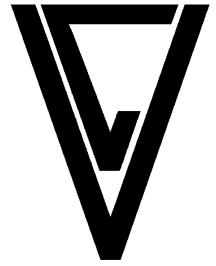




UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería  
División de Ciencias Básicas  
Coordinación de Matemáticas  
Cálculo Vectorial  
Primer Examen Final Colegiado  
Tipo C



Semestre: 2016-2

Duración máxima: 2 horas

Nombre: \_\_\_\_\_

No. de cuenta: \_\_\_\_\_

1. Determinar los valores extremos de la función  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  sujetos a la restricción  $x^2 + y^2 = 1$ .

15 PUNTOS

2. Una partícula se mueve desde el punto A (1,-1,1) para  $t = 0$  s , con una velocidad dada por

$$\vec{v}(t) = [(2t)\hat{i} + (2t)j + (t)k] \quad m/s$$

Determinar en  $t = 1$  s :

- Las coordenadas del punto P donde se encuentra la partícula.
- Los vectores aceleración tangencial y normal de la partícula.
- La curvatura de la trayectoria descrita por la partícula.

20 PUNTOS

3. Determinar la divergencia y el rotacional del campo

$$\vec{F}(r, \theta, z) = (r \cos \theta) e_r + (r \sin \theta) e_\theta + (z) e_z$$

expresado en coordenadas cilíndricas circulares

15 PUNTOS

4. Sean el campo  $\bar{R}(x, y, z) = (x, y, z)$  y la curva  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Calcular  $\int_c \bar{R} \cdot d\bar{r}$  desde  $A(1, 0, 1)$  hasta  $B(0, 1, 1)$ .

15 PUNTOS

5. Calcular la circulación del campo

$$\bar{F}(x, y, z) = (\text{sen } x + yz) \hat{i} + (2xz) \hat{j} + (\text{sen } z + xy) \hat{k}$$

a lo largo de una vuelta a la curva  $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9 \end{cases}$

20 PUNTOS

6. Calcular el flujo neto del campo vectorial

$$\bar{F}(x, y, z) = (yz) \hat{i} + (xz) \hat{j} + (3z^2) \hat{k}$$

a través de la región D en el primer octante limitada por los planos coordenados y por las superficies  $x^2 + y^2 = 9$  y  $z = 4$ .

15 PUNTOS



Semestre: 2016-2

1.

Sea  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$  y  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$  y  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$  si  
 $\nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow (2x, 4y) = (2x\lambda, 2y\lambda)$  de donde

$$\begin{cases} 2x\lambda = 2x \\ 2y\lambda = 4y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{si } \lambda = 1 & \text{si } x = 0 \\ y = 0 & y = \pm 1 \\ x = \pm 1 & \lambda = 2 \end{matrix}$$

$P_1(1, 0)$   $P_2(-1, 0)$   $P_3 = (0, 1)$   $P_4 = (0, -1)$  los valores de  $f$  son :

$f(1, 0) = 1$   $f(0, 1) = 2$  *máximo valor de la función es 2*  
 $f(-1, 0) = 1$   $f(0, -1) = 2$  *mínimo valor de la función es 1*

2.

a)  $\overline{R}(t) = \int \overline{v}(t) dt = (t^2 + c_1)\hat{i} + (t^2 + c_2)\hat{j} + (\frac{1}{2}t^2 + c_3)\hat{k}$

En  $t = 0$   $\overline{R}(0) = (1, -1, 1) \rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$  por lo que

$\overline{R}(t) = (t^2 + 1)\hat{i} + (t^2 - 1)\hat{j} + (\frac{1}{2}t^2 + 1)\hat{k}$

Para  $t = 1$

$\overline{R}(1) = 2\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{k} \rightarrow P = (2, 0, \frac{3}{2})$

b)  $\overline{a}(t) = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

En  $t = 1$

$\overline{a}_T = \frac{\overline{a} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}|^2} = \frac{(2, 2, 1) \cdot (2, 2, 1)}{3^2} (2, 2, 1) = (2, 2, 1)$

$\overline{a}_T = (2, 2, 1)$  y  $\overline{a}_N = (0, 0, 0)$

c)  $k = 0$  puesto que la trayectoria es una línea recta

3.

Sea la divergencia

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (rz) \right)$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{r} (2r \cos \theta + r \cos \theta + r) = 3 \cos \theta + 1$$

El rotacional

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r \cos \theta & r^2 \operatorname{sen} \theta & z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} (2r \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen} \theta) e_z$$

$$\nabla \times \bar{F} = (3 \operatorname{sen} \theta) e_z$$

4.

Sea

$$c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t \, dt \\ dy = \cos t \, dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\bar{R} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 1 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \end{vmatrix} dt = \left[ (-\cos t) \hat{i} + (-\operatorname{sen} t) j + k \right] dt$$

$$\int_c \bar{R} \times d\bar{r} = \hat{i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \, dt + j \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sen} t \, dt + k \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

Por lo que

$$\int_c \bar{R} \times d\bar{r} = -\hat{i} - j + \frac{\pi}{2} k$$

5.

Sea

$$\nabla_x \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{sen } x + yz & 2xz & \text{sen } z + xy \end{vmatrix} = (-x)\hat{i} + (z)\hat{k}$$

El vector normal al círculo  $S$  limitado por  $C$  es  $K$ :

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla_x \bar{F}) \cdot \bar{K} dS = \iint_S z dS = 9 \iint_S dS = 9 A(S) = 81\pi$$

6.

$$\text{Flujo neto de } \bar{F} = \oiint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS$$

Por el teorema de Divergencia:

$$\bar{F} = \oiint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iiint_D \text{div } \bar{F} dV; \quad \text{div } \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = 6Z$$

En coordenadas cilíndricas circulares:

$$D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq (\pi/2)\}$$

$$\text{Flujo de } \bar{F} = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^4 6zr dz dr d\theta$$

$$= 6\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^3 \int_0^4 rz dz dr$$

$$= 3\pi \int_0^3 \frac{rz^2}{2} \Big|_0^4 dr$$

$$= \frac{3}{2} \pi \int_0^3 r(16) dr$$

$$= 24\pi \int_0^3 r dr$$

$$= 12\pi r^2 \Big|_0^3 = 12\pi(9)$$

$$= 108\pi \text{ unidades de flujo}$$

