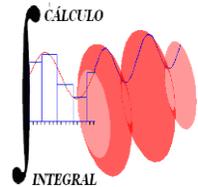




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO



*Sinodales: Quím. María del Rosario Cabeza Luna
Fís. Pedro Ramírez Manny*

2 de junio de 2015

Semestre 2015-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

1. Si las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \frac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0, 1]$, calcular el valor de a .

15 Puntos

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

15 Puntos

3. Efectuar las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

b) $\int \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^3 + x} dx$

c) $\int (\tan x - \sec x)^2 dx$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $y = x^2 - 1$ y de $y = 7 - x^2$. Representar gráficamente la región.

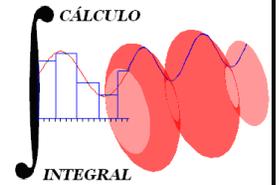
10 Puntos

5. Para la función $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$, representar gráficamente su dominio; obtener las ecuaciones de sus curvas de nivel para $z = 0$ y $z = 1$, trazar la gráfica de cada una.

15 Puntos

6. Si la temperatura de una placa metálica rectangular está determinada por $T(x, y) = xy(1+x)(2-y)$ donde $x \in [0, 1]$ y $y \in [0, 2]$, obtener la dirección en la que la temperatura disminuye más rápidamente a partir del punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

15 Puntos



CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN DEL TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

2 de junio de 2015

Semestre 2015-2

1. Sean

$$f(c) = \frac{\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}}{1} = \text{ang tan } x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$g(c) = \frac{\int_0^1 \frac{a}{2\sqrt{2-x}} dx}{1} = -a\sqrt{2-x} \Big|_0^1 = -a + a\sqrt{2}$$

como deben ser iguales:

$$-a + a\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4(\sqrt{2}-1)}$$

15 Puntos

2. Es una integral impropia

$$I = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_e^u \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_e^u$$

$$I = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} + 1 \right] = 1$$

∴ La integral converge

15 Puntos

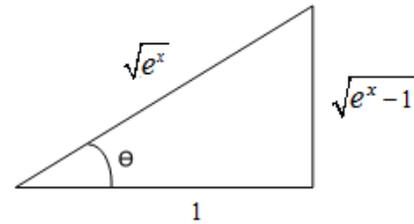
3. a) Por sustitución trigonométrica

$$\text{si } \sqrt{e^x} = \sec \theta$$

$$\sqrt{e^x - 1} = \tan \theta$$

$$e^x = \sec^2 \theta$$

$$\Rightarrow e^x dx = 2 \sec^2 \theta \tan \theta d\theta$$



$$I = \int \frac{2 \sec^2 \theta \tan \theta d\theta}{\sec^2 \theta \tan \theta} = 2 \int d\theta$$

$$I = 2\theta + c \quad \Rightarrow \quad I = 2 \operatorname{ang} \sec \sqrt{e^x} + c$$

o bien:

$$I = 2 \operatorname{ang} \sec \left(e^{\frac{x}{2}} \right) + C$$

También se puede resolver con cambio de variable.

b) Por fracciones parciales

Sea

$$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = A(x^2 + 1) + x(Bx + C)$$

$$\text{si } x = 0$$

$$\text{si } x = 1$$

$$\text{si } x = -1$$

$$\boxed{A = 3}$$

$$10 = 6 + B + C$$

$$0 = 6 + B - C$$

$$\Rightarrow \boxed{4 = B + C}$$

$$\Rightarrow \boxed{-6 = B - C}$$

Por lo que:

$$-2 = 2B \Rightarrow \boxed{B = -1} \text{ y } \boxed{C = 5}$$

$$I = \int \left[\frac{3}{x} + \frac{-x+5}{x^2+1} \right] dx$$

$$I = \ln x^3 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 5 \operatorname{ang} \tan x + C$$

$$\therefore \boxed{I = \ln \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 5 \operatorname{ang} \tan x + C}$$

c) Al desarrollar el cuadrado:

$$I = \int (\tan^2 x - 2 \sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

$$I = \int (\sec^2 x - 1 - 2 \sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

$$\boxed{I = 2 \tan x - 2 \sec x - x + C}$$

4. Al hacer simultáneas las ecuaciones:

$$x^2 - 1 = 7 - x^2$$

$$2x^2 = 8 \quad \Rightarrow A = \int_{-2}^2 [(7 - x^2) - (x^2 - 1)] dx$$

$$x = \pm 2 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$I = 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 2 \left[8x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 2 \left[2(8) - \frac{2}{3}(2)^3 \right]$$

$$I = 2 \left[2(8) - \frac{2(8)}{3} \right] = 2(8 \cdot 2) \left[1 - \frac{1}{3} \right] = 32 \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$I = \frac{64}{2} u^2$$

10 Puntos

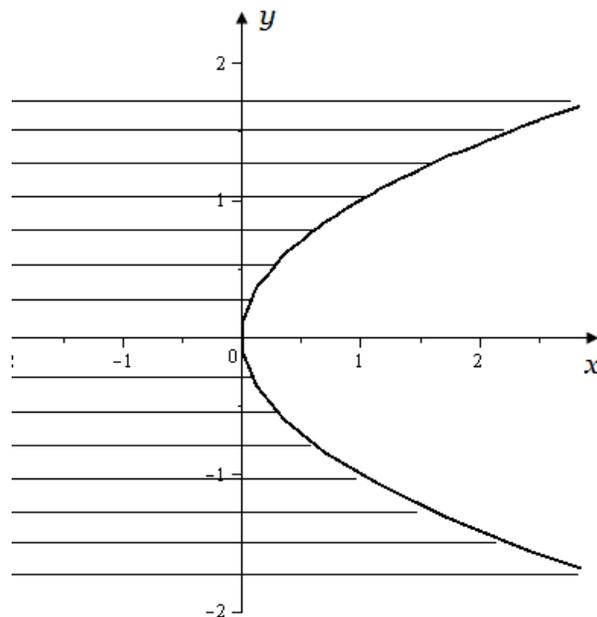
5.

Debe cumplirse que

$$y^2 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 \geq x$$

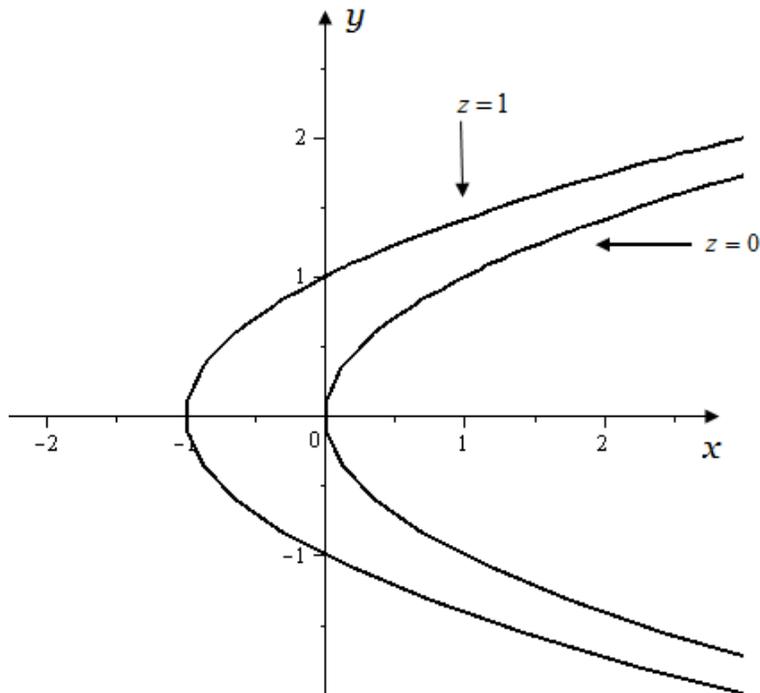
$$D = \{(x, y) \mid x \leq y^2\}$$



Las ecuaciones de las curvas de nivel son:

Para $z=0$; $y^2 = x$

Para $z=1$; $y^2 = x+1$



15 puntos

6.

Sea

$$\bar{\nabla}T = ([x+(1+x)]y(2-y), [-y+(2-y)]x(1+x))$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}T = ((2x+1)y(2-y), (2-2y)x(1+x))$$

si $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Entonces

$$\bar{\nabla}T|_P = (2,0) \quad \therefore \text{Disminuye m\u00e1s r\u00e1pido en la direcci\u00f3n del vector } (-2,0)$$

15 Puntos