Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

Semestre: 2019-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: ____________

1.- Determina, mediante multiplicadores de Lagrange, el punto de la elipse $8x^2 + y^2 = 2$ más cercano a la recta de ecuación $x + y = 1$.

15 PUNTOS

2.- Sea la función $\overline{r}(t) = (sen\,2t)\,\boldsymbol{i} + (-\cos 2t)\,\boldsymbol{j} + (4t)\,\boldsymbol{k}$. Determina para el punto $P\left(0,\ 1,\ 2\pi\right)$

a) El triedro.

b) La ecuación cartesiana del plano osculador.

15 PUNTOS

3.- Sea la función $f(x, y,\ z) = (\,x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}$

a) Transforma la función a coordenadas esféricas.

b) Calcula en coordenadas esféricas el gradiente de f.

c) Calcula el Laplaciano en coordenadas esféricas.

15 PUNTOS

4.- Calcula el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\bar{F}(r,\theta) = \theta\,\bar{e}_r + \bar{e}_\theta$

dado en coordenadas polares, al desplazar una partícula a lo largo de la curva

$C:\ x^2 + 4y^2 = 4$ **desde el punto** $A(2,\,0)$ **hasta el punto** $B(0,\,1)$**,**

Dados en coordenadas cartesianas.

20 PUNTOS

5.- Calcula por medio de integración doble, el área de la región R **del plano** XY

limitada por las curvas

$$x^2 = -1 - y \qquad \textbf{y} \qquad y - x = -1$$

15 PUNTOS

6.- Calcula el flujo neto del campo vectorial

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x^3\right)\boldsymbol{i} + \left(y\right)\boldsymbol{j} - \left(3x^2 z\right)\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie cerrada limitada superiormente por el plano $z = 4$

e inferiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$ **.**

20 PUNTOS

.-

SOLUCIÓN

1.-

Sea el punto en la elipse $P_1(x,y)$ y la recta $Ax_1 + By_1 + C = 0$. La función a optimizar es la distancia Entre un punto y una recta, definida por:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Función objetivo: F= $\dfrac{x + y - 1}{\sqrt{2}}$

Ecuación restricción: $g = 8x^2 + y^2 - 2 = 0$

Función de Lagrange:

$$L = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda(8x^2 + y^2 - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 16\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 16\lambda y = 0$$

Despejando λ de las dos ecuaciones planteadas:

$$\lambda = \frac{-1}{16x\sqrt{2}}$$
$$\lambda = \frac{-1}{2x\sqrt{2}}$$

Igualando

$$\frac{-1}{16x\sqrt{2}} = \frac{-1}{2x\sqrt{2}}$$

$$2y = 16x$$
$$y = 8x$$

Sustituyendo la relación de las variables en g:

$$8x^2 + (8x)^2 = 2$$

$$x = \pm\frac{1}{6}; y = \pm\frac{4}{3}$$

Para el punto $P_1(\frac{1}{6}, \frac{4}{3})$ *la distancia es de*

$$d = \frac{\left|\frac{1}{6} + \frac{4}{3} - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Para el punto $P_1(-\frac{1}{6}, -\frac{4}{3})$ *la distancia es de*

$$d = \frac{\left|-\frac{1}{6} - \frac{4}{3} - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

El punto sobre la elipse más cercano a la recta es el punto $P_1(\frac{1}{6}, \frac{4}{3})$

15 PUNTOS

2.-

$En\ t = \frac{\pi}{2}$

$r'(t) = (2\cos 2t)\hat{i} + (2sen2t)\hat{j} + (4)\hat{k}.\ Evaluado\ en\ \ t = \frac{\pi}{2}; r'(t) = (-2,0,4)$

$r''(t) = (-4sen2t)\hat{i} + (4\cos 2t)\hat{j} + (0)\hat{k}.\ Evaluado\ en\ \ t = \frac{\pi}{2}; r''(t) = (0,4,0)$

$T = \frac{(-1,0,2)}{\sqrt{5}}$

$r'xr'' = (16,0,8)$
$r'xr''xr' = (0,-80,0)$

$N = (0,-1,0)$

$B = TXN = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}}$

b) Plano osculador

[(x-0),(y-1),(z-2 π)]. $\frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}}$ =0

2x+z-2 π =0

20 PUNTOS

3.-

1) $f(r,\theta,z) = r^5$

2) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{rsen\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi$

3) $\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f = \frac{1}{r^2 sen\varphi}\left[sen\varphi \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot 5r^4) + 0 + 0 \right]$

$= \frac{5}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^6) = 30r^3$

15 PUNTOS

4.-

Verificar si el campo de fuerzas es un campo conservativo o irrotacional. Sea $\bar{f}(r,\theta) = f_{\bar{e}\bar{r}} + g_{\bar{e}\bar{\theta}}$ y los factores de escala: $hr = 1, h\theta = r$

$$rot(\bar{F}) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \theta & r & 0 \end{bmatrix}$$

O bien se cumple: $\frac{\partial r}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta}$ sí es conservativo.

Cuando el campo vectorial es conservativo $\int_c \bar{F} \bullet d\bar{r} = \varphi\Big|_A^B$ donde φ es la función potencial.

El punto A(2,0) se transforma a coordenadas polares: (2,0°).

El punto B(0,1) se transforma a coordenadas polares: $(1, \frac{\pi}{2})$.

Se obtiene la función potencial φ de $\bar{F}(r,\theta) = \bar{\nabla}\varphi$

El gradiente en coordenadas polares: ($hr = 1, h\theta = r$)

$$\nabla\varphi = \frac{1}{hr}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{h\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\bar{e}_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\bar{e}_\theta = \theta\bar{e}_r + \bar{e}_\theta = \bar{F}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \theta;\ \ d\varphi = \theta dr;\ \ \ \varphi = \int \theta dr = \theta r + C1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 1;\ \ d\varphi = rd\theta;\ \ \ \varphi = \int rd\theta = \theta r + C2$$

Función potencial $\varphi = \theta r$

$$\int_c \bar{F} \bullet d\bar{r} = \theta r\Big|_{A(2,0)}^{B(1,\frac{\pi}{2})} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\, Unidades\ \ de\ \ trabajo$$

15 PUNTOS

5.-

$y=-x^2-1$

$y=x-1$

$-x^2-1=x-1$

$-x(x+1)=0$

$x=0$

$x=-1$

$$A=\int_{-1}^{0}\int_{x-1}^{-x^2-1}dydx=\int_{-1}^{0}\left[(-x^2-1)-(x-1)\right]dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{6}u^2$$

15 PUNTOS

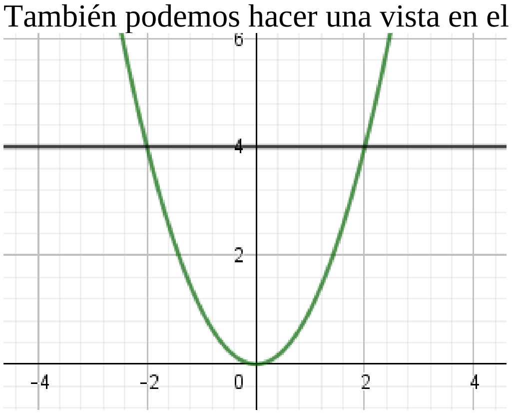
6.-

$$Flujo=\psi=\oiint_{S}\bar{F}\bullet\bar{n}dr=\iiint_{D}\left(\bar{\nabla}\bullet\bar{F}\right)dV$$

$$\bar{\nabla}\bullet\bar{F}=3x^2+1-3x^2=1$$

$$flujo=\psi=\iiint_{D}dV=V(D)$$

En la gráfica de muestra la proyección de la intersección del plano z=4 con el paraboloide $z=x^2+y^2$. También podemos hacer una vista en el plano yz.



$$V(D)=\int_{0}^{2}\int_{\rho^2}^{4}\int_{0}^{2\pi}\rho d\theta dzd\rho=2\pi\int_{0}^{2}\int_{\rho^2}^{4}\rho dzd\rho=2\pi\int_{0}^{2}\rho(4-\rho^2)d\rho$$

$$V(D)=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)_{0}^{2}=2\pi\left(8-4\right)=8\pi$$

Recordando que

$$\psi=V(D)\to\psi=8\pi\ Unidades\ de\ flujo.$$

15 PUNTOS