UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

14 de diciembre de 2017 | ***1221*** | ***Semestre 2018-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función.

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x}$$

20 Puntos

---

2. Calcula el valor de $a < 1$ **tal que se verifique la siguiente igualdad.**

$$\int_a^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$

10 Puntos

---

3. Efectúa las integrales:

$$a)\ \int \frac{4}{x^2 - x}\,dx \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \qquad c)\ \int ln\sqrt{1-x}\,dx$$

30 Puntos

4. Calcula la longitud de la gráfica de la función $g(x)=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ **, en el intervalo** $[0,1]$.

10 Puntos

---

5. Representa gráficamente el dominio de la función $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\ln(y-x)}}$ **y determina su recorrido.**

15 Puntos

---

6. Obtén la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $h(x,y)=\frac{x^2}{y^3}$ **en el punto** $P(4,2)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Segundo Examen Final

Semestre 2018 – 1

1.

Si se reescribe la función como $f(x)=\frac{1}{3}ln(1+x)$

$$\Rightarrow f^{n}(x)=\frac{(n-1)!}{3}(-1)^{n}\frac{1}{(1+x)^{n}}$$

$$\Rightarrow f^{n}(0)=\frac{(n-1)!}{3}(-1)^{n}$$,al sustituir en la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(n-1)!}{3}(-1)^{n+1}}{n!}(x)^{n}=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}x^{n}}$$

20 Puntos

2. Si

$$\int_{a}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=-\frac{1}{2}\int_{a}^{1}\left(1-x^{2}\right)^{-1/2}(-2xdx)=1$$

$$\left[-\sqrt{1-x^{2}}\right]_{a}^{1}=1$$

$$-0+\sqrt{1-a^{2}}=1$$

$$1-a^{2}=1$$

$$\therefore \boxed{a=0}$$

10 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea la fracción $\dfrac{4}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$;

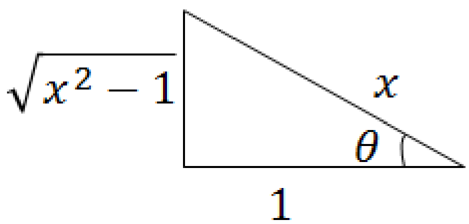
$$4=A(x-1)+Bx \Rightarrow \begin{cases} si \;\; x=0 & \Rightarrow \boxed{A=-4} \\ si \;\; x=1 & \Rightarrow \boxed{B=4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left[-\frac{4}{x}+\frac{4}{x-2}\right]dx$$

$$I=-ln\left(x^4\right)+ln(x-1)^4+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^4+C}$$

b) Por sustitución trigonométrica



$x=sec\,\theta$

$\sqrt{x^2-1}=tan\,\theta$

$dx=sec\,\theta\, tan\,\theta\, d\theta$

$$I=\int\frac{tan\,\theta}{sec\,\theta}sec\,\theta\, tan\,\theta\, d\theta=\int tan^2\theta\, d\theta=\int\left(sec^2\theta-1\right)d\theta$$

$$I=tan\,\theta-\theta+C=\boxed{\sqrt{x^2-1}-ang\,sec\,x+C}$$

c) Por partes

$$I=\frac{1}{2}\int ln(1-x)\,dx$$

$$\left|\begin{aligned} u&=ln(1-x)\\ du&=\frac{-1}{1-x}dx\end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} dv&=dx\\ v&=x\end{aligned}\right.$$

$$I=\frac{1}{2}\left[x\,ln(1-x)+\int\frac{x}{1-x}dx\right]$$

$$\boxed{I=x\,ln\sqrt{1-x}-\frac{x}{2}-ln\sqrt{1-x}+C}$$

30 Puntos

4.

Si

$$g'(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}\Rightarrow\left[g'(x)\right]^2=2x$$

Al sustituir

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+2x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{27}-\frac{1}{3}$$

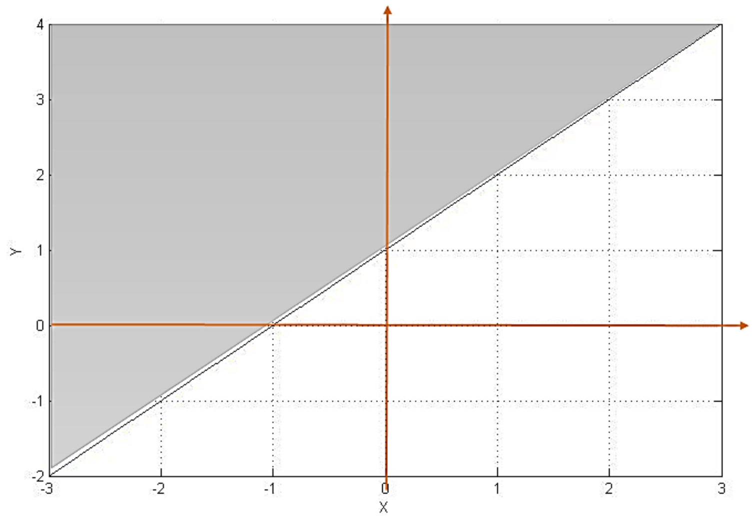
$$=\boxed{\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}+1\right)\ u}$$

10 Puntos

5.

Si el dominio es

$$D_f = \{(x,y) \mid ln(y-x) > 0\}$$



$$\boxed{R_f = \{z \mid z \in (0,\infty)\}}$$

15 Puntos

6.

La ecuación del plano se obtiene con

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_p (x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_p (y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_p (z-z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_p = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^4} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_p = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_p = -1$$

$$x-4-(y-2)-(z-2)=0$$

$$x-4-y+2-z+2=0$$

$$\boxed{x-y-z=0}$$

20 Puntos