SERIE DE CÁLCULO INTEGRAL

PROFESOR: PEDRO RAMÍREZ MANNY

TEMA 1

1) Calcule la suma $\sum_{i=1}^{10}\left[\frac{(-1)^i}{i+1}-\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right]$ Solución: $\frac{1}{11}-1$

2) Determine n tal que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$ Solución: n=6

3) Determine n tal que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 784$ Solución: n=7

4) Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$$

Solución: 14

5) Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{2i}{n}\right)\right]$$

Solución: $\frac{2}{3}$

6) Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[5\frac{i^4}{n^4}+4\frac{i^3}{n^3}+3\frac{i^2}{n^2}+\frac{2}{n}i+1\right]$$

Solución: 5

7) Calcule la suma

$$\sum_{i=1}^{10}(i-1)^4$$

Solución: 15333

8) Si se divide el intervalo $[0,1]$ en subintervalos mediante la partición P y el conjunto de puntos de partición es:

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n^5}, x_2=\frac{32}{n^5}, x_3=\frac{243}{n^5},\dots, x_i=\frac{i^5}{n^5},\dots, x_n=\frac{n^5}{n^5}$$

¿Cuál es la longitud de cada subintervalo?

Solución: $\Delta x_i = \dfrac{5i^4 - 10i^3 + 10i^2 - 5i + 1}{n^5}$.

9) Evaluar el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ para la función $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ en el intervalo $\left[0,1\right]$.

Sugerencia: Utilice el conjunto de puntos de partición
$x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{n^3}, x_2 = \dfrac{8}{n^3}, x_3 = \dfrac{27}{n^3}, \ldots, x_i = \dfrac{i^3}{n^3}, \ldots, x_n = \dfrac{n^3}{n^3}$.
Por punto muestra tome el extremo derecho de cada subintervalo
$x_i^* = x_i = \dfrac{i^3}{n^3}$.

Solución: $\dfrac{3}{4}$

10) Mediante sumas de Riemann evalúe $\displaystyle\int_0^1 \left(x-1\right)^4 dx$

Solución: $\dfrac{1}{5}$

11) Mediante sumas de Riemann evalúe $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left(\frac{x}{3}+1\right) dx$

Solución: 6

12) Por medio de sumas de Riemann, calcule $\displaystyle\int_1^2 \left(12-3x^2\right) dx$

Solución: 5

13) Encuentre $G'\left(x\right)$, si $G\left(x\right)=\displaystyle\int_x^0 \left(2t^2+\sqrt{t}\right) dt$

Solución: $-\left(2x^2+\sqrt{x}\right)$

14) Encuentre $f(x)$ si $\int_1^x f(t)dt = 2x-2$

Solución: $f(x)=2$

15) Utilizando la derivación implícita, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ de

$$x^3+\cos^2 y+\left(2\int_{\cos y}^{1}(t)dt\right)+2y+100=0$$

Solución: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2}{2}$

16) Calcule la segunda derivada de la función

$$f(x)=\int_0^x\left(\int_1^t\sqrt{1+u^2}\,du\right)dt$$

Solución: $f''(x)=\sqrt{1+x^2}$

17) Calcule la segunda derivada de la función

$$g(x)=\int_0^x\left[\int_1^{sent}\sqrt{1-u^2}\,du\right]dt$$

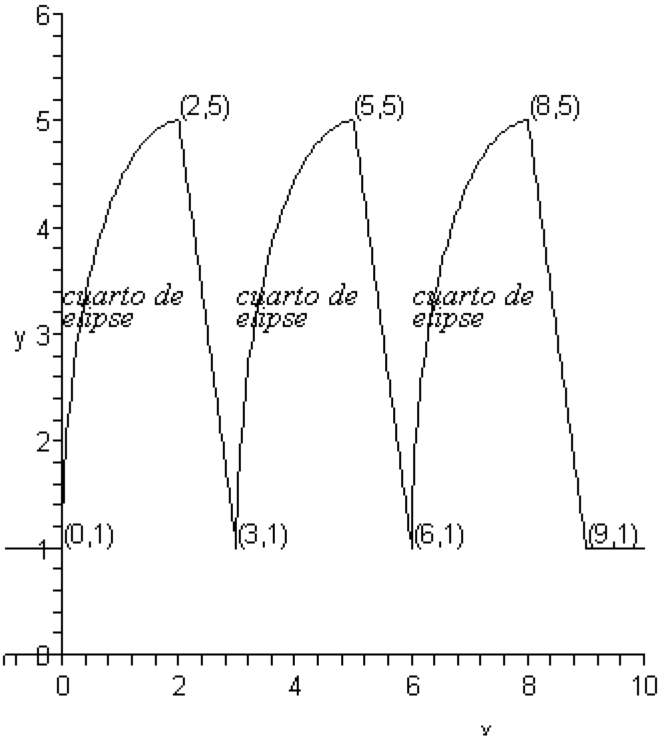
Solución: $g''(x)=\cos^2 x$

Obtenga $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^{\left(\int_1^x sen(t^2)dt\right)\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)}(t)\,dt\right]$

Solución:

$$\left(\int_1^x sen\left(t^2\right)dt\right)\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)\left[\left(\int_1^x sen\left(t^2\right)dt\right)e^{x^2}+\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)senx^2\right]$$

18) Sea la gráfica de f que aparece en la siguiente figura. Determine su valor medio en el intervalo $\left[-1,10\right]$.



Solución: $f(c)=\dfrac{17+6\pi}{11}$

19) Determine la abscisa media de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $\left[-1,1\right]$.

Solución: $c=\pm\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{16}}$

EFECTUAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES

20) $\int\left(1+2x^2\right)^2 dx$

21) $\int\dfrac{1+senx}{\cos x}dx$

22) $\int\dfrac{2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

23) $\int \frac{x}{1+x}dx$

24) $\int \frac{x^2}{1+x}dx$

25) $\int \sqrt{1-senx}dx$

26) $\int \tan^2 xdx$

27) $\int \frac{\cos x}{sen^2 x}dx$

28) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-1}}dx$

29) $\int \frac{(4+x)^2}{x^2+4}dx$

30) $\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$

31) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\sqrt{x^5}\right)^2\left(\frac{3}{\sqrt{x^5}}+5\sqrt{x^3}\right)dx$

32) $\int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+6\right)^2}dx$

33) $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

34) $\int x^2\cos\left(x^3\right)sen^3(x^3)dx$

35) $\int \left(\sec x+2\tan x\right)^{-\frac{1}{2}}\sec x\left(\tan x+2\sec x\right)dx$

36) $\int \frac{sen2x}{\left(\cos^2 x+4\right)^2}dx$

37) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(16+sen^2\sqrt{x}\right)}dx$

38) $\int \csc\left(5\cos x\right)\cot\left(5\cos x\right)senxdx$

39) $\int \frac{1+x^4+x^6}{x^2\left(1+x^6\right)}dx$

40) $\int \frac{sen2\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}\sqrt{sen^2\sqrt{x}+10\sqrt{x}}}dx$

41) $\int \left(x^2+2\right)^{10}x^3dx$

42) $\int \frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{x\left(x+4\right)}}$

43) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$

44) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

45) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

46) $\int \sqrt{\frac{angsenx}{1-x^2}}dx$

SOLUCIONES A LAS INTEGRALES 20-46

20) $x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5+C$

21) $\ln\left|\sec x+\tan x\right|+\ln\left|\sec x\right|+C$

22) $2angsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

23) $x-\ln\left|x+1\right|+C$

24) $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

25) $2\sqrt{1+senx}+C$

26) $\tan x-x+C$

27) $-\csc x+C$

28) $\frac{1}{3}ang\sec\left(x^3\right)+C$

29) $x+4\ln\left(x^2+4\right)+6ang\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$

30) $\ln\left|\sec\left(x-\frac{1}{x}\right)\right|+C$

31) $-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\sqrt{x^5}\right)^3+C$

32) $-\frac{1}{3\left(x^3+3x+6\right)}+C$

33) $\frac{1}{3}angsen\left(\frac{3x}{2}\right)+C$

34) $\frac{1}{12}\left(sen\left(x^3\right)\right)^4+C$

35) $2\sqrt{\sec x+2\tan x}+C$

36) $\frac{1}{\cos^2 x+4}$

37) $\frac{1}{2}ang\tan\left(\frac{sen\sqrt{x}}{4}\right)+C$

38) $\frac{1}{5}\csc\left(5\cos x\right)+C$

39) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}ang\tan\left(x^3\right)+C$

40) $4\sqrt{sen^2\sqrt{x}+10\sqrt{x}}+C$

41) $\frac{1}{24}\left(x^2+2\right)^{12}-\frac{\left(x^2+2\right)^{11}}{11}+C$

42) $\frac{1}{2}ang\sec\frac{x+2}{2}+C$

43) $\frac{1}{3}ang\,sen\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C$

44) $\frac{2}{\sqrt{3}}ang\sec\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\right)+C$

45) $3ang\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)+C$

46) $\frac{2}{3}\sqrt{\left(angsenx\right)^3}+C$

47) Calcular $\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\sec^2 x\,dx$ Solución: $\frac{1}{3}$

48) Calcular $\int_0^2\left|2x-1\right|dx$ Solución: $\frac{5}{2}$

49) Calcular $\int_{-1}^1\left(x-3\left|x\right|\right)dx$ Solución: -3

Utilice el teorema de simetría para evaluar la integral que se da.

50) $\int_{-1}^1\left(xsen^4x+x^3\right)dx$

Solución: 0

51) $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}}x^5\cos\left(x^3\right)dx$

Solución: 0

52) $\int_{-2}^{2} x^4 dx$

Solución: $\dfrac{64}{5}$

53) En una cierta zona del sur de la ciudad de México, el número de imecas entre las $12:00$ y las $15:00$ horas, se puede modelar con la función $f(x) = -20\left(x^2 - 4x - 5\right)$, en donde $f(x)$ es el número de imecas a las x horas después del mediodía con$\left(0 \le x \le 3\right)$.

Determine el número promedio de imecas que hay en esta zona de la ciudad, entre las $12:00$ y las $15:00$ horas. ¿A que hora se alcanza este número promedio de imecas?

Solución: 160 imecas; $13:00$ y $15:00$ horas.

54) La temperatura de un caldo de pollo que se saca del refrigerador (a 5 grados centígrados) y se pone al fuego, durante los primeros 12 minutos, puede modelarse por la función $T\left(t\right) = 5 + 0.5t\left(t+1\right)$, en donde $T\left(t\right)$ es la temperatura (en grados centígrados) del caldo a los t minutos de haberse puesto a la lumbre. Calcule la temperatura promedio que tuvo el caldo de pollo durante los 12 minutos en que se calentó. ¿En que momento de los primeros 12 minutos de calentamiento, el caldo tuvo la temperatura promedio?

Solución: $32^o C, 6.86\,\text{min}$.

55) A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a diferentes velocidades. La velocidad del sonido s(x) (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x)=\begin{cases} -4x+341, & 0\le x<11.5 \\ 295, & 11.5\le x<22 \\ \dfrac{3}{4}x+278.5, & 22\le x<32 \\ \dfrac{3}{2}x+254.5, & 32\le x<50 \\ -\dfrac{3}{2}x+404.5, & 50\le x\le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo $[0,80]$?

Solución: Velocidad promedio = 308 metros por segundo.

TEMA 2

56) Determine el dominio y el recorrido de la función $f(x)=\ln(x-2)-1$.

Solución: $D=(2,\infty)$, $R=\{\mathbb{R}\}$

57) Determine el dominio y el recorrido de la función $f(x)=-\ln(-x)$.

Solución: $D=\{\mathbb{R}^-\}$, $R=\{\mathbb{R}\}$

Determine los siguientes límites.

58) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\csc x)=$ Solución: $+\infty$

59) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\cot x)=$ Solución: $-\infty$

60) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)=$ Solución: 0

61) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln\left[\dfrac{1}{1+\sec x}\right]=$ Solución: $-\infty$

62) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left[\dfrac{\pi}{ang\cot x}\right]=$ Solución: 0

63) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\dfrac{\pi}{2}-ang\tan x\right]=$ Solución: $-\infty$

64) $\lim\limits_{x\to\pi^-}\ln\left(\dfrac{1}{\csc x}\right)=$ Solución: $-\infty$

65) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(\cot x)=$ Solución: $+\infty$

66) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\tan x)=$ Solución: $+\infty$

67) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=$ Solución: $+\infty$

68) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\sec x) =$ Solución: $+\infty$

69) Determine el dominio y el recorrido de la función
$f(x) = 2^{-x} - 1$
Solución: $D = \{\mathbb{R}\}$, $R = (-1, \infty)$

70) Determine el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Solución: $D = \{\mathbb{R}\}$, $R = (0,1]$.

Determine los siguientes límites.

71) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^x =$ Solución: $+\infty$

72) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x =$ Solución: 0

73) $\lim_{x\to+\infty} (0.9)^x =$ Solución: 0

74) $\lim_{x\to0^+} \frac{5}{1+e^{\csc x}} =$ Solución: 0

75) $\lim_{x\to-\infty} \left(3 - e^x\right) =$ Solución: 3

76) $\lim_{x\to0^+} 4^{\frac{1}{\cot x}} =$ Solución: 1

77) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{ang\cot x}} =$ Solución: 0

78) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{10}\right)^{\tan x} =$ Solución: 0

79) Despeje x y determine su valor $\ln\left(\frac{x-4}{x-2}\right)=1+\ln\left(\frac{x-5}{x-2}\right)$

Solución: $x=\frac{4-5e}{1-e}$.

80) Determine el valor o valores de x de $e^{3x}-6e^{2x}+11e^{x}-6=0$.
Solución: $0, \ln 2, \ln 3$

81) Despeje x y calcule su valor $4^{\log_5(2x-1)}=16$.
Solución: 13.

82) Determine y' para $y=\frac{\log_5 x^2}{2x}$

Solución: $\frac{1}{x^2}\log_5\left(\frac{e}{x}\right)$

83) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

Solución: $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$.

84) Derive $y=\left(\log_5 10^{e^x}\right)^4$

Solución: $y'=\frac{4\ln 10}{\ln 5}e^x\left(\log_5 10^{e^x}\right)^3$

85) Encuentre y' para $y=\left(\tan x\right)^{senx}$

Solución: $y'=\left(\tan x\right)^{senx}\left[\sec x+\cos x\ln\left(\tan x\right)\right]$

86) Encuentre y' para $y=\left(ang\tan x\right)^{ang\sec x}$

Solución:

$$y'=\left(ang\tan x\right)^{ang\sec x}\left[\frac{ang\sec x}{\left(1+x^2\right)ang\tan x}+\frac{\ln\left(ang\tan x\right)}{x\sqrt{x^2-1}}\right]$$

87) Efectúe $\int 5^x 2^x\left[\frac{1}{x}+\left(\ln 10\right)\ln x\right]\left(\log_5 x^{10^x}\right)^2 dx$

Solución: $\frac{\ln 5}{3}\left(\log_5 x^{10^x}\right)^3+C$

88) Efectúe $\int 5^{\left(x^4+2x\right)}\left(2x^3+1\right)dx$

Solución: $\frac{1}{2\ln 5}5^{\left(x^4+2x\right)}+C$.

89) Efectúe $\int e^x 7^{e^x} 2^{e^x} dx$

Solución: $\frac{14^{e^x}}{\ln 14}+C$

90) Efectúe $\int \frac{6^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}dx$

Solución: $-\frac{6^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{\ln 6}+C$

91) Resuelva la siguiente integral $\int e^{x^2} dx$

Solución: $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\frac{x^7}{42}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!\left(2n+1\right)}$

92) Resuelva la siguiente integral $\int e^{e^x}\,dx$

Solución: $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n!n}$.

93) Derive $y=\ln(\tanh x)$

Solución: $y'=2\operatorname{csc}h(2x)$

94) Derive $y=ang\tan(\coth x)$

Solución: $y'=-\frac{\operatorname{csc}h^2x}{1+\coth^2 x}$

95) Derive $y=angsen(\sec hx)$

Solución: $y'=-\frac{\sec hx\tanh x}{\sqrt{1-\sec h^2x}}$

96) Derive $y=senh\left(e^{\cos x}\right)$

Solución: $y'=-e^{\cos x}senx\cosh\left(e^{\cos x}\right)$

97) Derive $y=\ln(\cosh 4x)$

Solución: $y'=4\tanh(4x)$

98) Obtenga una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y=senh(3x)$ en $x=0$.

Solución: $y=3x$.

Efectuar las siguientes integrales.

99) $\int senh(8x)dx$

100) $\int \cosh(5x-4)dx$

101) $\int x^2 \sec h^2 \left(x^3\right) dx$

102) $\int \frac{\csc h \sqrt[3]{x} \coth \sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} dx$

103) $\int \cosh^2 x senhx dx$

104) $\int \frac{\csc h^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

105) $\int \sec h(2x) \tanh(2x) dx$

106) $\int \sqrt{1+senh(2x)} \cosh(2x) dx$

107) $\int \frac{senh(5x)}{7+\cosh(5x)} dx$

108) $\int x \coth\left(x^2\right) dx$

109) $\int e^{-\cosh 3x} senh 3x dx$

110) $\int \frac{e^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx$

111) $\int \left(\cosh^2 x - 1\right)^3 \cosh x dx$

112) $\int \tanh x \sec h^2 x dx$

113) $\int e^x \cosh\left(e^x\right) dx$

114) $\int \frac{\tanh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} dx$

115) $\int x \coth\left(x^2\right) \ln\left(senh x^2\right) dx$

SOLUCIONES A LAS INTEGRALES 99-115

99) $\frac{1}{8}\cosh(8x) + C$

100) $\frac{1}{5}sen\mathrm{h}\left(5x-4\right)+C$

101) $\frac{1}{3}\tanh\left(x^3\right)+C$

102) $-3\operatorname{csc}h\sqrt[3]{x}+C$

103) $\frac{1}{3}\cosh^3 x+C$

104) $-2\coth\sqrt{x}+C$

105) $-\frac{1}{2}\operatorname{sec}h\left(2x\right)+C$

106) $\frac{1}{3}\left(1+senh2x\right)^{\frac{3}{2}}+C$

107) $\frac{1}{5}\ln\left(7+\cosh 5x\right)+C$

108) $\frac{1}{2}\ln\left|senh\left(x^2\right)\right|+C$

109) $-\frac{1}{3}e^{-\cosh 3x}+C$

110) $e^{\tanh x}+C$

111) $\frac{1}{7}sen\mathrm{h}^7 x+C$

112) $\frac{1}{2}\tanh^2 x+C$

113) $senh\left(e^x\right)+C$

114) $ang\sec\left(\cosh x\right)+C$

115) $\frac{1}{4}\left[\ln\left(senhx^2\right)\right]^2+C$

116) Calcular, de ser posible, $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\ln x}$.

Solución: 2

117) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

Solución: ∞

118) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$

Solución: 0

119) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+6x+3x^2-6e^x}{x-senx}$

Solución: -6

120) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(senx\right)^{\int_0^x tdt}$

Solución: 1

121) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+senx\right)^{\csc x}$

Solución: e

122) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución: e^2

123) Calcular, de ser posible, $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Solución: converge y su valor es $\dfrac{\pi}{2}$

124) Calcular, de ser posible, $\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Solución: converge y su valor es $\dfrac{\pi}{2}$

125) Calcular, de ser posible, $\int\limits_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$

Solución: converge y su valor es $-\dfrac{1}{2\ln 5}$.

126) Calcular, de ser posible, $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{1}{x^5}\,dx$

Solución: La integral diverge.

127) Si $a<b<c$, entonces $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx$ es equivalente a……..☐

1) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx-\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$ 2) $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

3) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx+\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$ 4) $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx-\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

128) Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ diferenciable $\forall x\in[a,b]$. Entonces se cumple que…………☐

1) $F'(x)=f(x)$ 2) $F'(x)=f(x)-f(a)$

3) $F'(x)=F(x)$ 4) $F'(x)=F(x)-F(a)$

129) La igualdad $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$, con $a>0$ y $b>0$ es.☐

1) verdadera. 2) falsa.

3) verdadera si $a>1$ y $b>1$ 4) verdadera si $0\le a\le 1$ y $0\le b\le 1$

130) La función $f\left(x\right)=\ln x$ se define como………………… $\square$

1) $\ln x=\int_{0}^{x}\frac{1}{t}dt,\ t>0$ 2) $\ln x=\int_{0}^{x}\frac{1}{t}dt,\ x>0$

3) $\ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt,\ t>0$ 4) $\ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt,\ x>0$

131) Si f es una función definida en el intervalo $\left[a,b\right]$, entonces la integral definida de a a b se denota por…………………… $\square$

1) $\lim_{\|\Delta x\|\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$ 2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$

4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$ 3) $\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{\infty} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$

Los siguientes ejercicios son del primer examen parcial colegiado del semestre 2004-2

132) Mediante el límite de Sumas de Riemann, calcular

$$\int_{-2}^{1}\left(-2x^2+x\right)dx$$

Solución: $-\frac{15}{2}$

133) Sea la función $f\left(x\right)=3-\left|x\right|$

Obtener:

a) El valor promedio de f en el intervalo $\left[-4,1\right]$.

b) El valor o los valores de $c\in\left[-4,1\right]$ cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Solución: a) $f\left(c\right)=\frac{13}{10}$ b) $c=-\frac{17}{10}$

134) Determinar

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ b) $\int \frac{senx}{1-sen^2x}dx$

c) $\int_{-2}^{2} f(x)dx,\ donde\ f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ -2\le x<1 \\ x\left(x^2-1\right)^3 & si\quad 1\le x\le 2 \end{cases}$

Solución:

a) $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$ b) $\sec x+C$ c) $\frac{81}{8}$

135) Obtener $\frac{dF}{dx}$ de las siguientes funciones

a) $F(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{t^5+1}dt$ b) $F(x)=\log_2\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right|$

c) $F(x)=\tanh\left(\frac{2}{x}\right)$

Solución:

a) $F'(x)=\sqrt{x^5+1}$ b) $F'(x)=\frac{2e^x}{\left(1-e^{2x}\right)\ln 2}$

c) $F'(x)=-\frac{2}{x^2}\sec h^2\left(\frac{2}{x}\right)$

136) Determinar, si existe $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{e^x}$

Solución: e^{-1}

137) Evaluar la siguiente integral y determinar si converge o diverge $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.

Solución: La integral impropia converge y su valor es 2

TEMA 3

Efectúe las siguientes integrales.

Ajuste de integrandos a las reglas básicas.

138) $\int \left(1+2e^{2x}\right)^2 dx$ Solución: $x+2e^{2x}+e^{4x}+C$

139) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ Solución: $\ln\left(1+e^x\right)+C$

140) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ Solución: $e^x-\ln\left(1+e^x\right)+C$

141) $\int \frac{x^2}{x-1}dx$ Solución: $\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x-1\right|+C$

142) $\int \frac{dx}{\cosh x+senhx}$ Solución: $senhx-\cosh x+C$

143) $\int \frac{1}{\sqrt{3^{2x}-1}}dx$ Solución: $\frac{1}{\ln 3}ang\sec\left(3^x\right)+C$

144) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-2x}dx$ Solución: $-\ln\left|1-2\sqrt{x}\right|+C$

145) $\int \frac{3}{\sqrt{3x-x^2}}dx$ Solución: $3angsen\frac{2x-3}{3}+C$

146) $\int \sqrt{\cosh x-1}dx$ Solución: $2\sqrt{\cosh x+1}+C$

Integración por partes

147) $\int e^{-2x}sen\left(e^{-x}\right)dx$ Solución: $e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-sen\left(e^{-x}\right)+C$

148) $\int ang\cos xdx$ Solución: $xang\cos x-\sqrt{1-x^2}+C$

149) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$ Solución:

$$\frac{x}{2}\cos\left(\ln x\right)+\frac{1}{2}x\,sen\left(\ln x\right)+C$$

150) $\int \ln\sqrt{x}dx$ Solución: $x\ln\sqrt{x}-\frac{x}{2}+C$

151) $\int \csc^3 xdx$ Solución: $-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$

152) $\int (\ln x)^2 dx$ Solución: $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

153) $\int \left(x^4+3x^3-2x^2+19x+2\right)senhxdx$
Solución:
$\left(x^4+3x^3+10x^2+37x+22\right)\cosh x-\left(4x^3+9x^2+20x+37\right)senhx+C$

154) $\int x^2(x-2)^{\frac{3}{2}}dx$
Solución: $\frac{16}{315}(x-2)^{\frac{9}{2}}-\frac{8}{35}x(x-2)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}x^2(x-2)^{\frac{5}{2}}+C$

155) Emplee integración por partes para determinar la fórmula de reducción de $\int \cos^n xdx=\frac{1}{n}\left(\cos^{n-1}x\right)senx+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}xdx$.

156) Emplee integración por partes para obtener la fórmula de reducción de $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

Integrales de expresiones trigonométricas

157) $\int sen^4 x\cos xdx$ Solución: $\frac{1}{5}sen^5x+C$

158) $\int sen^5 x\cos xdx$ Solución: $\frac{1}{6}sen^6x+C$

159) $\int sen^3 xdx$ Solución: $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

160) $\int \cos^5 x dx$ Solución: $senx - \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{1}{5}sen^5 x + C$

161) $\int sen^2 x \cos^3 x dx$ Solución: $\frac{1}{3}sen^3 x - \frac{1}{5}sen^5 x + C$

162) $\int sen^3 x \cos^3 x dx$ Solución: $\frac{1}{4}sen^4 x - \frac{1}{6}sen^6 x + C$

$-\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$

163) $\int \cos 4x \cos 3x dx$ Solución: $\frac{1}{2}senx + \frac{1}{14}sen7x + C$

164) $\int sen2x \cos 4x dx$ Solución: $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

165) $\int sen3x \cos 5x dx$ Solución: $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$

166) $\int \cos x \cos 3x dx$ Solución: $\frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}sen4x + C$

167) $\int \tan^6 x dx$ Solución:

$\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C$

168) $\int \sec^4 x dx$ Solución: $\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

169) $\int \tan^{-5} x dx$ Solución:

$-\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|senx| + C$

170) $\int \sec^4 x \tan^5 x dx$ Solución:

$\frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

$\frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{8}\tan^8 x + C$

171) $\int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x} dx$ Solución: $\tan x - \cot x + C$

$-2\cot 2x + C$

172) $\int \frac{\tan^4 x}{\sec^5 x} dx$ Solución: $\frac{1}{5} sen^5 x + C$

173) $\int \sec^5 x dx$

Solución: $\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$

174) $\int \csc^5 x dx$

Solución: $-\frac{1}{4}c\,sc^3 x \cot x - \frac{3}{8}\csc x co\,\mathrm{t}\, x + \frac{3}{8}\ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

175) $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cot^3\sqrt{x}} dx$ Solución: $\frac{2}{3}\sec^3\sqrt{x} - 2\sec\sqrt{x} + C$

176) $\int \sec^{-\frac{3}{2}} x \tan^5 x dx$ Solución:
$\frac{2}{5}\sec^{\frac{5}{2}} x - 4\sec^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{3}\sec^{-\frac{3}{2}} x + C$

Sustitución trigonométrica.

177) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$ Solución: $8 angsen\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + C$

178) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x} dx$ Solución:
$\sqrt{x^2 + 16} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x}\right| + C$

179) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx$ Solución:
$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 16} + 8\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\right| + C$

180) $\int \frac{1}{\left(25 - x^2\right)^{3/2}} dx$ Solución: $\frac{x}{25\sqrt{25 - x^2}} + C$

181) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$ Solución: $\sqrt{x^2+4x+8}-2\ln\left|\sqrt{x^2+4x+8}+x+2\right|+C$

182) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$ Solución: $\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C$

183) $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ Solución: $\frac{1}{2}ang\tan x-\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+C$

184) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}dx$ Solución: $angsen\left(\frac{x-3}{3}\right)+C$

185) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+50}}dx$ Solución: $\ln\left|\sqrt{x^2+2x+50}+x+1\right|+C$

186) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ Solución: $\frac{3}{2}angsen(x-1)-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2}+C$

Integración por descomposición en fracciones racionales.

187) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ Solución: $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

188) $\int \frac{x}{x-5}dx$ Solución: $x+5\ln|x-5|+C$

189) $\int \frac{1}{x(x+1)(2x+3)}dx$ Solución: $\frac{1}{3}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{3}{10}\ln|2x+3|+C$

190) $\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx$ Solución: $\frac{9}{25}\ln|x-3|+\frac{16}{25}\ln|x+2|+\frac{4}{5(x+2)}+C$

191) $\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}dx$ Solución: $ang\tan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{3}{2}ang\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$

192) $\int \frac{x^4+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$ Solución: $\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+C$

193) $\int \frac{1}{x^3-1}dx$

Solución: $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}ang\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

194) $\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$

Solución: $x+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}ang\tan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

195) $\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}dx$ Solución: $e^x-\frac{3}{2}ang\tan\left(e^x\right)+\frac{e^x}{2\left(e^{2x}+1\right)}+C$

196) $\int \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}dx$ Solución: $\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$

Sustituciones diversas.

197) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ Solución: $2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$

198) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$ Solución: $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$

199) $\int \sqrt{1-e^x}\,dx$ Solución: $2\sqrt{1-e^x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}}\right|+C$

200) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ Solución: $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$

201) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ Solución: $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

202) $\int \cot^7 x dx$

Solución: $-\frac{1}{6}\cot^6 x+\frac{1}{4}\cot^4 x-\frac{1}{2}\cot^2 x+\ln\left|\csc x\right|+C$

203) $\int \cot^{-9} x dx$ Solución:

Solución: $\frac{1}{8}\tan^8 x-\frac{1}{6}\tan^6 x+\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln\left|\sec x\right|+C$

204) $\int \frac{1}{1+senx}dx$ Solución: $-\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+C$

205) $\int \frac{1}{senx+\tan x}dx$ Solución:

$\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{4}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2+C$

Miscelánea de integrales.

206) $\int 2^x x^2 dx$ Solución:

$\frac{2^x}{\ln 2}\left[x^2-\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2}{(\ln 2)^2}\right]+C$

207) $\int \frac{e^{(\ln x)+\frac{1}{x}}}{x^4}dx$ Solución: $-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+C$

208) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

Solución:

$\frac{12}{13}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{13/3}-\frac{18}{5}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{10/3}+\frac{36}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}+C$

209) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$ Solución:

$\ln\left|\sqrt{1+(\ln x)^2}+\ln x\right|+C$

210) $\int \frac{1}{e^{3x}+1}dx$ (Sugerencia: multiplique y divida entre e^x, y haga la sustitución $u=e^x$).

Solución: $x-\frac{1}{3}\ln\left(e^x+1\right)-\frac{1}{3}\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right|+C$

211) $\int \frac{1}{x\left(x^4-1\right)}dx$ (Sugerencia: multiplique y divida entre x, y haga la sustitución $u=x^2$).

Solución: $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|-\ln\left|x\right|+C$

212) $\int sen^3 x\cos x dx$ Solución: $\frac{1}{4}sen^4 x+C$

213) $\int\left(\sec x+\tan x\right)^2 dx$ Solución: $2\tan x+2\sec x-x+C$

214) $\int \frac{1}{2+senx}dx$ Solución:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}ang\tan\left(\frac{1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+C$$

215) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}dx$ Solución: $ang\tan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right)+C$

Aplicaciones

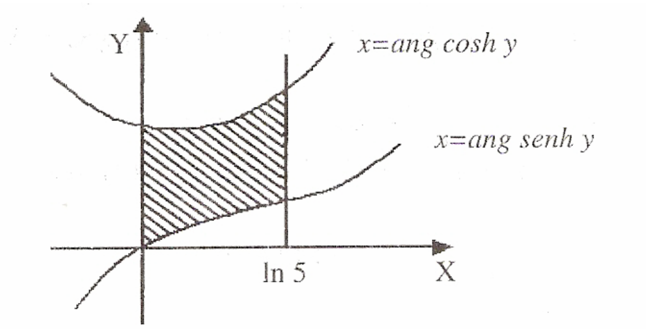
216) Sea la región del plano xy, limitada por las curvas $y=x^2$, $x=0$, $y=16$. Calcular $b\in\mathbb{R}$, tal que la recta $y=b$ divida a R en dos regiones con áreas iguales. (2EP/B/2003-2)

Solución: $b=\left(32\right)^{2/3}$.

217) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de ecuaciones $y=\sqrt{x}$ y $y=x^3$. (2EP/A/2005-1)

Solución: $A=\dfrac{5}{12}$ unidades de área.

218) Calcular el área de la región indicada en la figura (1EF/A/2002-2)



Solución: $A=\dfrac{4}{5}$ unidades de área.

219) Calcular el área de la región limitada por las curvas dadas por $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$. (1EF/A/2003-1)

Solución: $A=\dfrac{9}{2}$ unidades de área.

220) Calcule el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=-x+6$, y $y=1$.

Solución: $A=\dfrac{13}{6}$ unidades de área.

221) Calcular el área de la región limitada por la curva $r=1+sen\theta$.

Solución: $A=\dfrac{3}{2}\pi$ unidades de área.

222) Calcular la longitud de la curva $y = 200\left(\cosh\frac{x}{200}\right)$ en el intervalo $\left[-50,50\right]$. (2EP/A/2003-2)

Solución: $s = 200\left(e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{4}}\right)$ unidades de longitud.

223) Calcular la longitud del arco de la curva dada por $r = 4sen\theta$ para $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{2}{3}\pi$. (2EP/A/2005-1)

Solución: $s = \frac{5}{3}\pi$ unidades de longitud.

224) Determinar la longitud de la curva de ecuación $r = 2e^{-\theta}$ en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$. (1EF/A/2005-2)

Solución: $s = 2\sqrt{2}\left(1 - e^{-\pi}\right)$unidades de longitud.

225) Calcular la longitud de la curva polar $r = 9\cos\theta$. (2EF/2003-2).

Solución: $A = 9\pi$ unidades de longitud.

226) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje X, de la región plana limitada por $y = senx$, $x \in \left[0,\pi\right]$. (2EP/A/2003-1).

Solución: $V = \frac{1}{2}\pi^2$ unidades de volumen.

227) Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje X, la región limitada por $y = x$, $y = \sqrt{x}$.

Solución: $V = \frac{1}{6}\pi$ unidades de volumen.

228) Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje X. (1EF/A/2004-2)

Solución: $V = \frac{28}{15}\pi$ unidades de volumen.

Ejercicios del segundo examen parcial del semestre 2006-1

229) Al realizar $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, se obtiene……………………….. ☐

1) $\ln\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}} + C$ 2) $\ln\sqrt{\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \frac{2}{x}} + C$

3) $\ln\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}} + C$ 4) $\ln\sqrt{\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}} + C$

230) El área de la región limitada por las gráficas de ecuaciones $y^2 - 2y + x = 0$ y $y^2 - 2y - x = 0$, es…………………… ☐

1) $\frac{3}{8}\left[u^2\right]$ 2) $\frac{3}{4}\left[u^2\right]$ 3) $\frac{4}{3}\left[u^2\right]$ 4) $\frac{8}{3}\left[u^2\right]$

231) Al efectuar $\int (w)(\ln w)\,dw$, se obtiene…………………… ☐

1) $w^2\left(\ln\sqrt{w} - \frac{1}{4}\right) + C$ 2) $-w^2\left(\ln\sqrt{w} + \frac{1}{4}\right) + C$

3) $w^2\left(\frac{1}{4} - \ln\sqrt{w}\right) + C$ 4) $w^2\left(\ln\sqrt{w} + \frac{1}{4}\right) + C$

232) Al realizar $\int \frac{x^2}{(x+4)(x-1)}dx$, se obtiene……………….. ☐

1) $\ln\left|\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+4)^{16}}}\right|+C$ 2) $x+\ln\left|\sqrt[5]{\dfrac{(x+4)^{16}}{x-1}}\right|+C$

3) $x+\ln\left|\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+4)^{16}}}\right|+C$ 4) $x+\ln\left|\dfrac{1}{(x+4)^{\frac{8}{5}}(x-1)^{\frac{7}{5}}}\right|+C$

233) El volumen que se obtiene al hacer girar la región limitada por la gráfica de ecuación $y=\sqrt{1-x}$ y los ejes coordenados, alrededor del eje de las ordenadas es……………………☐

1) $\dfrac{3}{4}\pi\left[u^3\right]$ 2) $\dfrac{8}{15}\pi\left[u^3\right]$ 3) $\dfrac{\pi^2}{2}\left[u^3\right]$ 4) $\dfrac{4}{5}\pi\left[u^3\right]$

234) La longitud de la curva de ecuación $y=\ln(\cos x)$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, es………………………………………☐

1) $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)[u]$ 2) $\ln\left(2-\sqrt{2}\right)[u]$ 3) $\left(\sqrt{2}+2\right)[u]$ 4) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)[u]$

235) Al efectuar $\int\dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, se obtiene…………………☐

1) $angsen\left(\dfrac{x-1}{4}\right)+C$ 2) $angsen\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$

3) $angsen\left(\dfrac{1-x}{2}\right)+C$ 4) $angsen\left(\dfrac{1-x}{4}\right)+C$

TEMA 4

Indique si es falso o verdadero**.**

236) $S=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1; x>0; y\ge 0; x,y\in\mathbb{R}\}$ es un conjunto cerrado.
Solución: Falso

237) Sea $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ su dominio esta representado por el conjunto $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4; x,y\in\mathbb{R}\}$
Solución: Verdadero

238) Determine el dominio de la función $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$.
Solución: $S=\{(x,y)\,|\,y>-x; x,y\in\mathbb{R}\}$

239) Obtenga el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$.
Solución: $S=\{(x,y)\,|\,y\ge 0; x\ge -\sqrt{y}; x,y\in\mathbb{R}\}$.

240) Obtenga el dominio de la función
$f(x,y)=\ln\left[y\ln(1+x+y)\right]$
Solución: $S=S_1\bigcup S_2$ donde
$S_1=\{(x,y)\,|\,y>0; y>-x; x,y\in\mathbb{R}\}$
$S_2=\{(x,y)\,|\,y<0; -(1+x)<y<-x; x,y\in\mathbb{R}\}$

241) Determinar el dominio y el recorrido de la función
$f(x,y)=\sqrt{(x^2-4)(1-y)}$.
Solución: $S=S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$

$S_1 = \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2; y \ge 1; x,y \in \mathbb{R}\}$,

$S_2 = \{(x,y) \mid x \le -2; y \le 1; x,y \in \mathbb{R}\}$

$S_3 = \{(x,y) \mid x \ge 2; y \le 1; x,y \in \mathbb{R}\}$

Su recorrido $R = [0,\infty)$.

242) Sea la función $y^2 + z^2 = 3x$, $z \ge 0$; obtenga su dominio y recorrido.

Solución: $S = \{(x,y) \mid y^2 \le 3x; x,y \in \mathbb{R}\}$, $R = [0,\infty)$.

243) Determinar el dominio y recorrido de la función $f(x,y) = \sqrt{4 - 4x^2 - 4y^2}$.

Solución: $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1; x,y \in \mathbb{R}\}$, $R = [0,2]$.

244) Para la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$, determinar el dominio y el recorrido.

Solución: $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1; x,y \in \mathbb{R}\}$, $R = \mathbb{R}$.

245) Sea la función $z = e^{y - x^3}$, determine la curva de nivel para a) $z = 1$, b) $z = e$.

Solución: a) $y = x^3$, b) $y = x^3 + 1$.

246) Para la función $f(x,y) = \sqrt{|x| - y}$, obtenga sus curvas de nivel para $z = 0,1$.

Solución: $z = 0$, $y = |x|$; $z = 1$, $y = |x| - 1$.

247) Sea la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$, encuentre sus curvas de nivel para $z = 1$ y $z = 2$.

Solución: $z = 1$, dos rectas: $y = x$, $y = -x$

$z=2$, la hipérbola $x^2-y^2=3$.

248) Determinar el dominio de $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{z}\ e^{-|xy|}$.
(1EF/A/2005-2)
Solución: $S=\left\{\left(x,y,z\right)|\ z\geq 0; x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$

249) Sea la función $y^2+z^2=3x,\ \ z\geq 0$. Obtenga la ecuación de la curva de nivel para $z=3$.
Solución: $y^2=3\left(x-3\right)$.

250) Sea la función $z=\sqrt{y^2-x^2+1}$. Determinar la ecuación de sus curvas de nivel para:
a) $z=0$
b) $z=-\sqrt{2}$
Solución:
Si $z=0,\ \ x^2-y^2=1$
Si $z=-\sqrt{2}$, $y^2-x^2=1$

251) Identificar las curvas de nivel de la superficie $9x^2+y^2-z^2=9;\ \ z\geq 0$ correspondientes a los valores
a) $z=0$
b) $z=4$
Solución:
Si $z=0$, la elipse $9x^2+y^2=9$.
Si $z=4$, la elipse $9x^2+y^2=25$.

252) Obtenga el límite $\underset{(x,y)\to(1,1)}{lím}\ \dfrac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$
a) a través de $y=x$
b) a lo largo de $y=-x+2$

Solución: a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$.

253) Determine el valor del límite, si este existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Solución: No existe.

254) Obtenga el límite, si este existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^8+y^2}$

Solución: No existe.

255) Determine, si existe el límite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$.

Solución: No existe.

256) Determinar , si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^3y^2+2xy^2}{3x^4+2y}$

(3EP/B/2005-2)
Solución: No existe.

257) Calcule el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 sen\left(\frac{y}{x}\right)$

Solución: $8\sqrt{2}$.

258) Para la función $f(x,y)=9-x^2-y^2$, determine la pendiente de la recta tangente en $(2,1,4)$ en el plano $x=2$.
Solución: $m=-2$.

259) Sea $P=\frac{kT}{V}$, donde k es una constante, determine $\frac{\partial P}{\partial T}$.
Solución: $\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{k}{V}$.

260) Sea $f(x,y)=\pi^{xy}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=(\ln \pi)^2\, xy\pi^{xy}+(\ln \pi)\pi^{xy}$.

261) Sea $f(x,y,z)=x\cosh(yz)$, obtenga $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$.

Solución: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}=senh(yz)+yz\cosh(yz)$.

262) Sea $f(x,y)=\int_x^y (t^2-1)\,dt$, obtenga $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1-x^2$.

263) Determine la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $f(x,y)=8e^{-2y}sen4x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{24},0,4\right)$.

Solución: Plano tangente: $x-\dfrac{\sqrt{3}}{6}y-\dfrac{\sqrt{3}}{48}z-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}=0$

Recta normal: $\dfrac{x-\dfrac{\pi}{24}}{-16\sqrt{3}}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z-4}{1}$

264) Sea $\omega=x^2y+z^2$ a su vez $\begin{array}{l} x=\rho sen\phi\cos\theta \\ y=\rho sen\phi sen\theta \\ z=\rho cos\phi \end{array}$

Encuentre $\left.\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta}\right|_{\rho=2,\theta=\pi,\phi=\frac{\pi}{2}}=$

Solución: $\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta} = -8$.

265) Sea la función compuesta $z = f\left(x^2 + y^2, \dfrac{x}{y}\right)$ obtenga $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial v}$

266) Sea $u(x, y) = f(3x + y) + g(x + y) - x^3 + 5$

obtenga $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3f'(3x + y) + g'(x + y) - 3x^2$

267) Sea $f(x, y, z) = xy^z$, obtenga $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = y^{z-1}\left[z \ln y + 1\right]$.

268) Los lados de un triángulo equilátero crecen a razón de $3\left[\dfrac{cm}{\min}\right]$, calcular con qué rapidez crece el área del triángulo en el instante en el que los lados miden $100cm$. (1EF/A2005-2)

Solución: $\dfrac{dA}{dt} = 150\sqrt{3}\left[\dfrac{cm^2}{\min}\right]$.

269) Sea $x\ln(yz) - y\ln(xz) + z\ln(xy) = 0$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z\left(x - y\ln(xz) + z\right)}{y\left(x - y + z\ln(xy)\right)}$

270) Sean $\begin{array}{l} u^2 - v - 3x - y = 0 \\ u - 2v^2 - x + 2y = 0 \end{array}$ determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1-12v}{1-8uv}$.

271) Sea $z = u^2 v^2$ a su vez $\begin{array}{l} x^4 + y + u - 2v = 0 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v = 0 \end{array}$ determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2uv^2\left(4x^3+4x\right) + 2u^2 v\left(2x - 8ux^3\right)}{1+4u}$.

272) Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y) = \sqrt{2}\, x^2 seny$ en el punto $A_0\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y en la dirección del vector que forma un ángulo de $30°$ con la dirección positiva del eje x.

Solución: $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u}, A_0} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2}$.

273) Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ en el punto $P(0,2)$ y en la dirección de vector $\bar{v} = (-1,1)$. (3EP/B/2005-2)

Solución: $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u}, P} = 2\sqrt{2}$

274) La superficie de una montaña se describe mediante la ecuación $h(x,y) = 3e^{-\left(x^2+2y^2\right)}$. El eje X positivo apunta hacia el este y el eje Y positivo apunta hacia el norte. Una montañista está directamente sobre el punto $(1,1,1)$. Si la montañista se

mueve hacia el norte ¿Ascenderá o descenderá y con qué pendiente?
(1EF/A/2005-2)
Solución: $\left(\frac{dh}{ds}\right)_{\bar{u}} = -12e^{-3}$ por lo que la montañista desciende con una pendiente de $-12e^{-3}$.

275) La temperatura en una caja rectangular es aproximada por $T(x,y,z) = xyz(1-x)(2-y)(3-z)$; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$. Si un mosquito se localiza en $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, ¿en que dirección debe volar para enfriarse lo más rápidamente posible?
Solución: El mosquito debe volar en la dirección $-\frac{1}{4}\hat{k}$ para que su temperatura disminuya más rápidamente.

276) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en $(1,1,1)$.
Solución: $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.

277) Determine el gradiente para la curva de nivel de la función $f(x,y) = -x^2 + y^2$ con $k = 5$ en el punto $(2,3)$.
Solución: $\nabla f = -4\hat{i} + 6\hat{j}$.

278) Para la función $f(x,y,z) = x^y senhz$ obtenga su gradiente.
Solución: $\nabla f = yx^{y-1} senhz\hat{i} + x^y \ln x\, senhz\hat{j} + x^y \cosh z\hat{k}$.