UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

CÁLCULO VECTORIAL

8 DE JUNIO DE 2016

SEMESTRE
2016 - 2

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de **2** horas.

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2 y + 2y - 9z \, .$$

16 puntos

2. Calcular el ángulo de intersección entre las superficies

$$S_1 : \ \bar{R}(u, v) = (-3)\ \mathbf{i} + (u+v)\,\mathbf{j} + (u-2v)\,\mathbf{k}$$

y

$$S_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

16 puntos

3. Sea el sistema ortogonal *UV* definido por las ecuaciones de transformación

$$\begin{cases} x = a\,u\,v \\ y = u^2 - v^2 \end{cases} \quad \textbf{con} \quad a > 0.$$

Determinar:

a) **El valor de la constante** a.

b) **Los vectores** $\hat{e}_u$ y $\hat{e}_v$.

c) **El jacobiano** $J\left(\dfrac{x,\ y}{u,\ v}\right)$.

d) **El laplaciano de la función** $g(u,v) = u^2 + v^2$.

16 puntos

---

4. Sea el campo vectorial $\bar{E}(x,y,z) = (2x + z^3)\ \mathbf{i} + \left(z^2\right)\ \mathbf{j} + (2yz + 3xz^2)\ \mathbf{k}$. **Determinar** $\int_C \bar{E} \cdot d\bar{r}$ **donde *C* es la curva cuya ecuación vectorial es** $C:\ \bar{r}(t) = (t+1)\ \mathbf{i} + (t-1)\ \mathbf{j} + (t-3)^2\ \mathbf{k}$ **con** $1 \le t \le 3$.

16 puntos

---

5. Determinar la integral de superficie $\iint_S x\,y^2\,dS$ **en donde *S* es la porción del cilindro de ecuación** $x^2 + y^2 = 4$ **limitado por el primer octante y por el plano** $z = 2$.

20 puntos

---

6. Calcular el flujo neto del campo vectorial $\bar{F}(r,\theta,z) = (r)\hat{e}_r + (z)\hat{e}_\theta + \hat{e}_z$, **expresado en coordenadas cilíndricas circulares, a través de la esfera** $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

16 puntos

1.

$1. Sea\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-x^2y+2y-9z$

$fx=2x-2xy=0 \qquad A(0,-1,9/2) \qquad Por\ lo\ que$

$$fy=2y-x^2+2=0 \quad si \quad B(2,1,9/2) \qquad \Delta H=\begin{Bmatrix} 2-2y-\lambda & -2x & 0 \\ -2x & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{Bmatrix}$$

$fz=2z-9=0 \qquad C(-2,1,9/2)$

$En\ A: \Delta H=(4-\lambda)(2-\lambda)^2$

$\lambda_1=4>0\ , \quad \lambda_2=\lambda_3=2>0 \quad \therefore es\ mínimo\ relativo$

$En\ B: \Delta H=$

2.

$a)\ \overline{R}(\mathrm{t})=\int \overline{v}(t)dt=(t^2+c_1)\hat{i}+(t^2+c_2)j+(\frac{1}{2}t^2+c_3)k$

$En\ t=0 \quad \overline{R}(0)=(-1,1,1) \longrightarrow c_1=-1, \quad c_2=1 \quad c_3=1 \quad por\ lo\ que$

$\overline{R}(\mathrm{t})=(t^2-1)\hat{i}+(t^2+1)j+(\frac{1}{2}t^2+1)k$

$Para \quad t=1$

$\overline{R}(1)=2\hat{i}+\frac{3}{2}k \qquad \longrightarrow \qquad P=(0,2,\frac{3}{2})$

$b)\ \overline{a}(t)=2\hat{i}+2j+k$

$En\ t=1$

$$\overline{a_T}=\frac{\overline{a}\bullet\overline{v}}{|\overline{u}|^2}=\frac{(2,2,1)\bullet(2,2,1)}{3^2}(2,2,1)=(2,2,1)$$

$\overline{a_T}=(2,2,1) \qquad y \qquad \overline{a_N}=(0,0,0)$

$c)\ k=0 \qquad puesto\ \ que\ la\ \ trayectoria\ \ es\ una\ línea\ \ recta$

3.

$$Sea\ la\ divergencia$$

$$\nabla \bullet \overline{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\, sen\,\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rz)\right.$$

$$\nabla \bullet \overline{F} = \frac{1}{r}(2r\cos\theta + r\cos\theta + r) = 3\cos\theta + 1$$

$$El\ rotacional$$

$$\nabla x \overline{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r\cos\theta & r^2 sen\,\theta & z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}(2r\, sen\,\theta + r\, sen\,\theta)\, e_z$$

$$\nabla x \overline{F} = (3\, sen\,\theta)\, e_z$$

4.

$$Sea$$

$$c:\begin{cases} x = \cos t & \\ y = sent \quad t\varepsilon\left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow \\ z = 2 & \end{cases} \qquad \begin{matrix} dx = -sent\, dt \\ dy = \cos t\ dt \\ dz = 0 \end{matrix}$$

$$\overline{R}x\overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \cos t & sent & 2 \\ -sen\, x & \cos t & 0 \end{vmatrix} dt = \left[(-2\cos t)\hat{i} + (-2sent)\, j + k\right] dt$$

$$\int_C \overline{R}xd\overline{r} = \hat{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos t\, dt + j\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2sent\, dt + k\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$Por\ lo\ que$$

$$\int_c \overline{R}xdr = -2\hat{i} - 2\, j + \frac{\pi}{2} k$$

5.

Sea

$$\nabla x\overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ sen\, x + yz & 2xz & sen\, z + xy \end{vmatrix} = (-x)\hat{i} + (z)\, k$$

$El\ vector\ normal\ al\ circulo\ S$ limitado $por\ C\ es\ \ K:$

$$\oint_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r} = \iint_S (\nabla x \overline{F}) \bullet K\, dS = \iint_S zdS = 4\iint_S dS = 4\,A(S) = 16\,\pi$$

6.

$$Flujo\ neto\ de\ \overline{F} = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\, dS$$

$Por\ el\ teorema\ de\ Divergencia:$

$$\overline{F} = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\, dS = \iiint_D div\ \overline{F}\, dV\,; \quad div\, \overline{F} = \overline{\nabla} \bullet \overline{F} = 6Z$$

$En\ coordenadas\ cilídricas\ circulares:$

$$D = \left\{ (r, \theta, z) \middle| 0 \le z \le 4,\ \ 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le (\pi / 2) \right\}$$

$$Flujo\ de\ \overline{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^4 6\, zr\, dzdrd\theta$$

$$= 6(\frac{\pi}{2}) \int_0^3 \int_0^4 rz\, dz\, dr$$

$$= 3\pi \int_0^3 \frac{rz^2}{2} \Bigg|_0^4 dr$$

$$= \frac{3}{2} \pi \int_0^3 r(16) dr$$

$$= 24\pi \int_0^3 r dr$$

$$= 12\pi r^2 \Bigg|_0^3 = 12\pi(9)$$

$$= 108\pi\ unidades\ de\ \ flujo$$