UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***M.E.M. Margarita Ramírez Galindo***
M.I. Mayverena Jurado Pineda

6 de junio de 2011 ***Semestre 2011-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1. Calcular el valor promedio de la función $f(x) = 3\,x\,\sqrt{x^2 - 16}$ en el intervalo $[4,5]$.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe,

$$\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{x-1}$$

10 Puntos

---

3. Efectuar:

a) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$

20 Puntos

4. Calcular el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje X, la región acotada por las gráficas de ecuación $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$

15 Puntos

---

5. Calcular la longitud de arco de la curva de ecuación $r = 3\theta^2$, en el intervalo $[0, \pi]$.

10 Puntos

---

6. Sea $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln(u \cos v)$, $y = u\, sen(v)$ determine

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{u = 2 \\ v = \frac{\pi}{4}}}$$

15 Puntos

---

7. En cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por la ecuación

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Determine la razón de cambio del potencial V en el punto $P(3,4,5)$, en la dirección del vector $a = i + j - k$.

b) ¿En qué dirección cambia V más rápidamente en el punto P?

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

6 de junio de 2011 ***Semestre 2011-2***

---

1. Sea

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_4^5 3x\sqrt{x^2-16}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_4^5=\sqrt{\left(x^2-16\right)^3}\Big]_4^5$$

$$u=x^2-16 \qquad =\sqrt{\left(25-16\right)^3}-0$$

$$=27$$

$$f(c)=\frac{1}{5-4}[27]=\frac{27}{1}=27$$

$$\boxed{f(c)=27}\ \textit{Valor promedio}$$

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe,

$$\lim_{x\to1^+}(\ln x)^{x-1}=0^0$$

$$y=(\ln x)^{x-1} \qquad \ln y=(x-1)(\ln x)$$

$$\lim_{x\to1^+}\ln y=\lim_{x\to1^+}(x-1)(\ln x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln y = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} y = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1} = \boxed{1}$$

10 Puntos

3. a)

$$I = \int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x sen 2x - \frac{1}{2}\int sen 2x dx$$

$$u = x \qquad dv = \cos 2x$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2} sen 2x$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}x sen 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

c) Por fracciones parciales

$$I = \int \frac{x-3}{x^2(x+1)}dx = 4\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-2}dx - 4\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x-3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x-3=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

$$A+C=0 \qquad \boxed{C=-4}$$

$$A+B=1 \quad ; \qquad \boxed{A=4}$$

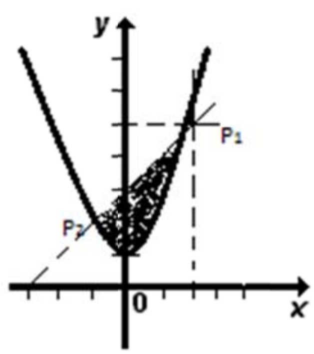
$$\boxed{B=-3}$$

$$\boxed{I=4ln|x|+\frac{3}{x}-4ln(x+1)+\ C}$$

20 Puntos

---

4. Puntos de intersección



$$x^2+1=x+3$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=2 \quad ; y_1=5$$

$$x_2=-1 ; y_2=2$$

$$P_1(2,5),\ P_2(-1,2)$$

$$V=\pi\int_a^b\left\{\left[R(x)\right]^2-\left[r(x)\right]^2\right\}dx=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-\left(x^2+1\right)\right]dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left(-x^4-x^2+6x+8\right)dx=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}$$

$$\boxed{V=\frac{117}{5}\pi u^3}$$

15 Puntos

5. Sea

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[f(\theta)\right]^2+\left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta$$

$$s=\int_{0}^{\pi}\sqrt{9\theta^4+36\theta^2}\,d\theta=\int_{0}^{\pi}\sqrt{9\theta^2\left(\theta^2+4\right)}\,d\theta$$

$$s=\int_{0}^{\pi}3\theta\sqrt{\left(\theta^2+4\right)}\,d\theta=3\int_{0}^{\pi}\left(\theta^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\theta\,d\theta$$

$$s=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\theta^2+4\right)^{3/2}\Big]_{0}^{\pi}=\left(\sqrt{\theta^2+4}\right)^3\Big]_{0}^{\pi}=\left(\sqrt{\pi^2+4}\right)^3-\left(\sqrt{4}\right)^3$$

$$\boxed{s=\left[\left(\sqrt{\pi^2+4}\right)^3-8\right]u}$$

10 Puntos

---

6. Sea

$$z=4e^x\,ln\,y,\qquad x=ln\left(u\cos v\right),\qquad y=u\,sen\left(v\right)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}\qquad por\quad lo\quad que\qquad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$x=ln\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=ln\left(\sqrt{2}\right)\qquad\qquad y=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4e^x\,ln\,y\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=4e^{ln\left(\sqrt{2}\right)}\,ln\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}\,ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4e^x}{y}\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=\frac{4e^{ln\left(\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cos v}{u \cos v} = \frac{1}{u} \Rightarrow \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u=2 \\ v=\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = sen v \Rightarrow \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{\substack{u=2 \\ v=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left[4\sqrt{2}\, ln\left(\sqrt{2}\right)\right]\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2\sqrt{2}\, ln\left(\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\, ln\left(2\right) + 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}\left(ln\left(2\right) + 2\right)}$$

15 Puntos

---

7. Sea

$$V\left(x,y,z\right) = 5x^2 - 3xy + xyz \qquad P\left(3,4,5\right)$$

$$D_{\hat{a}}\, V\left(x,y,z\right) = \nabla V \cdot \hat{a}$$

$$\hat{a} = i + j - k \qquad \left\|\hat{a}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(-1\right)^2}$$

$$\hat{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 10x - 3y + yz = 10(3) - 3(4) + 4(5)$$
$$= 30 - 12 + 20 = 38$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3x + xz = -3(3) + 3(5) = -9 + 15 = 6$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = xy = 3(4) = 12$$

$$\nabla V = 38i + 6j + 12k$$

$$D_{\hat{a}} V(x, y, z) = (38, 6, 12) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$D_{\hat{a}} V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(38 + 6 - 12) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{D_{\hat{a}} V(x, y, z) = \frac{32}{\sqrt{3}}}$$

b) $\boxed{\nabla V = 38i + 6j + 12k}$

15 Puntos