



SERIE “ÁLGEBRA VECTORIAL”

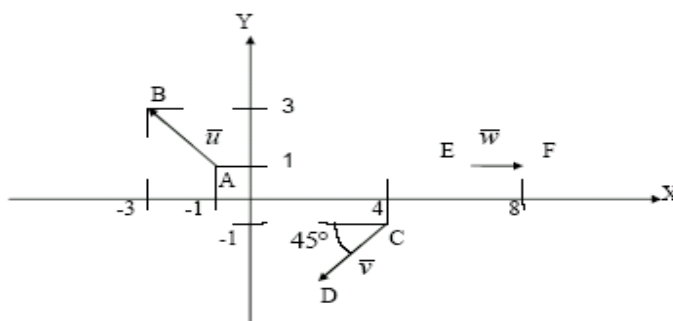
1.-Sea $C(2, -3, 5)$ el punto medio del segmento dirigido \overline{AB} . Empleando álgebra vectorial, determinar las coordenadas de los puntos A y B, si las componentes escalares de \overline{AB} sobre los ejes coordenados X, Y y Z son 4, -8 y 2 respectivamente.

2.-Sea el punto P que está contenido en el plano YZ, está a dos unidades de distancia del origen de coordenadas, de ordenada negativa y cuyo vector de posición forma un ángulo de 30° con el eje Z; y sea el punto $Q(4, 8, 2\sqrt{3})$. Empleando álgebra vectorial, calcular la distancia entre los puntos P y Q.

3.-Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} , tales que $|\vec{u}| = 15$ y $|\vec{v}| = 5$. Si el vector \vec{u} tiene la misma dirección que el vector $\vec{a} = 3i + 4j$ y si el vector \vec{v} tiene la misma dirección que el vector $\vec{c} = (-8, 0, 6)$, empleando álgebra vectorial:

- Calcular el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} ;
- Obtener el módulo del vector $\vec{u} + \vec{v}$ (sugerencia: utilizar la ley de los cosenos).
- Determinar las componentes del vector $\vec{u} + \vec{v}$.

4. Sean los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} que se muestran en la siguiente figura:



Determinar:

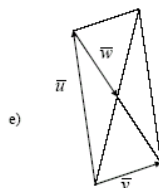
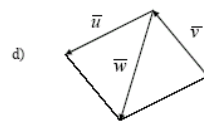
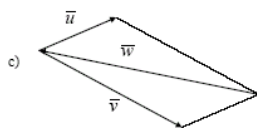
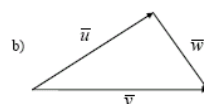
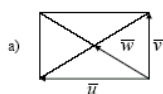
- La componente escalar de \vec{u} en la dirección de \vec{w} .
- La componente vectorial de \vec{u} en la dirección de \vec{w} .
- La componente escalar de \vec{u} en la dirección de \vec{v} .
- La componente vectorial de \vec{v} en la dirección de \vec{u} .



Si el valor absoluto de la componente escalar de \vec{w} en la dirección de $\vec{u} = \sqrt{2}$, determinar:

- e) Las componentes del vector \vec{w} .
- f) Las coordenadas del punto E.

5. Para los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} que se muestran en las siguientes figuras, expresar \vec{w} en términos de \vec{u} y \vec{v} .



6.- Sea el triángulo cuyo vértices son los puntos A(-1, 2 , 0), B(5, -1 , 3) y C(4,0,-2). Determinar un vector unitario que sea simultáneamente perpendicular a los lados de dicho triángulo.

7.- Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} tales que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 4$ y que forman un ángulo

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

a) Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Haciendo uso de algunas propiedades del producto escalar calcular $|\vec{u} + \vec{v}|^2$

8.- Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} tales que:

El vector \vec{u} forma ángulos de 60° y 45° con los ejes X y Y, respectivamente.



El vector \vec{v} forma ángulos de 30° y 60° con los ejes Y y Z, respectivamente.

Calcular el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} (hay dos soluciones).

9.- Sea el punto B que está contenido en el plano XZ. Si su vector de posición \vec{b} tiene módulo igual a $\sqrt{8}$ y forma 45° con los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{k} , determinar:

- las coordenadas cartesianas del punto B,
- los cosenos directores del vector \vec{b} , y
- la componente vectorial del vector \vec{b} en la dirección del vector unitario \mathbf{k} .

10. Sean los vectores:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ \vec{v} &= (2, 1, 0) \\ \vec{w} &= (-2, 5, 4)\end{aligned}$$

Determinar:

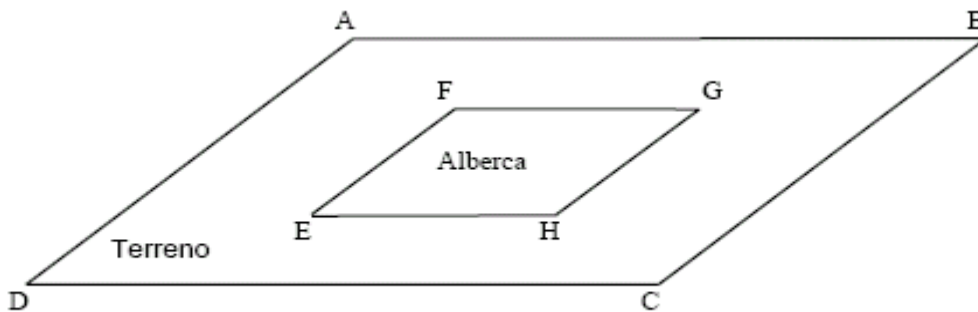
- Un vector \vec{x} tal que: $4\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{x} = \vec{w}$
- Un vector \vec{a} , perpendicular a \vec{v} y a \vec{w} , cuyo módulo sea $4\sqrt{14}$

11. Sea el punto A que pertenece al eje de las ordenadas, y cuya distancia al origen es igual a 6; y sea el punto B contenido en el plano XZ, cuyo vector de posición forma un ángulo de 60° con el eje de las abscisas y de módulo igual a 10.

Empleando álgebra vectorial, calcular la distancia entre los puntos A y B.

12. En las instalaciones de un centro deportivo se desea construir una alberca cuya área sea de 160 m^2 . Si el proyecto arquitectónico exige que los lados de la alberca sean paralelos a los lados del terreno, con los datos que se dan a continuación y con ayuda de la figura, determinar vectorialmente las coordenadas de los puntos G y H.

A(0, 0, 3), B(0, 22, 3), C(30, 22, 3), D(30, 0, 3), E(19, 7, 3), F(3, 7, 3), G(g1, g2, g3), y H(h1, h2, h3).



NOTA: Hay 2 posibles soluciones. Interpretarlas.

13. Sean los vectores:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= (0, b, c) \\ \bar{v} &= (-2, 1, -3) \\ \bar{w} &= 4i + j - 2k\end{aligned}$$

Determinar los valores de b y c tales que la componente escalar de \bar{u} en la dirección de \bar{v} sea igual a $\sqrt{\sqrt{14}}$ y la de \bar{u} en la dirección de \bar{w} sea igual a $\sqrt{21}$.

14. Sean los puntos $A(3, 1, 2)$, $B(7, 1, 10)$, $C(1, 4, 3)$, utilizando álgebra vectorial:

- comprobar que forman un triángulo rectángulo.
- calcular el área de dicho triángulo.

15. Sean los vectores $\bar{a} = (1, 2, 2)$ y $\bar{b} = (2, 1, -2)$ perpendiculares entre sí y tales que son los vectores de posición de los puntos A y B respectivamente.

Determinar las coordenadas de un punto C tal que sea vértice de un cubo de 3 unidades por lado, si los puntos A , B y el origen también son vértices del cubo.

16.- Sean los puntos $A(5, 1, 1)$; $B(-3, 3, 1)$; $C(-7, -3, 5)$ y $D(-5, -7, 7)$, que pertenecen a un mismo plano. Determinar las coordenadas de los puntos medios de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , y \overline{DA} , y demostrar que tales puntos son los vértices de un paralelogramo. Calcular el área de dicho paralelogramo.

17.- Sean los vectores \bar{u} y \bar{v} , tales que:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = 8 \quad y \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 2$$



calcular el ángulo formado por los vectores \vec{u} y \vec{v} .

18. Sea el vector \vec{u} , dos de cuyos cosenos directores son:

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \cos(\beta) = \frac{1}{2}$$

Obtener un vector \vec{v} cuyo módulo sea igual a 18 unidades y que tenga la misma dirección del vector \vec{u} .

19. Los puntos $A(1, -2, 2)$ y $B(1, -1, 1)$ son los vértices de un triángulo ABC. Determinar el conjunto de valores de la cota z de un punto $C(1, -4, z)$, tercer vértice del triángulo, para cada una de las siguientes condiciones:

- a) que el ángulo interior en el vértice A sea de 30°
- b) que el triángulo tenga 3 unidades de área.

20. Sean los puntos: $A(1, 2, 3)$, $B(0, 3, 1)$, y $C(-1, 4, -1)$, y sea el vector $\vec{u} = (3, -3, -3)$.

Calcular:

- a) la componente escalar del vector \overline{AB} en la dirección del vector \vec{u}
- b) la componente vectorial del vector \vec{u} en la dirección del vector \overline{AB} .
- c) el ángulo que forman los vectores \overline{AB} y \vec{u} .
- d) el producto escalar entre los vectores \overline{AC} y \vec{u} .

21. Sea el vector \vec{a} , paralelo al plano YZ, que forma un ángulo de 30° con el vector j , y tal que $|\vec{a}| = 10$; y sea el vector \vec{u} , paralelo al plano XY, que forma ángulos de 45° con los vectores i y j , y tal que $|\vec{u}| = 2$.

Determinar:

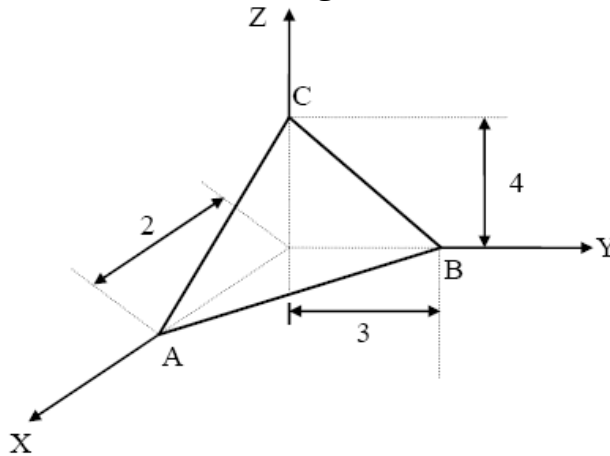
- a) Las componentes de los vectores \vec{a} y \vec{u} .



b) Las componentes de un vector \vec{c} , perpendicular a los vectores \vec{a} y \vec{u} , y tal que $|\vec{c}| = 2\sqrt{5}$.

Nota: Para los vectores \vec{a} y \vec{c} , hay dos soluciones.

22. Para los datos que se muestran en la figura

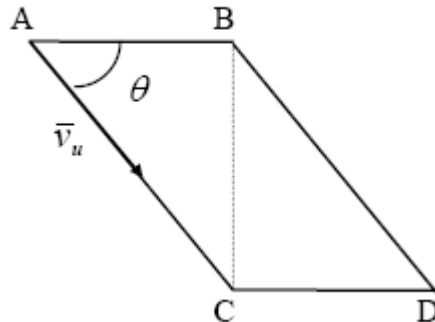


Determinar

- los cosenos directores del segmento dirigido \overline{AB} ;
- el área del triángulo ABC;
- el ángulo que forman los segmentos dirigidos \overline{AB} y \overline{AC} ;
- las componentes de un vector unitario que sea normal al plano definido por los puntos A, B y C.
- las coordenadas cartesianas del punto P que es el simétrico del punto C con respecto al eje Y;
- el producto escalar entre el vector unitario i y el vector representado por el segmento dirigido \overline{AC} ;
- la componente escalar del segmento dirigido \overline{CB} en la dirección del eje Y;
- la componente vectorial del vector cuyo segmento dirigido es \overline{AC} , en la dirección del vector cuyo segmento dirigido es \overline{BA} .



23. Sean los puntos A, B, C y D los vértices de un paralelogramo.



Si $A(1, 0, 4)$, $B(1, 3, 4)$, $\vec{V}_U = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ y si la diagonal BC es paralela al eje X, determinar:

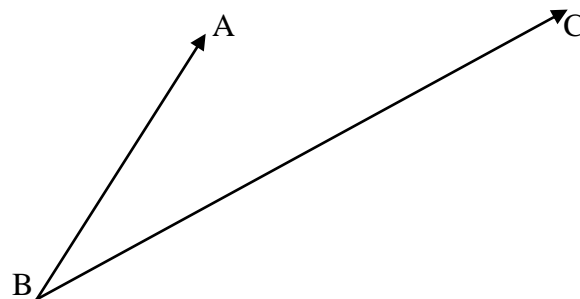
- a) El ángulo θ .
- b) Las coordenadas de los vértices C y D.
- c) El área del paralelogramo.

24. Sea el triángulo que tiene por vértices a los puntos: $A(-2, 6, 1)$, $B(7, 5, 3)$ y $C(-4, 5, 2)$, y sea L el segmento de recta que une los puntos medios de los lados AC y BC.

Utilizando álgebra vectorial:

- a) Calcular el ángulo que forman el segmento L y el lado AB.
- b) Determinar la relación que existe entre la longitud del segmento L y la longitud del lado AB.

25. Sean los puntos $A(5, 2, 6)$; $B(1, 2, 3)$ y $C(9, 4, 9)$. Determinar la componente vectorial de \vec{BC} en la dirección de \vec{BA} , y representarla gráficamente en la figura.

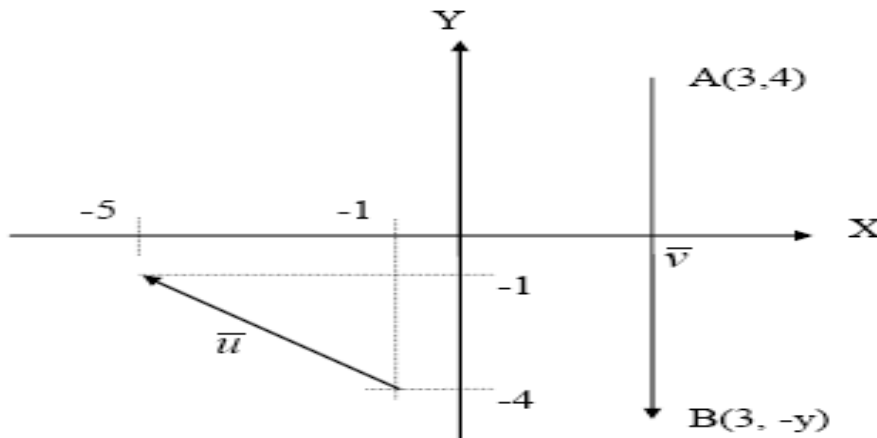




26. Sea el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(0, -3, 4)$ y $C(0, a, b)$. Tomando en consideración que el ángulo recto es el formado por los lados BA y BC , determinar los valores de a y de b para los cuales el área del triángulo es igual a 25 unidades de superficie
(Nota: existen dos soluciones).

27. Calcular todos los valores de “ y ” y “ z ” tales que la componente escalar de $\vec{a} = (1, y, z)$ sobre $\vec{b} = 2\vec{i} - \sqrt{5}\vec{j}$ y sobre $\vec{c} = (-2, \sqrt{5}, 0)$ sea igual a cero.

28. Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} que se muestran en la figura:



Si el $|\text{Comp. Vect. } \vec{V}_u| = 6$ (MÓDULO DE LA COMPONENTE VECTORIAL), determinar:

- $\text{Comp. Esc. } \vec{U}_v$
- $\text{Comp. Vect. } \vec{U}_v$
- $\text{Comp. Esc. } \vec{V}_u$
- Las coordenadas del punto B.
- $\text{Comp. Vect. } \vec{V}_u$

29. Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores de los cuales se sabe que:

$$|\vec{u}| = 2 \quad \vec{v} = (2, -1, 2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

Calcular el área del paralelogramo que tiene como lados a los vectores \vec{u} y \vec{v} .



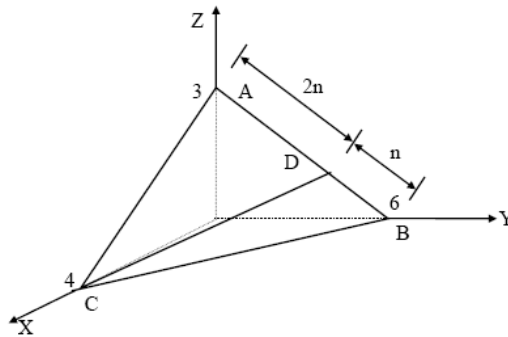
30. Empleando álgebra vectorial, determinar las coordenadas de todos los puntos sobre el eje X que están a 6 unidades del punto $P(2, \sqrt{11}, 3)$.

31. Determinar las componentes de un vector perpendicular al eje Y, cuyo módulo es $5\sqrt{2}$ y forma ángulos iguales con los ejes X y Z.

32. Dados los puntos: $A(7, 3, -1)$, $B(5, 4, -3)$ y $C(8, 2, -1)$, obtener:

- el ángulo interior del triángulo ABC con vértice en A;
- la componente escalar de \overline{AC} en la dirección de \overline{AB} ;
- el vector unitario en la dirección de \overline{AB} ;
- la componente vectorial de \overline{AC} en la dirección de \overline{AB} .

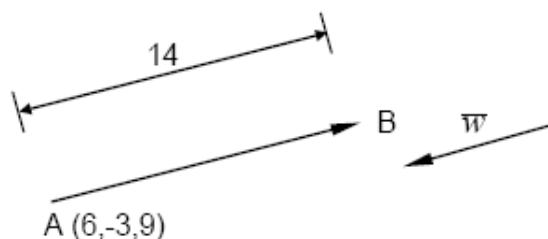
33. Para los puntos A, B, C y D de la siguiente figura:



Obtener el vector $\vec{s} = 2\overline{CD} + 3\overline{BC}$

34. Sean los puntos $A(1,2,3)$, $B(-1,3,2)$ y $C(3,1,-2)$. Determinar las coordenadas del punto D del paralelogramo formado por los vectores \overline{AB} y \overline{AC} . Calcular el área del paralelogramo.

35. Sea el segmento dirigido \overline{AB} , paralelo al vector $\vec{w} = (2, -3, 6)$ y de sentido contrario a éste, como se muestra en la figura

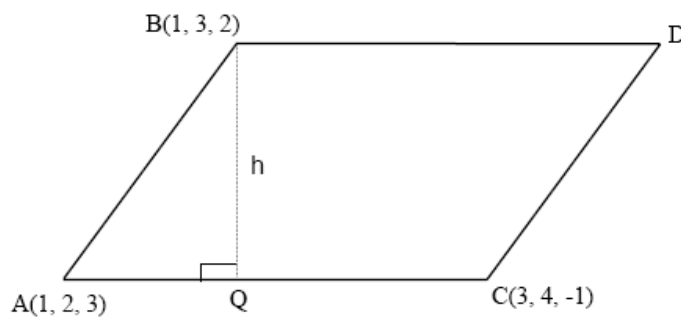




Determinar las coordenadas del punto B

36. Sean los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tales que $\vec{u} = -2\vec{j}$, $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{w}| = 2$ y $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = -4$. Si además el vector \vec{u} forma 30° con el vector \vec{v} , determinar el ángulo que forma el vector \vec{w} con un vector perpendicular tanto a \vec{u} como a \vec{v} .

37. Sea el paralelogramo que se muestra en la figura:



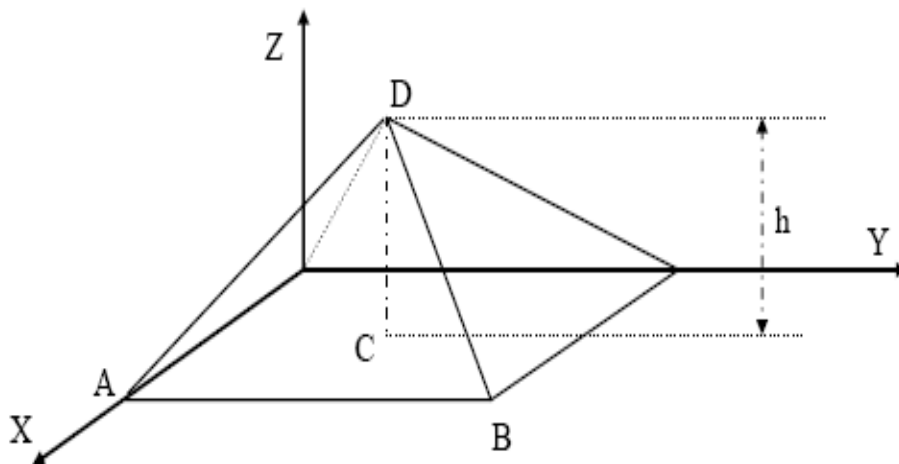
Calcular:

- la altura h ;
- la distancia entre los puntos A y Q.
- el área del paralelogramo.

Determinar las coordenadas del vértice D.

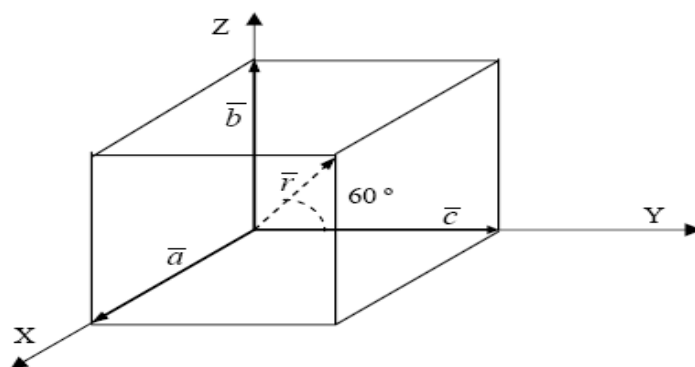
38. Para la pirámide regular que se muestra en la figura, tal que la longitud de cada una de sus aristas es 4 unidades, **utilizando álgebra vectorial** determinar:

- Las coordenadas del punto D, si la arista DB es paralela al vector $\vec{v} = (-4, -4, 4\sqrt{2})$
- La altura h .
- El área de la cara triangular ABD.

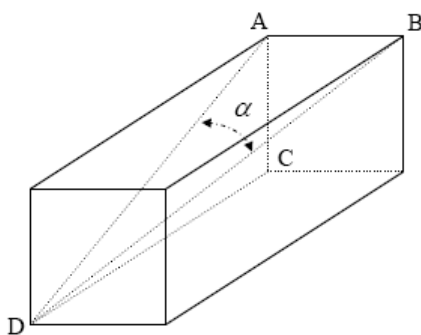




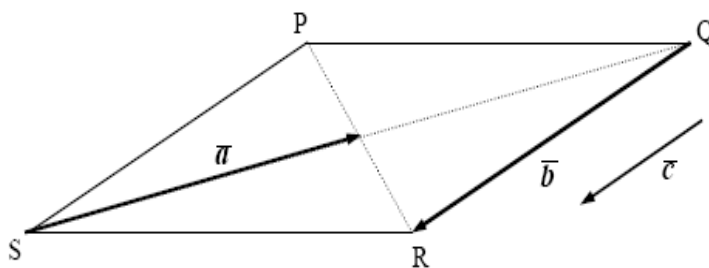
39. Sean los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} y \vec{r} que se muestran en la figura tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ y el ángulo que forman los vectores \vec{c} y \vec{r} es 60° . Obtener las componentes del vector \vec{r} .



40. Sea el paralelepípedo rectangular que se muestra en la figura Xx. Si las aristas AB y AC son de igual longitud, en tanto que la arista CD mide el triple que la AC, emplear álgebra vectorial para determinar el ángulo α que forman los segmentos DA y DB, así como para calcular el área del triángulo ABD.



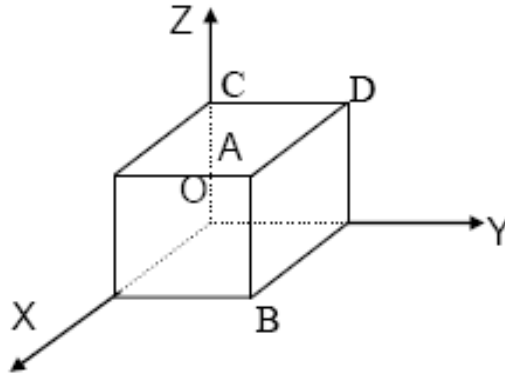
41. Sean los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} que se muestran en la figura





Si $\vec{a} = -i + 2j - 4k$ y \vec{b} es paralelo al vector $\vec{c} = \left(\frac{2}{3}, -1, 2\right)$ tal que $|\vec{b}| = 7$, mediante álgebra vectorial calcular el área del paralelogramo PQRS.

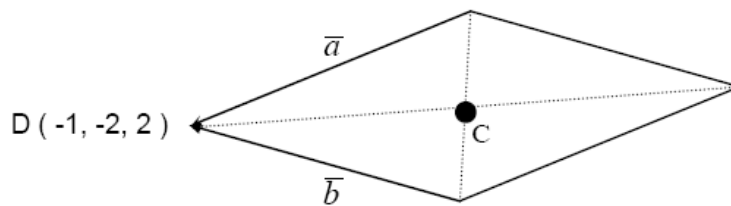
42. Sea el cubo que se muestra en la figura



Calcular, mediante álgebra vectorial:

- El ángulo que forma la arista CD con la diagonal BC.
- El área del triángulo que tiene por vértices a los puntos B, C y D, si la longitud de cada arista es igual a L .
- Los cosenos directores del vector AO.

43. Sea el paralelogramo que se muestra en la figura



en donde

$$\vec{a} = (1, 2, 6)$$

$$\vec{b} = -3i - 2k$$

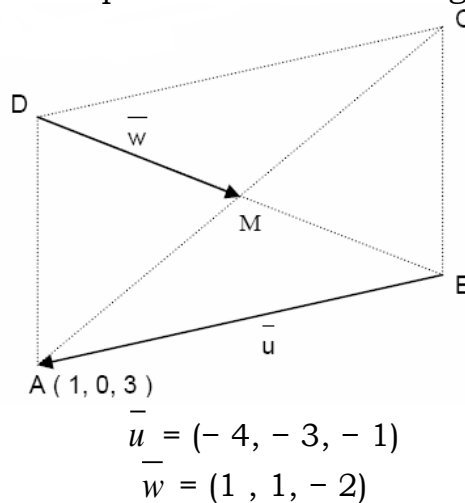
Determinar las coordenadas cartesianas del punto C y calcular los ángulos interiores del paralelogramo.



44. Obtener las componentes escalares de un vector \vec{a} que se encuentra en el primer octante, forma un ángulo de 60° con el eje X y 45° con el eje Z, si además su componente paralela al eje Y es de 8 unidades.

45. Sean los puntos $A(0,0,0)$, $B(4,2,4)$, $C(2,2,2)$, y $D(2,4,4)$ vértices de un paralelepípedo. Calcular el volumen de dicho paralelepípedo si tres de sus aristas concurrentes son los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AD} .

46. Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura.



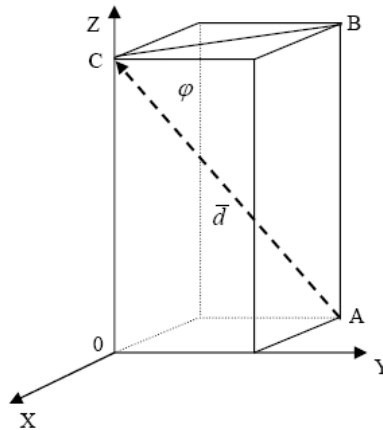
- a) Determinar las coordenadas cartesianas de los puntos B, C, D y M.
- b) Calcular el área del triángulo BCM.

47. Dados los vectores $\vec{c} = (-1, 3, -1)$ y $\vec{w} = -i + 2k$, obtener:

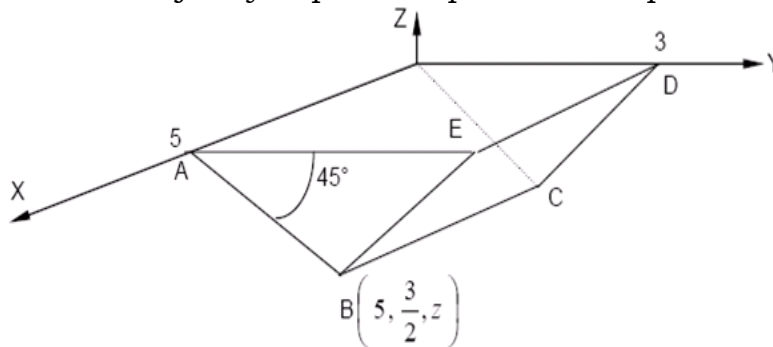
- a) Un vector \vec{v} que sea perpendicular tanto a \vec{c} como a \vec{w} y que tenga módulo $\sqrt{6}$
- b) Un vector \vec{u} de módulo igual a $2\sqrt{15}$, que sea perpendicular a \vec{w} y forme un ángulo de 60° con el eje "Y".

48. Sea el vector $\vec{d} = 2i - 3j + 6k$ que corresponde a la diagonal AC del paralelepípedo rectangular mostrado en la figura.

- a) Determinar las coordenadas del punto B.
- b) Calcular el ángulo φ que forman el vector \vec{d} y la diagonal BC de la cara superior.
- c) Calcular la distancia del punto B a la diagonal AC.



49 Sea el prisma triangular de la figura tal que el punto C pertenece al plano YZ, el segmento BC es paralelo al eje X y el punto E pertenece al plano XY.



Determinar:

- La coordenada z del punto B.
- La longitud del segmento de recta \overline{AB} .
- El área de la cara BCDE.

50.- Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura, donde $\overline{BC} = (0, 2, -2)$. Determinar:

$$\overline{BC} =$$

- Las coordenadas del punto E.
- Las coordenadas del punto F.
- El área del triángulo ACD.

