



FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUBOS

Diferencia de cubos

Se llama *diferencia de cubos* a un binomio de la forma

$$a^3 - b^3$$

en donde a y b son números reales. Las siguientes expresiones son ejemplos de diferencias de cubos:

- 1) $27 - x^3$
- 2) $m^6 - n^9$
- 3) $a^{12} - 1$

Factorización de una diferencia de cubos

La factorización de una diferencia de cubos $a^3 - b^3$ es el producto de un binomio y un trinomio

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

El binomio es la diferencia de las raíces cúbicas de cada término de la diferencia de cubos y el trinomio es muy semejante a un trinomio cuadrado perfecto, pero el término cruzado no es multiplicado por dos.



Ejemplo 1

Factorizar $125x^3 - 27y^6$

Solución

El proceso se describe en las siguientes tablas:

Descripción	Diferencia de cubos		
Se obtiene la raíz cúbica de cada término de la diferencia	$125x^3$ \downarrow $5x$	-	$27y^6$ \downarrow $3y^2$

Descripción	Binomio	Trinomio
Se construyen los correspondientes binomio y trinomio	$5x - 3y^2$	$25x^2 + 15xy^2 + 9y^4$

Por lo tanto,

$$125x^3 - 27y^6 = (5x - 3y^2)(25x^2 + 15xy^2 + 9y^4)$$

Ejemplo 2

Factorizar $1 - z^6$

Solución

El proceso se describe en las siguientes tablas:



Descripción	Diferencia de cubos		
Se obtiene la raíz cúbica de cada término de la diferencia	1 ↓ 1	-	z^6 ↓ z^2

Descripción	Binomio	Trinomio
Se construyen los correspondientes binomio y trinomio	$1 - z^2$	$1 + z^2 + z^4$

Por lo tanto,

$$1 - z^6 = (1 - z^2)(1 + z^2 + z^4)$$

Obsérvese que el binomio de la factorización es una diferencia de cuadrados, que también puede escribirse como

$$1 - z^2 = (1 + z)(1 - z)$$

por lo que finalmente

$$1 - z^6 = (1 + z)(1 - z)(1 + z^2 + z^4)$$

Ejemplo 3

Factorizar $(m + n)^3 - (m - n)^3$

Solución



El proceso se describe en las siguientes tablas:

describe en las siguientes

Descripción	Diferencia de cubos		
Se obtiene la raíz cúbica de cada término de la diferencia	$(m + n)^3$ ↓ $m + n$	-	$(m - n)^3$ ↓ $m - n$

Descripción	
Se construyen los correspondientes binomio y trinomio	$(m + n) - (m - n)$ $(m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2$

Por lo tanto

$$(m + n)^3 - (m - n)^3 = [(m + n) - (m - n)][(m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2]$$

$$(m + n)^3 - (m - n)^3 = (2n)[(m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2]$$

Si se desarrolla el trinomio de la última expresión se obtiene

$$(m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - n^2 + m^2 - 2mn + n^2$$

$$(m + n)^2 + (m + n)(m - n) + (m - n)^2 = 3m^2 + n^2$$

Por lo que la factorización de la diferencia de cubos inicial es

$$(m + n)^3 - (m - n)^3 = 2n(3m^2 + n^2)$$



Ejemplo 4

Factorizar como una diferencia de cubos $x - y^3$

Solución

El proceso se describe en las siguientes tablas:

Descripción	Diferencia de cubos		
Se obtiene la raíz cúbica de cada término de la diferencia	x \downarrow $\sqrt[3]{x}$	-	y^3 \downarrow y

Descripción	Binomio	Trinomio
Se construyen los correspondientes binomio y trinomio	$\sqrt[3]{x} - y$	$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} y + y^2$

Por lo tanto, $x - y^3 = (\sqrt[3]{x} - y) (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} y + y^2)$