



Rotación de ejes

Introducción:

Al escuchar este término, se ha llegado a dar por entendido que la cónica en estudio ha girado junto con sus ejes para colocarse en una nueva posición y esto no es cierto.

Al hablar de rotación, se menciona un elemento base como lo es el ángulo de giro y de ahí la idea de que existe tal “movimiento”. En realidad sí hay un ángulo que recibe dicho nombre y es el que se forma por el eje “X” con uno de los ejes del sistema de referencia alterno que se requiere determinar para lograr la identificación de la curva, es muy importante que se entienda este concepto para que de ninguna manera se llegue a la falsa conclusión de que una cónica gira.

Definición

Cuando en la ecuación general de segundo grado

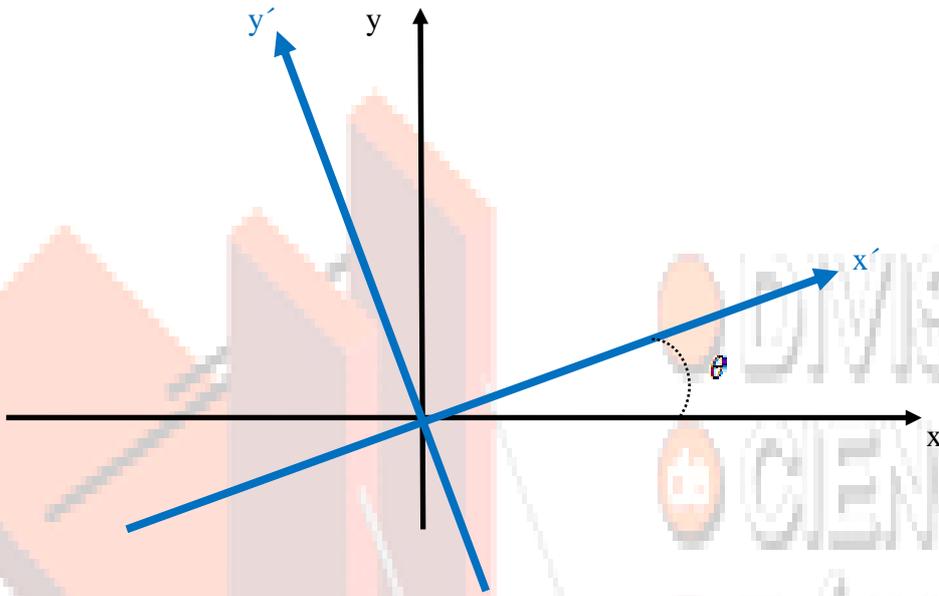
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

el coeficiente “B” es diferente de cero, el término mixto (o cruzado) indica que los ejes de la cónica tienen un ángulo respecto al sistema original que es el que se tendrá que obtener para iniciar el estudio.

Para determinar el “ángulo de giro” se recurre a la expresión:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

Corresponde a la trigonometría la demostración de dicha expresión. Si los ejes a utilizar se denominan “X’ ” y “ Y’ ” (equis prima y ye prima) el ángulo θ es entonces el que aparece en el siguiente diagrama:



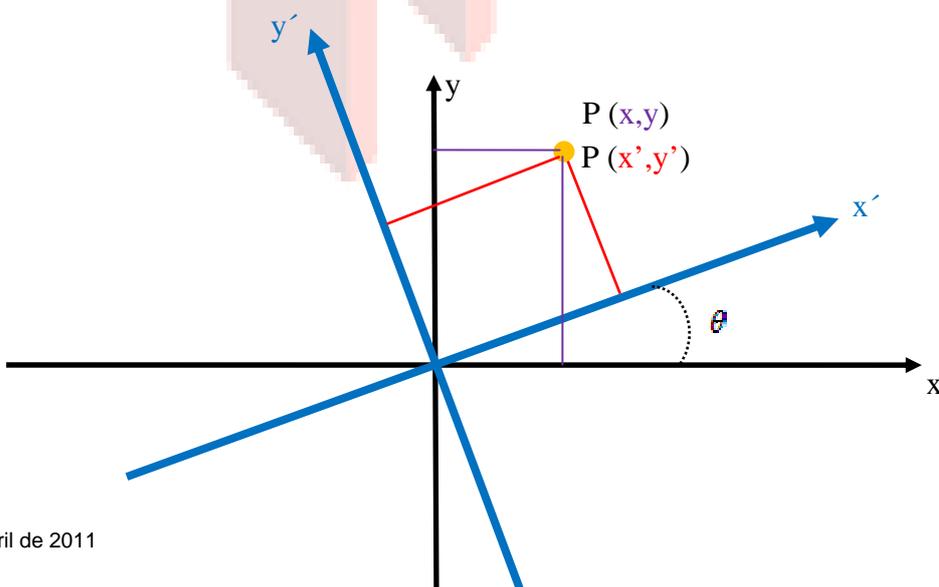
Los nombres pueden variar y los nuevos ejes podrían denominarse también “u” y “v” para evitar confusiones.

Para obtener una nueva ecuación en términos de los nuevos ejes se requiere sustituir en la ecuación de segundo grado a “X” y a “Y” por sus expresiones equivalentes en función de X’ y de Y’. Las ecuaciones que permiten esta sustitución son las siguientes:

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

Igualmente corresponde a la trigonometría la demostración de las ecuaciones presentadas.





Un primer ejemplo. Identificar la cónica de ecuación

$$xy = 1$$

En esta ecuación, los valores de A y de C son iguales a cero. Es común suponer que el valor de "x" o el de "y" es cero por no aparecer el término cuadrático Ax^2 ó Cy^2 , pero esto es erróneo puesto que de ser cierto, también el término cruzado valdría cero y por lo tanto tampoco aparecería. En el término cruzado, su coeficiente es igual a uno, valor de la constante B. En la expresión que permite obtener el "ángulo de giro" se tiene una división entre cero.

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0}$$

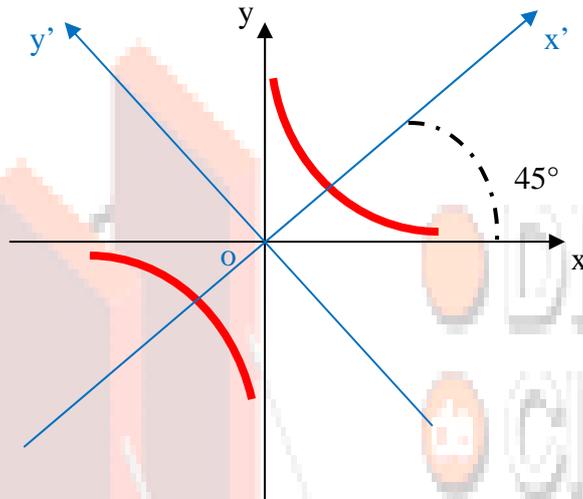
lo cual es inexistente. Si bien no se puede calcular, si se puede interpretar, la tangente es inexistente (o tiende a infinito) cuando el ángulo es de 90° por lo que si $2\theta = 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$ que es la solución al valor del ángulo. Al sustituir en las ecuaciones de x' y de y' , tenemos

$$\begin{aligned}x &= x'(\cos 45^\circ) - y'(\sin 45^\circ) & x &= \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\y &= x'(\sin 45^\circ) + y'(\cos 45^\circ) & y &= \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

y al sustituir éstas últimas en la ecuación original queda un producto de binomios conjugados que es igual a la diferencia de cuadrados

$$\left(\frac{x'}{2}\right)^2 - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 1$$

La cual ahora sí es identificable como una hipérbola equilátera con centro en el origen y cuyo eje es paralelo y coincidente con el eje X' . La gráfica es



DIVISIÓN
CIENCIAS
BÁSICAS