UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SERIE 4

---

1. Determinar si cada una de las relaciones

a) $x^2+y^2+z^2=4$, $z>0$

b) $4x^2+y^2-z^2=16$, $z\leq -4$

corresponde a una función del tipo $z=f(x,y)$

---

2. Trazar la gráfica de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$

b) $f(x,y)=+\sqrt{25-x^2-y^2}$

c) $h(x,y)=-\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9y^2}$

d) $h(x,y)=+\sqrt{x^2-9}$

3. Identificar las curvas de nivel de las superficies :

a) $z=\dfrac{3}{\sqrt{10-x^2-y^2}}$ correspondientes a los valores $z=1$, $z=3$

b) $z^2=x^2+4y^2$; $z\geq 0$ correspondientes a los valores $z=-1$, $z=0$ y $z=4$

---

4. Determinar el dominio y recorrido de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln(x-y+1)}}$

b) $f(x,y)=+\sqrt{16x^2+4y^2-64}$

c) $g(x,y)=3-sen(2x+y)$

d) $h(x,y)=\dfrac{2}{x^2-y^2}$

---

5. Calcular, de ser posible, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4-y^6}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y^2}{3x^4+2y^4}$

6. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de la ecuación

$$xy+y^2z-z^3=1$$

en el punto $A(1,-2,1)$

---

7. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente y la ecuación de la recta normal a la superficie

$$z=2e^{x-y}-\frac{y}{x}$$

en el punto $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

---

8. Calcular el ángulo θ, comprendido entre el plano XY y el plano tangente al hemisferio $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, en el punto $(2,2,1)$.

---

9. Se tiene un depósito de forma cilíndrica, sin tapa, cuyas dimensiones son de $3\,m$ de radio y $10\,m$ de altura. Calcular, por medio de diferenciales, la cantidad de pintura que se requiere para recubrir dicho depósito con una capa de $1\,mm$ de pintura.

---

10. Si la altura y el radio de un cono crecen con una rapidez de $3\ cm/mín$ y $2\ cm/mín$ respectivamente, calcular con qué rapidez crece el volumen del cono cuando su altura tiene una longitud de $10\ cm$ y su radio de $8\ cm$

11. Una empresa fabrica placas triangulares, dos de cuyos lados miden $24\ cm$ y $56\ cm$ y el ángulo que forman dichos lados es de $30°$. Al realizar una prueba de calentamiento se observa que el área de la placa varía a razón de $9\left[cm^2/s\right]$ y cada uno de los lados conocidos varía a razón de $5\left[mm/s\right]$. Calcular la variación que experimenta el ángulo formado por dichos lados.

---

12. Sea la superficie $z - zy - 4x = 0$ y el punto $P_0(1, -1, 2)$. Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie en el punto P_0.

---

13. La temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica está dada por $T(x, y) = \dfrac{60}{\left(1 + x^2 + y^2\right)}$; T en $°C$; x, y en metros.

Calcular la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, en el punto $(2,1)$,

a) en la dirección del eje X.
b) en la dirección del eje Y.

---

14. Sea la función $f(x, y, z) = z^3 + \ln\left(2x - y^2\right)$ y el punto $P_0(5, 3, 2)$

a) Calcular la derivada direccional de la función f en el punto P_0, en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes coordenados.
b) Calcular la máxima variación de la función f en el punto P_0.

15. Sea la función

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 y$$

Determinar la dirección en que f permanece constante, a partir del punto $P(1,1)$.

---

16. Sea $f(x,y) = \ln \dfrac{x+y}{x-y}$, calcular

$$\frac{\partial^3 f}{dydx^2}$$