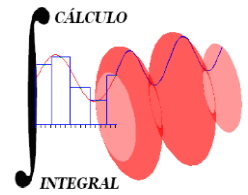




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL



1221

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

14 de junio de 2018

Semestre 2018-2

Nombre: _____ No. Cta.: _____

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Aplicando el criterio del cociente o de D'Alembert determina el carácter de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-n} \cdot n}{(n+1)!}$$

15 puntos

2. Calcula el valor medio de la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[0, 2]$.

15 puntos

3. Efectúa:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 7}$

b) $\int \ln(\sqrt{x}) dx$

c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

10 Puntos

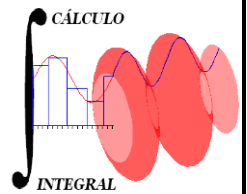
5. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y el plano $y = 0$ en el punto $P(\sqrt{5}, 0)$.

15 Puntos

6. Representa gráficamente el dominio de la función y determina su recorrido.

$$g(x, y) = e^{-\sqrt{x-y+1}}$$

15 Puntos



1. Sea:

$$r = \frac{3^{1-(n+1)}(n+1)}{(n+2)!} = \frac{3^{1-n-1}(n+1)(n+1)!}{3^{1-n}(n)(n+2)!}$$
$$r = \frac{3^{1-(n+1)}(n+1)}{(n+2)!} = \frac{3^{1-n-1}(n+1)(n+1)!}{3^{1-n}(n)(n+2)!}$$

$$r = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r = 0 = \rho \quad \text{como } |\rho| < 1 \text{ se cumple}$$

\therefore *La serie es convergente*

15 puntos

2. Sea:

$$f(c) = \frac{\int_0^2 [3x^2 - 2x] dx}{2 - 0} = \frac{[x^3 - x^2]_0^2}{2}$$

$$f(c) = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

$$\text{Sea } \frac{1}{x^2 - 8x + 7} = \frac{1}{(x-1)(x-7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-7};$$

$$1 = A(x-7) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{6}} \\ \text{si } x=7 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{6}} \end{cases}$$

entonces la integral queda:

$$I = \int \left[\frac{-1/6}{x-1} + \frac{1/6}{x-7} \right] dx$$

$$I = -\frac{1}{6} \ln(x-1) + \frac{1}{6} \ln(x-7) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \ln \left(\sqrt[6]{\frac{x-7}{x-1}} \right) + C}$$

b) Por partes

$$I = \frac{1}{2} \int \ln(x) dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right.$$

$$I = \frac{1}{2} \left[x \ln(x) - \int dx \right] = \boxed{x \ln(\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

$$x = \text{sen}(\theta)$$

$$\sqrt{1-x^2} = \text{cos}(\theta)$$

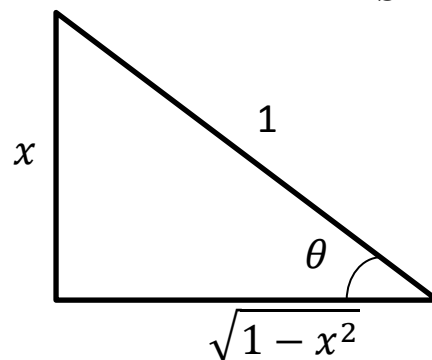
$$dx = \text{cos}(\theta) d\theta$$

Al sustituir en la integral:

$$I = \int \text{cos}^2(\theta) d\theta; \quad \text{cos}^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \text{cos}(2\theta))$$

$$I = \frac{1}{2} \int (1 + \text{cos}(2\theta)) d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) + C$$

$$I = \boxed{\frac{1}{2} \text{angsen}(x) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C}$$



30 Puntos

4. Sea la región:

Al hacerlas simultáneas

$$x^{1/3} - x = 0$$

$$x^{1/3}(1 - x^{2/3}) = 0$$

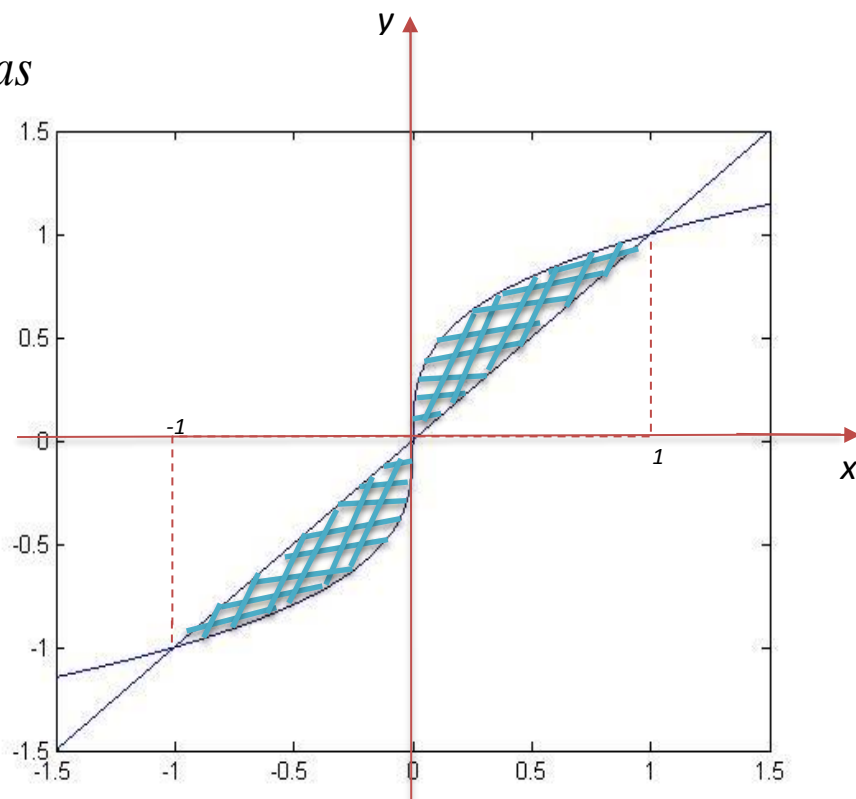
$$\Rightarrow x = 0;$$

$$\Rightarrow x^{2/3} = 1;$$

$$x = -1; x = 1$$

$$A = 2 \int_0^1 [x^{1/3} - x] dx$$

$$A = 2 \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{3}{2} x^{4/3} - x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$



10 Puntos

5.

Lo que se solicita es:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P ; \text{ entonces } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

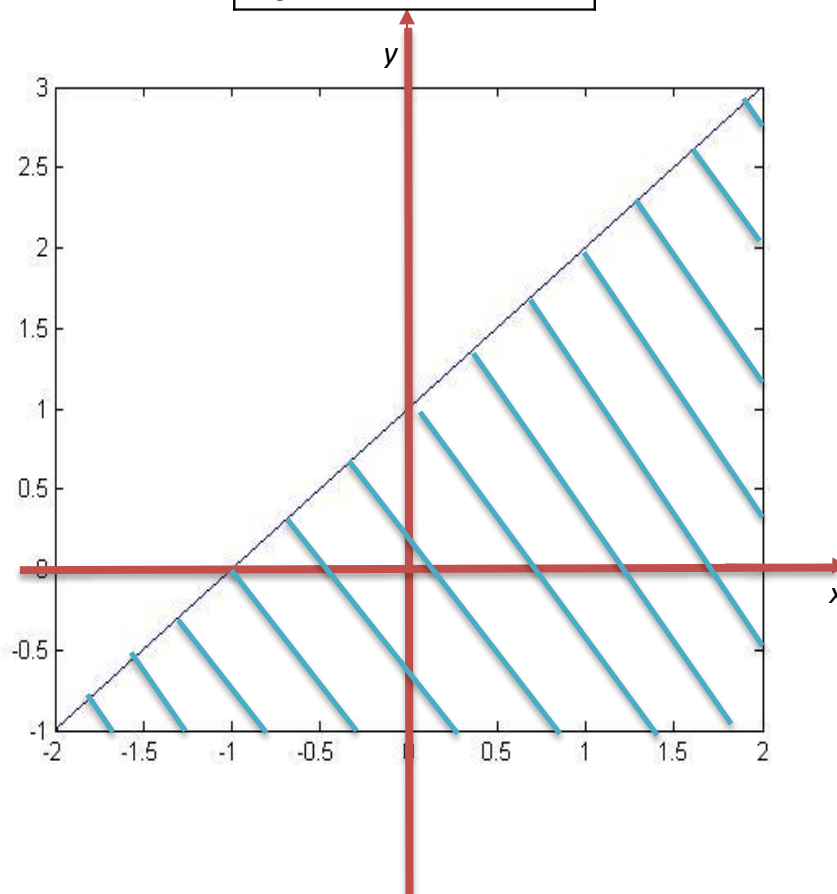
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\sqrt{5},0)} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9-5}} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2} = m_T}$$

15 Puntos

6.

Gráfica del dominio

$$\boxed{R_g = \{z / z \in (0,1]\}}$$



15 Puntos