UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

CÁLCULO VECTORIAL

TIPO A

3 DE DICIEMBRE DE 2019

Semestre 2020–1 **Duración máxima: 2.0 horas**

Nombre: ______________________________ No. de cuenta: ____________

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función definida por

$$f(x, y) = x^2 y - x^2 - 3xy + 3x + 2y - 2$$

15 puntos

2. Una partícula se mueve describiendo la trayectoria definida por la función vectorial

$$\overline{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2\right)\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$$

en donde t es el tiempo. En el punto $P(1, 0, -1)$ determinar:

a) Los vectores del triedro móvil.
b) Una ecuación cartesiana del plano osculador.
c) La aceleración tangencial y la aceleración normal de la partícula.

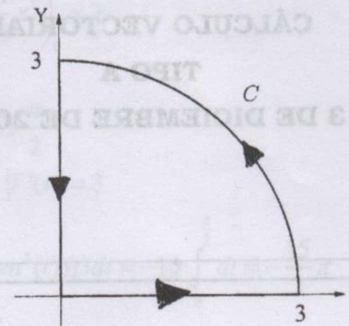
15 puntos

3. Sea $h(r,\theta,z) = r^2 z\,\text{sen}(\theta)$ la función potencial del campo vectorial $\overline{H}(r,\theta,z)$, ambos expresados en coordenadas cilíndricas circulares. Obtener:

a) Las componentes del campo $\overline{H}(r,\theta,z)$.
b) El laplaciano de $h(r,\theta,z)$.

20 puntos

4. Sean la función definida por $f(x,y)=4-x^2-y^2$ y la curva cerrada C, formada por los dos segmentos de recta y el arco de circunferencia mostrados en la figura. Calcular $\oint_C f(x,y)\,ds$.



15 puntos

5. Obtener la circulación del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(yz^2)\mathbf{i}+(xz^2)\mathbf{j}+(z^4)\mathbf{k}$ a lo largo de una vuelta a la elipse $C:\begin{cases}2x^2+xy+y^2=1\\ z-4=0\end{cases}$ recorrida en sentido positivo.

15 puntos

6. Determinar el flujo neto del campo $\overline{F}(x,y,z)=(x^3)\mathbf{i}+(y^3)\mathbf{j}+(z^3)\mathbf{k}$ a través de la superficie cerrada limitada por las gráficas de las funciones $z=0$ y $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

20puntos

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Segundo Examen Final
03 de diciembre de 2019 TIPO A
Semestre: 2020-1

1.-
Se obtienen los puntos críticos de f al resolver el sistema de ecuaciones

$f_x(\mathrm{x,y}) = 2\,\mathrm{xy} - 2\,\mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 3 = 0$

$f_y(\mathrm{x,y}) = \mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2 = (\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1) = 0$

Por lo que los puntos críticos de la función son P(1,1) y Q(2,1).
Las segundas derivadas de f son $f_{xx}(x,y) = 2y-2,\ f_{yy}(x,y) = 0,$ y $f_{xy}(x,y) = 2x-3,$ por lo que el hessiano de la función es $h(\mathrm{x,y}) = -(2\,\mathrm{x}-3)^2,$ por lo que se tiene que $h(1,1) = \mathrm{h}(2,1) = -1$ lo que implica que tanto en P como en Q la función f no tienen valor extremo, pero su gráfica tiene un punto silla.
.

15 PUNTOS

2.-
a) Para $t = 0$ la partícula se encuentra e el punto $P(1,0,-1)$.

$\bar{r}'(\mathrm{t}) = (t^2)i + (\mathrm{t})\,\mathrm{j} + \mathrm{k}$ $\qquad \bar{r}'(0) = \mathrm{k}$

$\bar{r}''(\mathrm{t}) = (2\,\mathrm{t})\mathrm{i} + \mathrm{j}$ $\qquad \bar{r}''(0) = \mathrm{j}$

$\bar{r}'(0) \times \bar{r}''(0) = k \times j = -i \ \rightarrow\ T = k,\ B = -i\ y\ N = j$

b)Un vector perpendicular al plano osculador es $B = -i$, y como dicho plano contiene a P se tienen que una ecuación general de él es $\pi : -(\mathrm{x}-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi : \mathrm{x} = 1.$

c)Como $\bar{r}'(0) \cdot \bar{r}''(0) = k \cdot j = 0$ la velocidad y la aceleración de la partícula son perpendiculares entre sí en el punto P, lo que implica que $\bar{a}_T = 0\ y\ \bar{a}_N = \bar{r}''(0) = j$.

15 PUNTOS

3.-

a) $\bar{H}(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \nabla h(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \dfrac{\partial h}{\partial r}\hat{e}_r + \dfrac{\partial h}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \dfrac{\partial h}{\partial \mathrm{z}}\hat{e}_z = 2rzsen(\theta)\hat{e}_r + rz\cos(\theta)\hat{e}_r + r^2 sen(\theta)\hat{e}_z$

$$\nabla^2 h(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \nabla \cdot \nabla\,\mathrm{h}(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(2\,\mathrm{r}^2\mathrm{zsen}(\theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathrm{rzcos}(\theta)) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{r}^3\mathrm{sen}(\theta))\right)$$

b)

$$\nabla^2 h(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = 4zsen(\theta) - \mathrm{zsen}(\theta) = 3\mathrm{zsen}(\theta)$$

20 PUNTOS

4.-
La curva C puede ser descrita por la unión de las curvas C_1, C_2 y C_3, mostradas en la figura. Integrando a la función f sobre cada una de ellas se tiene:
Para C_1:

$$\int_{C_1} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} = \int_0^3 (4-\mathrm{x}^2)dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)_0^3 = 3$$

Para C_2

$$\bar{r}(\mathrm{t}) = 3\cos(\mathrm{t})\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{sen}(\mathrm{t})\,\mathrm{j} \qquad 0 \le \mathrm{t} \le \frac{\pi}{2}$$

$$r'(\mathrm{t}) = -3sen(\mathrm{t})\,\mathrm{i} + 3\cos(\mathrm{t})\,\mathrm{j} \quad \to \quad |r'(\mathrm{t})| = 3$$

Para C_3

$$\int_{C_1} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} = \int_3^0 (4-y^2)dy = \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)_3^0 = -3$$

$$Finalmente \oint_C f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} = \oint_{C_1} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} + \oint_{C_2} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} + \oint_{C_3} f(\mathrm{x,y})\,\mathrm{ds} = -\frac{15}{2}\pi$$

15 PUNTOS

5.-
El rotacional del campo es $\nabla \times \bar{F}(\mathrm{x,y,z}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\mathrm{z}^2 & x\mathrm{z}^2 & \mathrm{z}^4 \end{vmatrix} = -2xzi + 2yzj.$ Como la curva C está contenida en el plano $z = 4$ el vector perpendicular unitario a dicho plano es k.
La circulación solicitada, aplicando el Teorema de Stokes, es

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_S (-2\,\mathrm{xzi} + 2\,\mathrm{yzj}) \cdot k dS = 0$$

15 PUNTOS

6.-
Empleando el Teorema de Gauus, el flujo neto que atraviesa la superficie es

$$\Phi = \iiint_R \nabla \cdot \bar{E} dV = \iiint_R 3(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)dV$$

Empleando coordenadas esféricas:

$$\Phi = \iiint_R 3\rho^2 dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^4 sen(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(\phi) d\phi d\theta = \frac{3}{5}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6\pi}{5} u.f.$$

20 PUNTOS