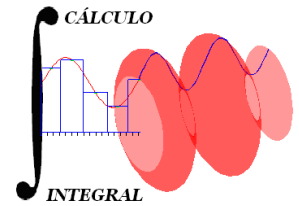


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



CÁLCULO INTEGRAL

**SERIE 4**

1. Determinar si cada una de las relaciones

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ,  $z > 0$

b)  $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$  ,  $z \leq -4$

corresponde a una función del tipo  $z = f(x, y)$

2. Trazar la gráfica de cada una de las funciones siguientes:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

b)  $f(x, y) = +\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

c)  $h(x, y) = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 9y^2}$

d)  $h(x, y) = +\sqrt{x^2 - 9}$

3. Identificar las curvas de nivel de las superficies :

a)  $z = \frac{3}{\sqrt{10-x^2-y^2}}$  correspondientes a los valores  $z=1$  ,  $z=3$

b)  $z^2 = x^2 + 4y^2$  ;  $z \geq 0$  correspondientes a los valores  $z=-1$  ,  $z=0$  y  $z=4$

---

4. Determinar el dominio y recorrido de cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(x-y+1)}}$

b)  $f(x,y) = +\sqrt{16x^2 + 4y^2 - 64}$

c)  $g(x,y) = 3 - \text{sen}(2x+y)$

d)  $h(x,y) = \frac{2}{x^2 - y^2}$

---

5. Calcular, de ser posible, los siguientes límites

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^4 - y^6}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2 y^2}{3x^4 + 2y^4}$

6. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de la ecuación

$$xy + y^2z - z^3 = 1$$

en el punto  $A(1, -2, 1)$

---

7. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente y la ecuación de la recta normal a la superficie

$$z = 2e^{x-y} - \frac{y}{x}$$

en el punto  $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

---

8. Calcular el ángulo  $\theta$ , comprendido entre el plano  $XY$  y el plano tangente al hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \text{ en el punto } (2, 2, 1).$$

---

9. Se tiene un depósito de forma cilíndrica, sin tapa, cuyas dimensiones son de  $3m$  de radio y  $10m$  de altura. Calcular, por medio de diferenciales, la cantidad de pintura que se requiere para recubrir dicho depósito con una capa de  $1mm$  de pintura.

---

10. Si la altura y el radio de un cono crecen con una rapidez de  $3 \text{ cm} / \text{mín}$  y  $2 \text{ cm} / \text{mín}$  respectivamente, calcular con qué rapidez crece el volumen del cono cuando su altura tiene una longitud de  $10 \text{ cm}$  y su radio de  $8 \text{ cm}$

11. Una empresa fabrica placas triangulares, dos de cuyos lados miden  $24 \text{ cm}$  y  $56 \text{ cm}$  y el ángulo que forman dichos lados es de  $30^\circ$ . Al realizar una prueba de calentamiento se observa que el área de la placa varía a razón de  $9 \left[ \text{cm}^2 / \text{s} \right]$  y cada uno de los lados conocidos varía a razón de  $5 \left[ \text{mm} / \text{s} \right]$ . Calcular la variación que experimenta el ángulo formado por dichos lados.

---

12. Sea la superficie  $z - zy - 4x = 0$  y el punto  $P_0(1, -1, 2)$ . Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie en el punto  $P_0$ .

---

13. La temperatura en un punto  $(x, y)$  de una placa metálica está dada por 
$$T(x, y) = \frac{60}{(1 + x^2 + y^2)}$$
;  $T$  en  $^\circ\text{C}$ ;  $x, y$  en metros.

Calcular la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, en el punto  $(2, 1)$ ,

- a) en la dirección del eje X.
  - b) en la dirección del eje Y.
- 

14. Sea la función  $f(x, y, z) = z^3 + \ln(2x - y^2)$  y el punto  $P_0(5, 3, 2)$

- a) Calcular la derivada direccional de la función  $f$  en el punto  $P_0$ , en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes coordenados.
- b) Calcular la máxima variación de la función  $f$  en el punto  $P_0$ .

15. Sea la función

$$f(x, y) = xy^2 - x^2y$$

Determinar la dirección en que  $f$  permanece constante, a partir del punto  $P(1, 1)$ .

---

16. Sea  $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$ , calcular

$$\frac{\partial^3 f}{dydx^2}$$