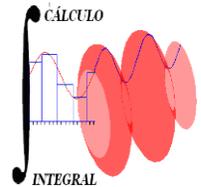




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS  
CÁLCULO INTEGRAL  
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO



*Sinodales: Ing. Luis Hernández Moreno  
M.E.M. Margarita Ramírez Galindo*

8 de junio de 2016

Semestre 2016-2

**INSTRUCCIONES:** Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

1. Para la función  $f(x) = 2 - x^2$  definida en el intervalo  $[0, 2]$ , determinar el valor de  $c$  tal que el valor promedio de la función sea igual a  $f(c)$

**15 Puntos**

2. Calcular, de ser posible

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos x}$$

**15 Puntos**

3. Efectuar las integrales:

$$a) \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} dx \qquad b) \int \frac{16 dx}{x^3 + 4x}$$

**20 Puntos**

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$C_1: y = 4x^3 \quad C_2: y = 8x^2$$

15 Puntos

5. Verificar que la función  $u(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

satisface la ecuación en derivadas parciales  $u_{xx} + u_{yy} = 0$

15 Puntos

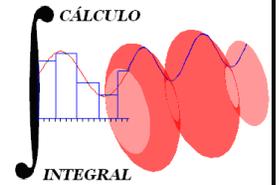
6. Determinar la máxima razón de cambio de

$f(x, y) = xe^{-y} + 3y$  en el punto  $P(1, 0)$ .

20 Puntos



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS  
CÁLCULO INTEGRAL  
SOLUCIÓN DEL TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO



8 de junio de 2016

Semestre 2016-2

1.

$$\text{Valor promedio} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

$$\int_0^2 (2-x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$V_{prom} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_{prom} = fc \Rightarrow \frac{2}{3} = 2 - c^2; \quad c^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15} \quad c \in [0, 2]$$

15 Puntos

2.

Valuando:

$$L = (\cos(0)^0)^{1/0} = 1^\infty$$

Aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \ln(\cos x)^{1/x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\cos x)}{x} \right] = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} \right) = -\frac{\operatorname{sen} 0^\circ}{\cos 0^\circ} = -\frac{0}{1} = 0$$

Finalmente

$$L = e^0$$

$$\boxed{L = 1}$$

15 Puntos

3. a) Por partes

$$u = \frac{1}{x} \qquad du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$dv = \cos \frac{1}{x} \left( \frac{dx}{x^2} \right) \qquad v = -\left( \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)$$

$$I = -\frac{1}{x} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) - \int \left( \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \left( \frac{dx}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{x} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) - \left( \cos \frac{1}{x} \right) + c}$$

b) Por fracciones parciales

$$\frac{16}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4)}$$

$$\Rightarrow 16 = A(x^2 + 4) + Bx^2 + Cx$$

$$\text{si } x = 0$$

$$\text{si } x = 1$$

$$\boxed{A = 4}$$

$$16 = 20 + B + C$$

$$\Rightarrow \boxed{-4 = B}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$I = \int \left[ \frac{4}{x} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right] dx$$

$$I = 4(\ln x) - 2 \ln(x^2 + 4) + c$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones:

$$4x^3 = 8x^2$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

Entonces

$$A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) dx$$

$$A = \left[ \frac{8}{3}x^3 - x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{3}(8) - 16$$

$$A = \frac{64 - 48}{3}$$

$$A = \frac{16}{3} \text{ unidades de área}$$

15 Puntos

5.

$$u_x = -e^{-x} \cos y + e^{-y} \sin x$$

$$u_{xx} = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$$

$$u_y = -e^{-x} \sin y + e^{-y} \cos x$$

$$u_{yy} = -e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$$

Sustituyendo en EDP:

$$e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x - e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x = 0$$

$$0 = 0 \quad \therefore \text{se verifica}$$

15 Puntos

6.

La máxima razón de cambio es  $\left| \bar{\nabla} f \Big|_p \right|$

$$\bar{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

$$\bar{\nabla} f = e^{-y} i + (-x e^{-y} + 3) j$$

$$\bar{\nabla} f \Big|_p = i + 2j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\nabla} f(1,0) = \sqrt{5}}$$

20 Puntos