ y $B(4,8,5)$. Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta R y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a una unidad de longitud (la solución no es única).
47. Determinar la ecuación cartesiana del plano π que está comprendido entre el punto $A(4, -6, 8)$ y el origen, y que además es equidistante de dichos puntos.
48. Sea la recta L una de cuyas ecuaciones vectoriales es $\vec{p} = (2, 2, -2) + (\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t)$. Determinar:
- El ángulo que forma L con el plano XY .
 - El punto de intersección de L con el plano YZ .
 - Unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de L .
49. Determinar unas ecuaciones paramétricas de una recta L que dista 3 unidades del origen, contiene al punto $A(0, y, -4)$ y es paralela a la recta R de ecuaciones $\frac{2x-4}{6} = \frac{z}{4}; y = 4$
50. Determinar las coordenadas del punto B que pertenece al plano $\pi: x - y - z + 10 = 0$ y que es el más próximo al punto $A(9, 3, 1)$.