UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO VECTORIAL

PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

SINODALES:* *M.I. Mayverena Jurado Pineda

Ing. Luis Humberto Soriano Sánchez

23 de septiembre de 2019 **Semestre: 2020-1**

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: ____________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los 6 reactivos que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es 2.0 horas.

---

1. **Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, determinar las coordenadas del punto del plano de ecuación** $x+2y+3z=6$ **que esté más cercano al origen.**

15 puntos

---

2. **Sea la curva** $C:\ \bar{r}(t)=\left(\ln t,\ \dfrac{1}{t},\ \ln t^2\right)$**. Para el punto** $P(0,1,0)$**, calcular:**

   a) **Los vectores** $\bar{T},\ \bar{N}$ **y** $\bar{B}$**.**
   b) **La curvatura y la torsión.**
   c) **La ecuación cartesiana del plano osculador.**

20 puntos

3. Sea la transformación $T:\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$

a) Determinar si la transformación T **es ortogonal.**

b) Calcular $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right)$**.**

c) Calcular los factores de escala h_u y h_v

d) Si el área de una región del plano XY es igual a 2 y se le aplica la transformación T **dada, calcular el área de la región** R_{uv} **.**

15 puntos

---

4. Sea el campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = (x)\,i + (x^3 y\, z)\,j + (z^2)\,k$ **y sea la curva**

$C: \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases}$

Calcular $\displaystyle\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ **desde el punto** $A\left(\sqrt{5},\, 3,\, \sqrt{5}\right)$ **hasta el punto** $B\left(-\sqrt{5},\, 3,\, \sqrt{5}\right)$**.**

15 puntos

---

5. Calcular el área en el primer cuadrante, exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4a^2$ **e interior a la circunferencia** $x^2 + y^2 = 4ax$

20 puntos

---

6. Calcular la circulación total del campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = (y)i + (x^2)j - (z)k$ **a lo largo de la curva**

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 3 \end{cases}$$

15 puntos

SOLUCIÓN

1. Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, determine las coordenadas del punto del plano de ecuación $x+zy+3z=6$ que esté más cerca del origen:

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$P=x+2y+3z=6$$
$$\overline{\nabla}d=\lambda\overline{\nabla}P$$
$$\overline{\nabla}d=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$
$$\overline{\nabla}P=(1,2,3)$$

Ecuación:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\lambda(1,2,3)$$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lambda....(1)$$
$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=2\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}....(2)$$
$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=3\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{z}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}....(3)$$
$$x+2y+3z=6....(4)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$x=\frac{y}{2}....(5)$$

Igualando (2) y (3)

$$\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\Rightarrow z=\frac{3}{2}y....(6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4)

$$\frac{y}{2}+2y+3\left(\frac{3}{2}y\right)=6$$

$$\frac{y}{2}+2y+\frac{9}{2}y=6$$

$$y+4y+9y=12$$

$$14y=12$$

$$y=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}....(7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (4)

$$x+2\left(\frac{6}{7}\right)+3\left(\frac{3}{2}y\right)=6$$

$$x+\frac{12}{7}+\frac{9}{2}y=6$$

$$x+\frac{12}{7}+\frac{9}{2}\left(\frac{6}{7}\right)=6$$

$$x+\frac{12}{7}+\frac{54}{14}=6$$

$$14x=84-24-54\Rightarrow x=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}....(8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (4):

$$\frac{3}{7}+\frac{12}{7}+3z=6$$

$$15+21z=42\Rightarrow z=\frac{42-15}{21}=\frac{27}{21}=\frac{9}{7}$$

$\therefore$ El punto es:

$$P\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{9}{7}\right)$$

2. Sea la curva

$$C:\bar{r}(t)=\left(\ln t,\frac{1}{t},\ln t^{2}\right)$$

Para el punto $P(0,1,0)$, calcular:

a) Los vectores $\bar{T},\bar{N}$ y $\bar{B}$
b) La curvatura y la torsión.
c) La ecuación cartesiana del plano osculador.

RESOLUCIÓN

a)

$$x=\ln t=0$$
$$t=1$$
$$y=\frac{1}{t}=1$$
$$z=\ln t^{2}=z\ln t=0$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\left(\frac{1}{t},-\frac{1}{t^{2}},\frac{2}{t}\right)_{t=1}=(1,-1,2)$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\sqrt{6}$$

$$\bar{T}=\frac{d\bar{r}/dt}{\left|d\bar{r}/dt\right|}=\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}=\left(-\frac{1}{t^{2}},\frac{2}{t^{3}},-\frac{2}{t^{2}}\right)_{t=1}=(-1,2,-2)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}x\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-2,0,1)$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}x\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}\right|=\sqrt{5}$$

$$\bar{B}=\frac{\frac{d\bar{r}}{dt}x\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}x\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}\right|}=\frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{N}=\bar{B}x\bar{T}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{(1,5,2)}{\sqrt{30}}$$

b)

$$k=\frac{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}x\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|d\bar{r}/dt\right|^3}=\frac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{6}\right)^3}=\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}$$

$z=0$

Ya que

$x=\ln t$

$z=2\ln t\rightarrow z=2x\rightarrow plano(z=0)$

c)

$z=2x$ plano osculador

3. Sea la transformación $T:\begin{cases}u=x+y\\ v=x-2y\end{cases}$

a) Determinar si la transformación T es ortogonal.

b) Calcular $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$

c) Calcular los factores de escala *hu* y *hv*

d) Si el área de una región de plano *xy* es igual a 2 y se le aplica la transformación T dada, calcular el área de la región *Ruv*

RESOLUCIÓN.

a)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\nabla}u=(1,1)\\ \bar{\nabla}v=(1,-2)\end{array}\right\}\bar{\nabla}u\cdot\bar{\nabla}v=1-2=-1\neq 0\therefore$$ No es ortogonal

b)

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\frac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{1}{-3}$$

c)

$$u=x+y$$
$$v=x-2y$$
$$u-v=3y\rightarrow y=\frac{u-v}{3}$$
$$2u+v=3x\rightarrow x=\frac{2u+v}{3}$$

$$\bar{r}(u,v)=\left(\frac{2u+v}{3},\frac{u-v}{3}\right)$$
$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\rightarrow hu=\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\rightarrow hv=\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

d)

$$\frac{áreaRxy}{áreaRuv}=\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|=-\frac{1}{3}\ ;$$

Área $Ruv=3$; Área $Rxy=3(2)=6$ u. de área

4. Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(x)i+(x^3yz)j+(z^2)k$ y sea la curva $C:\begin{cases}x^2-y^2+z^2=1\\ x^2+z^2=10\end{cases}$

Calcular $\int\overline{F}\cdot d\bar{r}$ desde el punto $A\left(\sqrt{5},3,\sqrt{5}\right)$ hasta el punto $B\left(-\sqrt{5},3,\sqrt{5}\right)$.

RESOLUCIÓN

Sustituyendo $x^2+z^2=10$ en $x^2-y^2+z^2=1$

$$-y^2+10=1$$
$$y^2=9\therefore y=\pm3$$

Pero en A y en B $y=3\therefore y=3\ \therefore C:\begin{cases}x^2+z^2=10\\ y=3\end{cases}$ ← Circunferencia paralela al plano xz

$$\overline{F}\cdot d\bar{r}=(x)dx+\left(x^3yz\right)dy+\left(z^2\right)dz$$

Pero

$$y = 3 \therefore dy = 0$$
$$\overline{F} \cdot d\overline{r} = (x)\,dx + (z^2)\,dz$$

$$\left.\begin{array}{l} P = x \\ R = z^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{dP}{dz} = 0 \\ \dfrac{dR}{dx} = 0 \end{array}\right\} \;\overline{F}$$ es continua para trayectorias paralelas al plano xz

Función potencial: $f(x, y, z) = \int P dx \cup \int R dz$

$$= \int x dx \cup \int z^2 dz$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{z^3}{3} + c$$

$$\int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r} = \left. \frac{x^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right|_{(\sqrt{5},3,\sqrt{5})}^{(-\sqrt{5},3,\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 0$$

5. Calcular el área en el primer cuadrante, exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4a^2$ e interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4ax$

Transformando las ecuaciones dadas a coordenadas polares, tenemos:

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \quad \rightarrow \quad \rho = 2a$$
$$x^2 + y^2 = 4ax \quad \rightarrow \quad \rho = 4a\cos\theta$$

Definiendo el punto de intersección

$$2a = 4a\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$R = \left\{ (\rho, \theta) \middle| \frac{\pi}{3} \le \theta \le 0,\; 2a \le \rho \le 4a\cos\theta \right\}$$

$$A=\iint_R \rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{2a}^{4a\cos\theta}\rho d\rho d\theta$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left[\rho^2\right]_{2a}^{4a\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[16a^2\cos^2\theta-4a^2\right]d\theta$$

$$A=2a^2\left[\theta+sen2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}=a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right]u^2$$

6. Circulación= $\iint_S rot\,\overline{F}\cdot\overline{n}\,dS \quad\Rightarrow\quad rot\,\overline{F}=(2x-1)k$

Sea S la región del plano $z=3$ limitada por el cilindro $x^2+y^2=3$

$$\therefore\ \overline{n}=\overline{k}\ ,\qquad dS=dA_{xy}$$

$$circulación=\iint_{R_{xy}}(2x-1)\,dA_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(2r\cos\theta-1)\,rdrd\theta$$

$$circulación=\left(2\sqrt{3}\,sen\theta-\frac{3}{2}\theta\right)_0^{2\pi}=-3\pi$$