Vniversidad Nacional Autónoma de México

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Primer Examen Final Colegiado

Tipo A

Semestre: 2016-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: ____________________

---

1. Mediante multiplicadores de Lagrange dimensionar una lata cilíndrica con tapa que debe contener 1 litro de agua, tal que la cantidad de lámina requerida para su elaboración sea mínima.

20 PUNTOS

---

2. Sea la transformación

$$T:\begin{cases} u = ax + 2y + 2z \\ v = -2x - y + bz \\ w = -2x + cy - z \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a, b y c, tal que la transformación sea ortogonal.

b) Empleando la transformación T, obtener el vector gradiente ∇F de la función $F(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2$

15 PUNTOS

---

3. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas expresado por

$$\bar{F}(x,y,z) = yi + (x + e^{2z})\,j + (1 + 2ye^{2z})k$$

sobre una partícula que se desplaza desde el punto $\mathrm{A}(-1,1,0)$ hasta el punto $\mathrm{B}(1,1,0)$ a lo largo del segmento de recta que los une.

20 PUNTOS

4. La posición medida en metros de una partícula con respecto al tiempo está determinada por la función vectorial $\overline{r}(t)=(2\cos t,\ 2\,sen\,t)$, donde t está medido en segundos. La partícula comienza a moverse en $t=0$ segundos.

a) Calcular la distancia recorrida $\dfrac{\pi}{2}$ segundos después de que empezó a moverse.

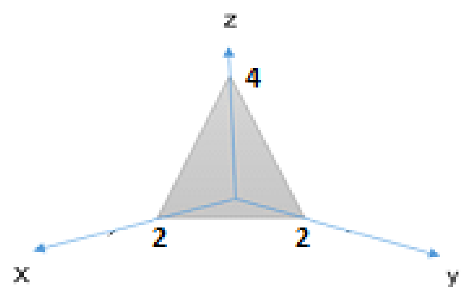
b) Obtener las coordenadas de la posición de la partícula después de que recorrió 2π metros, medidos desde que comenzó a moverse.

c) Determinar la aceleración normal en $t=\dfrac{\pi}{2}$.

15 PUNTOS

---

5. Calcular el área de la porción del plano que se muestra en la figura empleando una integral doble.



15 PUNTOS

---

6. Calcular el flujo neto del campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z)=(yz)\,\boldsymbol{i}+(xz)\,\boldsymbol{j}+(3z^2)\,\boldsymbol{k}$$

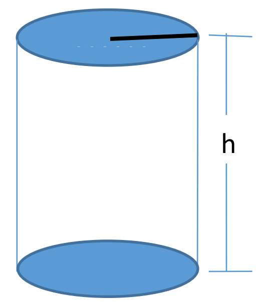
a través de la región D en el primer octante limitada por los planos coordenados y por las superficies $x^2+y^2=4$ y $z=2$

15 PUNTOS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO VECTORIAL

Semestre: 2016-2 **SOLUCIÓN PRIMER EXAMEN FINAL TIPO "A"**

1. *Sea la figura*



$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \textit{función objetivo}$$

$$g(r,h) = \pi r^2 h = 1000\,cm^3 \ \textit{función restricción}$$

$$\textit{entonces } l(r,h,\lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$$

$$l_r(r,h,\lambda) = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi\lambda hr = 0$$

$$l_h(r,h,\lambda) = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0 \qquad \rightarrow \begin{cases} 2r + h + \lambda rh = 0 \\ (2+\lambda r)r = 0 \\ \pi r^2 h - 1000 = 0 \end{cases}$$

$$l_\lambda(r,h,\lambda) = \pi r^2 h - 1000 = 0$$

$$r = -\frac{2}{\lambda}, \quad h = -\frac{4}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \pi\left(\frac{4}{\lambda^2}\right)\left(-\frac{4}{\lambda}\right) = 1000 \quad \textit{de donde} \ \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1000}{-16\pi}$$

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad \therefore\ r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad y \quad h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

---

2. *Sean*

$$a) \quad \begin{matrix} \nabla u = (a,2,2) \\ \nabla v = (-2,-1,b) \\ \nabla w = (-2,c,-1) \end{matrix} \ \rightarrow \ \begin{matrix} \nabla u\cdot\nabla v = -2a - 2 + 2b = 0 \\ \nabla u\cdot\nabla w = -2a + 2c - 2 = 0 \\ \nabla v\cdot\nabla w = 4 - c - b = 0 \end{matrix} \ \rightarrow \ \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{matrix}$$

$$b) \quad |\nabla u| = (1,2,2) = 3$$

$$|\nabla v| = (-2,-1,2) = 3 \quad \rightarrow \quad h_u = h_v = h_w = \frac{1}{3}$$

$$|\nabla w| = (-2,2,-1) = 3$$

$$c) \quad \nabla F(u,v,w) = 3\frac{\partial F}{\partial u}e_u + 3\frac{\partial F}{\partial v}e_v + 3\frac{\partial F}{\partial w}e_w = 6u\,e_u + 6v e_v + 6w e_w$$

$3.\ Si\ \ \nabla x F = 0 \qquad F\ es\, conservativo\ \rightarrow\ F = \nabla\phi$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x + e^{2z} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 1 + 2ye^{2z}$$

$$\phi(x,y,z) = xy + c_1(y,z) \qquad \phi(x,y,z) = xy + ye^{2z} + c_2(x,z) \qquad \phi(x,y,z) = z + y\,e^{2z}$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2}y + ye^{2z} + z + k\ \rightarrow w = \phi(1,1,0) - \phi(-1,1,0) = (2+k) - k$$

$$\therefore w = 2 \quad unidades\ de\ trabajo$$

$4.\quad a)\ Si\ \ \overline{u}(t) = (-2sen\,t, 2\cos t)$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi\, m$$

$$b)\ \int_0^t 2dt = 2\pi\ \longrightarrow\ 2t = 2\pi \longrightarrow\ t = \pi\, s \qquad \therefore \overline{r}(\pi) = (-2, 0)$$

$$c)\ \overline{a}(t) = (-2\cos t, -2sen\,t)$$

$$\overline{u}(\frac{\pi}{2}) = (-2,0) \qquad \overline{a}(\frac{\pi}{2}) = (0,-1)\ \longrightarrow\ \overline{u}\cdot\overline{a} = 0$$

$$\overline{a_t} = \overline{0} \quad \longrightarrow \quad \overline{a_N} = (0,-2)\, m/s$$

5.

$$A(s) = \iint_S ds \quad donde\ z = 4 - 2x - 2y$$

$$A(\mathrm{s}) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\ dA = \iint_{R_{xy}} \sqrt{4+4+1}\ dA$$

$$A(s) = 3\iint_{R_{xy}} dA,\ \ A(s) = 3A(R_{xy}) \quad \therefore A(s) = 6u^2$$

6.

Sea la figura

$$\nabla \cdot \overline{F} = 6z$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \int_0^{2} 6zr\, dz\, dr\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} 12r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 24\, d\theta = 12\pi \ \textit{unidades de flujo}$$