Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Segundo Examen Extraordinario

Sinodales: ING.PATIÑO RAMÍREZ JESÚS ANTONIO
FÍS. RAMÍREZ MANNY PEDRO

Semestre: 2017-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: _______________________

1. Determinar las dimensiones del cono circular de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 5m.

15 PUNTOS

2. Sea la curva C representada por: $\bar{r}(t)=(\frac{1}{2}e^t\cos t)\hat{i}-(\frac{1}{2}e^t\,sent)\,j+(\frac{\sqrt{2}}{2}e^t)k$

   a) Encuentre la longitud de arco de la curva desde el punto $A(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ hasta el punto $B(\cos(\text{In}\,2),-\text{sen}(\text{In}\,2),\sqrt{2})$

   b) Determinar el vector tangente unitario a la curva C en el punto $A(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

20 PUNTOS

3. Utilice coordenadas curvilíneas para calcular el área de la región limitada por la elipse de ecuación $(x+3y+4)^2+(4x+3y-2)^2=64$.

15 PUNTOS

4. Calcular el trabajo de la fuerza $\overline{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición P(a,0) a la posición Q(0,b).

15 PUNTOS

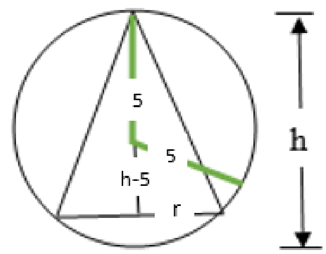
5. Determinar el área de la banda delimitada por las superficies $x^2+y^2+z^2=r^2, \quad \phi=\frac{\pi}{3}, \quad \phi=\frac{\pi}{6}$

15 PUNTOS

6. Hallar el flujo a través de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, donde $\overline{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

20 PUNTOS

1.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$(h-5)^2 + r^2 = 25$$

$$\ell(r,h,\lambda) = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \lambda\left[(h-5)^2 + r^2 - 25\right]$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h + 2\lambda r = 0 \qquad \rightarrow \lambda = -\frac{\pi h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 + 2\lambda(h-5) = 0 \quad \rightarrow \lambda = -\frac{\pi r^2}{6(h-5)} \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = (h-5)^2 + r^2 - 25 = 0$$

$$1 = 2$$

$$-\frac{\pi h}{3} = -\frac{\pi r^2}{6(h-5)} \quad \rightarrow \quad r^2 = 2h(h-5)$$

$$(h-5)^2 + 2h(h-5) = 25$$

$$h^2 - 10h + 25 + 2h^2 - 10h = 25$$

$$3h^2 - 20h = 0$$

$$h(3h-20) = 0$$

$$h = 0 \quad , \quad h = \frac{20}{3}$$

$$Entonces$$

$$r^2 = 2h(h-5)$$

$$r^2 = 2\left(\frac{20}{3}\right)\left(\frac{20}{3} - 5\right)$$

$$r^2 = \left(\frac{40}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{200}{9} \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{200}{9}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{200}{9}} \quad = \quad \pm\frac{10}{2}\sqrt{2}$$

$$Dimenciones$$

$$h = \frac{20}{3} m$$

$$r = \frac{10}{2}\sqrt{2}\ m$$

15 PUNTOS

2.

$a)$

Punto A

$$x = \frac{1}{2}e^{t}\cos t = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{t}\,sent = 0$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \; t = 0$$

Punto B

$$x = \frac{1}{2}e^{t}\cos t = \cos(\mathrm{In}\,2)$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{t}\,sent = -sen\,(\mathrm{In}\,2)$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \; e^{t} = 2 \;\rightarrow\; t = In2$$

$$s = \int_{0}^{in2}\left\|\overline{r'}(t)\right\| dt$$

$$\overline{r'}(t) = \frac{1}{2}[-e^{t}sent + e^{t}\cos t]\hat{i} - \frac{1}{2}[e^{t}\cos t + e^{t}sent]\,j + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t}\,k$$

$$\overline{r'}(t) = \frac{1}{2}e^{t}[\cos t - sent]\hat{i} - \frac{1}{2}e^{t}[\cos t + sent]\widehat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t}\widehat{k}$$

$$\left\|\overline{r'}(t)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}e^{2t}[\cos t - sent]^{2} + \frac{1}{4}e^{2t}[\cos t + sent]^{2} + \frac{2}{4}e^{2t}}$$

$$\left\|\overline{r'}(t)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{2}{4}e^{2t}} = \sqrt{e^{2t}} = e^{t}$$

$$s = \int_{0}^{in2} e^{t}\,dt = e^{t}\Big|_{0}^{in2} = e^{in2} - e^{0} = 2 - 1 = 1 \; unidad\;\; de\;\; long$$

$b)$ $\overline{r'}(0) = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\widehat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{k}$ $\quad \left\|\overline{r'}(\mathrm{o})\right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\widehat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{k}$$

20 PUNTOS

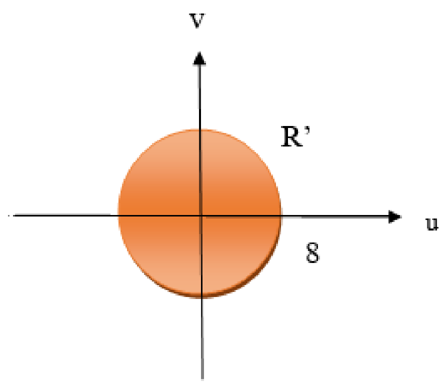
3.

$$T:\begin{cases} u = x+3y+4 \\ v = 4x+3y-2 \end{cases}$$

$$A_R = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| A_R\,'$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3-12 = -9$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \bullet \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{9}$$



$$u^2 + v^2 = 64$$

$$A_R\,' = \pi(8)^2 = 64\pi$$

$$A_R\,' = 64\pi \quad unidades\ de\ área$$

$$A_R = \left|-\frac{1}{9}\right|(64\pi)$$

$$A_R = \frac{64\pi}{9} \ unidades\ de\ área$$

15 PUNTOS

4.

$$\overline{\nabla} x \overline{F} = \left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]k = \overline{0}$$

$\overline{F}$ *es campo conservativo excepto en* $(0,0)$

$$\phi = \frac{1}{2} In(x^2+y^2) + c$$

$$\phi(P) = \frac{1}{2} In(a^2) + c \qquad ; \qquad \phi(Q) = \frac{1}{2} In(b^2) + c$$

$$W = \phi(Q) - \phi(P) = \frac{1}{2}[In(b^2) - In(a^2)] = \frac{1}{2} In(\frac{b}{a})^2$$

$$W = In(\frac{b}{a}) \ u.t.$$

15 PUNTOS

5.

$$A=\iint_{\sigma}\left|\overline{r_u}x\overline{r_v}\right|dudv$$

usando coordenadas esféricas

$$A=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{0}^{2\pi}\rho^2\,sen\phi\,d\theta d\phi \qquad ; \qquad \rho^2=r^2$$

$$A=2\pi r^2\int_{\pi/6}^{\pi/3}sen\phi\,d\phi=2\pi r^2(-\cos\phi)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$A=-2\pi r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi r^2(\sqrt{3}-1)\ u.a.$$

15 PUNTOS

6.

$$Flujo=\iiint_{v}div\,\overline{F}\ dv$$

$$\overline{\nabla}\bullet\overline{F}=\overline{\nabla}\bullet(\mathrm{xi}+\mathrm{yj}+\mathrm{zk})=3$$

$$\mathrm{Flujo}=\iiint_{v}3\,dv=3\iiint_{v}dv\ ; \quad r=a$$

$$=3\left[\frac{4}{3}\pi a^3\right]$$

$$Flujo=4\pi a^3\ u.f.$$

20 PUNTOS