UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales:* *Ing. Irlib Blancas Ríos
Fis. Pedro Ramírez Manny

1 de diciembre de 2014 ***Semestre 2015-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \left| x^2 - 9 \right|$, en el Intervalo $[-3,\ 3]$.

15 Puntos

---

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} x\,(2 - x)\,e^{-x}\,dx$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las siguientes integrales:

$$a)\int \frac{9 + \ln x}{x\sqrt{(\ln x)^2 - 9}}\,dx \qquad b)\int \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx \qquad c)\int \sqrt{x}\ \mathrm{sen}\sqrt{x}\ dx$$

30 Puntos

4. Calcular área de la región limitada por la curva de

$$r = 2 + 2sen\theta$$

10 Puntos

---

5. Calcular la derivada direccional de la función $z = x^2 \cos 2y$ en el punto de coordenadas $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y en la dirección del vector $v = 3i - 4j$

15 Puntos

---

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $y = e^x \cos z$ en el punto de coordenadas $P(0, 1, 0)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

1 de diciembre de 2014 ***Semestre 2015-1***

---

1. El valor medio es

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_{-3}^{3}\left[9-x^2\right]dx}{3-(-3)}=\frac{\left.9x+\dfrac{x^3}{3}\right|_{-3}^{3}}{3+3}$$

$$f(c)=9(3)-\frac{(3)^3}{3}-\left[9(-3)-\frac{(-3)^3}{3}\right]$$

$$f(c)=\frac{27-9-(-27+9)}{6}=\frac{36}{6}$$

$$\boxed{f(c)=6}$$

15 Puntos

---

2. Es una integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-x}x(2-x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}x(2-x)\,dx=$$

$$\int e^{-x}x(2-x)\,dx=-\left(2x-x^2\right)e^{-x}-(2-2x)e^{-x}+2e^{-x}+C$$

$$\begin{array}{ll} 2x-x^2 & e^{-x} \\ 2-2x & -e^{-x} \\ -2 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{array}$$

$$=-\cancel{2xe^{-x}}+x^2e^{-x}-\cancel{2e^{-x}}+\cancel{2xe^{-x}}+\cancel{2e^{-x}}$$

$$=x^2e^{-x}+c$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x\left(2-x\right)dx=\lim_{b\to\infty} x^2e^{-x}\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^b}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{e^b}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{e^b}=0$$

$$\boxed{\text{La integral impropia converge y su valor es cero.}}$$

10 Puntos

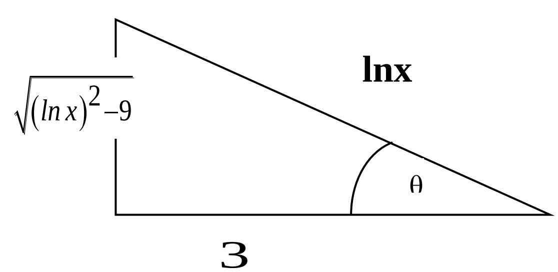
---

3. a) Por sustitución trigonométrica

$$\int\frac{9+\ln x}{x\sqrt{\left(\ln x\right)^2-9}}dx \Rightarrow \quad \ln x=3\sec\phi \qquad \sec\phi=\frac{\ln x}{3}$$

$$\frac{1}{x}dx=3\sec\phi\tan\phi\, d\phi$$

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{\left(\ln x\right)^2-9}}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(\ln x\right)^2-9}=3\tan\phi$$



$$\Rightarrow \int \frac{9+3\sec\phi}{3\tan\phi} 3\sec\phi\tan\phi\, d\phi = 9\int \sec\phi\, d\phi + 3\int \sec^2\phi\, d\phi$$

$$I = 9\ \ln|\sec\phi + \tan\phi| + 3\tan\phi + C$$

$$I = 9\ \ln\left|\frac{\ln x}{3} + \frac{\sqrt{(\ln x)^2 - 9}}{3}\right| + \sqrt{(\ln x)^2 - 9} + C$$

$$\boxed{I = 9\ \ln\left|\ln x + \sqrt{(\ln x)^2 - 9}\right| + \sqrt{(\ln x)^2 - 9} + C}$$

b) Por fracciones parciales

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left[x + 3 + \frac{-1}{(x+1)(x^2+1)} \right] dx$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x^3 + x^2 + x + 1 & x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \\ & -x^4 - x^3 - x^2 - x \\ \hline & 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ & -3x^3 - 3x^2 - 3x - 3 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

$$\left[\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} \right] (x+1)(x^2+1)$$

$$1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x+1)$$

$$si\ x=-1\ ;\quad 1=2A\qquad \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

$$si\ x=0\ ;\quad 1=A+C\qquad \boxed{C=\frac{1}{2}}$$

$$si\ x=1\ ;\quad 1=2A+2B+2C$$

$$1=1+2B+1\qquad \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}ang\tan x+C$$

$$\therefore\quad \boxed{I=\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}ang\tan x+\boldsymbol{C}}$$

c) Por partes

$$u=\sqrt{x}\qquad\qquad dv=sen\sqrt{x}\,dx$$

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\qquad\qquad \int dv=\int sen\sqrt{x}\,dx\quad de\ donde$$

$$u=\sqrt{x}$$

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\quad\Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$$

$$\int sen\sqrt{u}\,du\left(2\sqrt{x}\right)\ =2\sqrt{x}\int senu\,du$$

$$=-2\sqrt{x}\,cos\,u+c\qquad por\ lo\ que$$

$$v=-2\sqrt{x}\,cos\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x}\left(-2\sqrt{x}\,cos\sqrt{x}\right) - \int -2\sqrt{x}\,cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= -2x\,cos\sqrt{x} + \int cos\sqrt{x}dx$$

$$= -2x\,cos\sqrt{x} + 2\sqrt{x}sen\sqrt{x} + c$$

$$\boxed{= 2\left(-x\,cos\sqrt{x} + \sqrt{x}sen\sqrt{x}\right) + C}$$

15 Puntos

4. Sea

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(\theta)\right]^2 d\theta \quad entonces$$

$$A = 2\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[2+2sen\theta\right]^2 d\theta$$

$$Si \quad \left[2+2sen\theta\right]^2 = 4+8sen\theta+4sen^2\theta = 4+8sen\theta+\frac{\cancel{4}\left(1-\cos 2\theta\right)}{\cancel{2}}$$

$$= 4+8sen\theta+2-2sen2\theta = 6+8sen\theta-2\cos 2\theta$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(6+8sen\theta-2\cos 2\theta\right)d\theta = 6\theta-8\,\cos\,\theta-sen2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = 6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

$$\boxed{A = 6\pi\ u^2}$$

15 Puntos

5. Sea

$$Si \ \left\|\bar{v}\right\| = 5 \quad un\ vector\ unitario\ en\ dirección\ de\ v\ es$$

$$\vec{u}_v = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\nabla f = \left(2x\cos 2y\right)i - \left(2x^2 sen 2y\right) j\Big|_{P\left(2,\pi/2\right)}$$

$$\nabla f = 4\cos\pi\, i - 8 sen\pi\ j$$

$$La\ derivada\ \ direccional\ será$$

$$\frac{df}{ds} = \left(4\cos\pi, -8sen\pi\right)\bullet\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$= \frac{12}{5}\cos\pi + \frac{32}{5} sen\pi$$

$$= \frac{12}{5}\left(-1\right) + \frac{32}{5} sen\left(0\right)$$

$$\boxed{\frac{df}{ds} = -\frac{12}{5}}$$

15 Puntos

6. Sea

$$\bar{\nabla} F = \left(e^x \cos z\right)i + \left(-1\right) j + \left(-e^x sen\, z\right)k\Big|_{P(0,1,0)}$$

$$r - r_0 = \left(x, y, z\right) - \left(0,1,0\right) = \left(x-0, y-1, z-0\right) = 0$$

$$\bar{\nabla} F = e^0 \cos\left(0\right)i - j + 0z$$

Entonces

$$\left(1,-1,0\right)\bullet\left(x-1, y-1, z\right)$$

$$\left(x-1\right) + \left(-y+1\right) = 0$$

$$x - y = 0$$

$$\boxed{x - y = 0}\ ecuación\, del\ plano\, tan\, gente$$

15 Puntos