UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

PRIMER DE EXAMEN FINAL COLEGIADO

CÁLCULO VECTORIAL

TIPO B

SEMESTRE 2020 - 1

26 DE NOVIEMBRE DE 2019

Nombre: ______________________________ No. de cuenta: ______________

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función definida por

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^3-2xy-4x-3z$$

15 puntos

2. Obtener la ecuación de la circunferencia de curvatura de la parábola de ecuación $y=x^2-1$ en el vértice de dicha parábola.

20 puntos

3. Determinar si la función $g(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^7}}$ es armónica.

15 puntos

4. Sea el campo de fuerzas $\overline{F}(r,\theta,z)=(r\cos(\theta))\,\hat{\mathbf{e}}_r-\left(\dfrac{1}{2}r\operatorname{sen}(\theta)\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta+(z^2)\,\hat{\mathbf{e}}_z$. Determinar el trabajo que realiza dicho campo al desplazar una partícula desde el punto $A(0,0,0)$ hasta el punto $B\left(2,\dfrac{\pi}{2},3\right)$ a lo largo de la recta que los une. Tanto el campo como los puntos están expresados en coordenadas cilíndricas circulares.

15 puntos

5. Empleando el Teorema de Stokes obtener la circulación de $\overline{F}(x,y,z)=(z-y)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}$ a lo largo de una vuelta a la curva $C:\begin{cases}x^2+z^2=9\\ y=1\end{cases}$.

15 puntos

6. Mediante integración triple, calcular el volumen del tetraedro limitado por el plano $\pi:3x+3y+z=12$ y los planos coordenados.

20 puntos

1.-
$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 4x-2y-4=0 \\ f_y(x,y,z) &= 2y-2x=0 \\ f_z(x,y,z) &= 3z^2-3=0 \end{aligned} \quad \rightarrow \ \textit{los puntos críticos son } P(2,2,1) \ y \ Q(2,2,-1)$$

Las segundas derivadas de f son:

$f_{xx}(x,y,z)=4,\ f_{yy}(x,y,z)=2,\ f_{zz}(x,y,z)=6z,\ f_{xz}(x,y,z)=f_{xz}(x,y,z)=0\ y\ f_{xy}(x,y,z)=-2$

Por lo que, para cada uno de los puntos críticos, se tiene que

$$H(2,2,1)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad p(\lambda)=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+4)$$

Cuyas raíces son $\lambda_1=6, \lambda_2=3+\sqrt{5}\ y\ \lambda_3=3-\sqrt{5}$ todas ellas positivas, por lo que en P la función f tiene un valor mínimo relativo;

$$H(2,2,-1)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad p(\lambda)=(-6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(-6-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+4)$$

Cuyas raíces son $\lambda_1=-6, \lambda_2=3+\sqrt{5}\ y\ \lambda_3=3-\sqrt{5}$ por lo que en Q la función f no tiene valor extremo, peto su gráfica tiene un punto silla.

.

15 PUNTOS

2.-Una ecuación vectorial de la parábola es $\bar{r}(x)=(x)i+(x^2-1)j$ por lo que $\bar{r}'(x)=i+(2x)j,\ \ \bar{r}''(x)=2j$.

En el punto V(0,-1) que es el vértice de la parábola $\bar{r}'(0)=i,\ \bar{r}''(0)=2j\ y\ \bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)=2k,$ por lo que la curvatura en V es: $k=\dfrac{|\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)|}{|\bar{r}'(0)|^3}=2$ y el radio de curvatura es $\rho=\dfrac{1}{2}$.

En el punto V, $\bar{r}'(0)\times\bar{r}''(0)\times\bar{r}'(0)=2k\times i=2j$ por lo que el vector normal es $N=j$. El vector de posición del centro de curvatura es entonces $\bar{c}=\bar{v}+\rho N=-j+\dfrac{1}{2}j=-\dfrac{1}{2}j$, por lo que dicho punto es $C\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$. La ecuación de la circunferencia solicitada es $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

15 PUNTOS

3.-En coordenadas esféricas $g(\rho,\phi,\theta)=\rho^{-5}$, $\nabla g(\rho,\phi,\theta)=\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{-7})\hat{e}_{\rho}=-7\rho^{-8}\hat{e}_{\rho}$ y entonces

$$\nabla^2 g(\rho,\phi,\theta)=\nabla\bullet\nabla g(\rho,\phi,\theta)=-\frac{7}{\rho^2 sen\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 sen\phi\rho^{-8})=-\frac{7}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{-6})=20\rho^{-9}$$

15 PUNTOS

4.- El rotacional del campo es $\nabla\times\bar{F}(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ r\cos(\theta) & -\frac{1}{2}r^2 sen(\theta) & z^2\end{vmatrix}=\bar{0}\rightarrow$ que existe una función f tal que $\nabla f(r,\theta,z)=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{e}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z=(r\cos(\theta))\hat{e}_r-\left(\frac{1}{2}rsen(\theta)\right)\hat{e}_\theta+(z^2)\hat{e}_z$ por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial r}=r\cos(\theta)\qquad\rightarrow\qquad f(r,\theta,z)=\frac{1}{2}r^2\cos(\theta)+c_1(\theta,z)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{1}{2}rsen(\theta)\qquad\rightarrow\qquad f(r,\theta,z)=\frac{1}{2}r^2\cos(\theta)+c_2(r,z)+\frac{1}{3}z^3+k$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=z^2\qquad\rightarrow\qquad f(r,\theta,z)=\frac{1}{3}z^3+c_3(r,\theta)$$

El trabajo solicitado es $W=f\left(1,\frac{\pi}{2},3\right)-f(0,0,0)=(9+K)-(K)=9u.t.$

20 PUNTOS

5.- El rotacional del campo es $\nabla\times\bar{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-y & z-x & y-x\end{vmatrix}=2j$. Sea S a la superficie limitada por la circunferencia C de radio $a=3$ contenida en el plano $y=1$. El vector unitario a S es j.

La circunferencia solicitada es $\oint\bar{F}\bullet d\bar{r}=\iint_S(\nabla\times\bar{F})\cdot\hat{n}dS=\iint_S 2j\cdot jdS=2\iint_S dS=2A(S)=18\pi$,

donde $A(S)$ es el área de S.

15 PUNTOS

6.- Las intersecciones de los ejes de coordenados con el plano π son los puntos $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$ y $C(0,0,12)$ así que el volumen solicitado se obtiene médiate la integral triple

$$V=\int_0^4\int_0^{-x+4}\int_0^{12-3x-3y}dzdydx=\int_0^3\int_0^{-x+4}(12-3x-3y)dydx==\frac{3}{2}\int_0^4(x-4)^2dx=32u^3$$

20 PUNTOS