Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL

**SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO**

**Sinodales: M.E.M. Enrique Arenas Sánchez**
**M.A. Francisco José Castillo Cortés**

Semestre: 2017-1 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________ No. de cuenta: ____________________

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f\left(x,y\right)=3x^4+4x^3-30x^2+6y^2-12xy$$

**15 PUNTOS**

2. Calcular el ángulo de intersección entre la curva $C$ y la superficie S representadas por:

$$C:\overline{r}_1\left(t\right)=\left(2cost\right)i+\left(2sent\right)j+\left(t\right)k\ ;\quad t\in\left[0,\pi\right]$$

y

$$S:\begin{cases} x=2\left(sen\,u\right)\cos v \\ y=2\left(sen\,u\right)sen\,v \quad u\in\left[0,\pi\right]\ ;\ v\in\left[0,2\pi\right] \\ z=2\cos u \end{cases}$$

en el punto donde $\left|\overline{r}_1\left(t\right)\right|=2$

**15 PUNTOS**

3. Sea el campo vectorial:

$$\overline{F}\left(r,\theta,z\right)=\left(sen^2\theta\right)\hat{e}_r+\left(sen2\theta\right)\hat{e}_\theta+\hat{e}_z$$

Determinar si $\overline{F}$ es un campo conservativo, si lo es, obtener su función potencial.

**15 PUNTOS**

4. Sea la transformación:

$$T:\begin{cases} u = 2x^2 - y^2 + 5 \\ v = 2xy^2 + 4 \end{cases}$$

Determinar:

a) Si el sistema de coordenadas $(u, v)$ es ortogonal.

b) Los factores de escala $h_u \;\; y \;\; h_v$

c) Los vectores base $\hat{e}_u \;\; y \;\; \hat{e}_v$

d) El jacobiano $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$

**20 PUNTOS**

5. Obtener la integral:

$$I = \int_C (x+y+z)\,dx + x^2 y z\,dy + 3xyz^2\,dz$$ desde el punto $A(0,0,1)$ hasta el punto $B(1,1,1)$.

Donde **C** es el segmento de parábola $C:\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$

**15 PUNTOS**

**6.** Calcular la circulación total del campo vectorial $\overline{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \mathrm{yi} - \mathrm{xj} + \mathrm{zk}$ alrededor de la curva representada por:

$$C:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad ; \quad z \geq 0$$

**20 PUNTOS**

**Universidad Nacional Autónoma de México**
**Facultad de Ingeniería**
**Cálculo Vectorial**
**Solución Segundo Examen Extraordinario**

**M.E.M. Enrique Arenas Sánchez**
**M.A. Francisco José Castillo Cortés**

**Semestre: 2017-1**

1. $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 3\mathrm{x}^4 + 4x^3 - 30x^2 + 6y^2 - 12xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 + 12x^2 - 60x - 12y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y - 12x = 0$$
$$y = x$$

$$12x^3 + 12x^2 - 60x - 12y = 0$$
$$12(x^3 + x^2 - 6x) = 0$$
$$\mathrm{x}(x^2 + x - 6) = 0$$
$$x(x+3)(x-2) = 0$$

Puntos críticos $P_1(0,0)$, $P_2(-3,-3)$, $P_3(2,2)$

$$H = \begin{vmatrix} 36x^2 + 24x - 60 & -12 \\ -12 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 \begin{vmatrix} 3x^2 + 2x - 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Para\ P_1(0,0); \qquad H\Big|_{P_1} = 12^2 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -12^2(6) < 0 \therefore P_1 \ \ es\ un\ P.S.$$

$$Para\ P_2(-3,-3); \qquad H\Big|_{P_2} = 12^2 \begin{vmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 12^2(15) > 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 16 > 0 \ \therefore P_2 \ \ existe\ un\ mínimo$$

$$Para\ P_3(2,2); \qquad H\Big|_{P_3} = 12^2 \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 12^2(10) > 0; \ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_3} = 11 > 0 \ \therefore P_3 \ existe\ un\ mínimo$$

**15 PUNTOS**

2.

$\overline{r_1}(t) = 2\cos t\, i + 2sent\; j + tk$

$\overline{r_2}(u,v) = 2senu\cos v\; i + 2senu\, senv\; j + 2\;\cos u\, k$

$\cos t = 2senu\cos v$

$sent = 2senu\cos v$

$t = 2\;\cos u$

$si\;\; t = 0 \quad \cos u = 0 \;\; \rightarrow \;\; u = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{sent}{\cos t} = \tan t = \tan v \rightarrow \;\; v = 0$

$\overline{r_1}(t) = \sqrt{4\cos^2 t + 4sen^2 t + t^2}$

$= \sqrt{4+t^2}$

$\sqrt{4+t^2} = 2$

$4 + t^2 = 4 \quad \longrightarrow \;\; t^2 = 0 \quad t = 0$

$\dfrac{\partial\overline{r_2}}{\partial u}\Big|_P = 0i + 0j - 2k$

$\dfrac{\partial\overline{r_2}}{\partial v}\Big|_P = 0i - 2j$

$\dfrac{\partial\overline{r_2}}{\partial u} = 2\cos u\cos v\; i + 2\cos u\, senv\; j - 2\;\, senu\, k$

$\dfrac{\partial\overline{r_2}}{\partial v} = -2senu\, senv\;\, i + 2senu\cos v\;\, j$

$$\overline{N_2} = \frac{\partial\overline{r_2}}{\partial u}\, x\, \frac{\partial\overline{r_2}}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4i$$

$\dfrac{d\overline{r_1}}{dt} = -2sent\, i + \; 2\cos t\;\, j + k \qquad\qquad \dfrac{d\overline{r_1}}{dt}\Big|_P = 2j + k$

$sen\,\alpha = \dfrac{(-4,0,0)\bullet(0,2,1)}{(4)(\sqrt{5})} = 0 \quad \rightarrow \;\; \alpha = 0^o$

**15 PUNTOS**

---

3.

$\overline{F}(\mathrm{p},\theta,\mathrm{z}) = \mathrm{sen}^2\,\theta e_p + sen2\theta e_\theta + e_z$

$$\nabla x\overline{F} = \frac{1}{p}\begin{vmatrix} \hat{e}_p & p\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ sen^2\theta & psen2\theta & 1 \end{vmatrix} = 0\;\hat{e}_p - 0\;\hat{e}_\theta + (sen2\theta - 2sen\theta\cos\theta)e_z$$

$como\;\; sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta\;\; ; \qquad\qquad sen2\theta - 2sen\theta\cos\theta = 0$

$\therefore\;\; \overline{F}\;\; es\;\; conservativo$

$como\;\; \overline{F} = \overline{\nabla} f \quad \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial p} = sen^2\theta\;; \qquad \dfrac{\partial f}{\partial\theta} = p\, sen2\theta; \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1$

$= 2p\, sen\theta\cos\theta$

$Integrando \quad f = psen^2\theta + z + c$

**15 PUNTOS**

4.

$$T:\begin{cases} u = 2x^2 - y^2 + 5 \\ v = 2xy^2 + 4 \end{cases}$$

$$\overline{\nabla} u = 4xi - 2yj$$

$$\overline{\nabla} v = 2y^2 i + 4xyj \qquad \overline{\nabla} u \bullet \overline{\nabla} v = 8xy^2 - 8xy^2 = 0$$

$$\therefore el \;\; sistema \;\; es \;\; ortogonal$$

$$h_u = \frac{1}{\left|\overline{\nabla} u\right|} = \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 4y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + y^2}}$$

$$h_v = \frac{1}{\left|\overline{\nabla} v\right|} = \frac{1}{\sqrt{4y^4 + 16x^2y^2}} = \frac{1}{2y\sqrt{y^2 + 4x^2}}$$

$$e_u = \frac{2xi - yj}{\sqrt{4x^2 + y^2}} \qquad e_v = \frac{yi + 2xj}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$$

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = huhv = \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 4y^2}} \frac{1}{\sqrt{4y^4 + 16x^2y^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + y^2}} \frac{1}{2y\sqrt{y^2 + 4x^2}}$$

$$= \frac{1}{4y\sqrt{4x^2 + y^2}}$$

**20 PUNTOS**

5.

$$\int_C (x, y, z)dx + x^2yzdy + (3xyz^2)dz =$$

$$\int_0^1 (x + x^2 + 1)dx + x^2(x^2)(1)(2x)dx + 3(x)(x^2)(1)^2(0)\,\mathrm{dx}$$

$$\int_0^1 (x + x^2 + 1 + 2x^5)dx = \frac{2x^6}{6} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+2+3+6}{6} = \frac{13}{6}$$

**15 PUNTOS**

6.

$$\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_R \overline{\nabla} x \overline{r} \cdot n \; dS$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \qquad \text{restando} \quad \mathrm{z}^2 = 8 - z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad z^2 = 4$$

$$z = \pm 2$$

$$z = 2 \; ; \quad x^2 + y^2 = 4$$

*Parametrizando*

$$x = 2\cos t \qquad t : 0 \to 2\pi$$

$$y = 2sent$$

$$z = 2$$

$$\oint_C \overline{F} \bullet d\overline{r} = \int_0^{2\pi} 2\,sen\,t(-2sent) - (2\cos t)(2\cos t) + 2(0)\,\mathrm{dx}$$

$$= -4\int_0^{2\pi} sen^2 t + \cos^2 \mathrm{t} \;\, dt$$

$$= -4\int_0^{2\pi} dt = -4t \Big|_0^{2\pi} = -8\pi \;\, u \;\, de \;\, circulación$$

**20 PUNTOS**