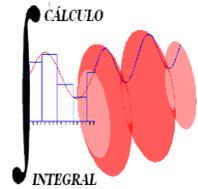




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS  
CÁLCULO INTEGRAL  
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO



6 de junio de 2017

1221

Semestre 2017-2

**INSTRUCCIONES:** Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

**1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (n+1)^2}$$

**20 Puntos**

**2. Sea la función**

$$f(x) = 3x^2 - 5x^4 \quad \text{para } x \in [-1, 1]$$

calcular el o los valores de  $C$  que pertenezcan a dicho intervalo para los cuales se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

**15 Puntos**

**3. Efectuar las integrales:**

$$a) \int x^3 \operatorname{sen} x^2 dx$$

$$b) \int \frac{2x-4}{x^3+4x} dx$$

**20 Puntos**

4. Calcular el área de la región del plano cartesiano, limitada por las curvas

$$C_1: y = 10x - x^2 \quad y \quad C_2: y = 3x - 8$$

10 Puntos

5. Obtener la ecuación del plano tangente al paraboloides elíptico

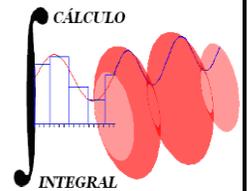
$$z = 2x^2 + y^2 \quad \text{en el punto } P(1, 1, 3).$$

20 Puntos

6. Sea  $z = x^2 y + 3x y^4$  donde  $x = \text{sen } 2t$ ,  $y = \text{cost}$ .

Obtener  $\frac{dz}{dt}$  cuando  $t=0$

15 Puntos



1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^{n+1} + 1 [(n+1)+1]^2}}{\frac{1}{3^n (n+1)^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n (n+1)^2}{3^{n+1} (n+2)^2} \right| = \frac{1}{3} = L$$

El radio de convergencia de la serie es  $r = \frac{1}{L} = \frac{1}{1/3} = 3$

por lo que la serie es convergente para valores de  $x$  en el intervalo

$$|x - 4| < 3 \rightarrow -3 < x - 4 < 3 \rightarrow 1 < x < 7$$

Analizando el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo

$$\text{Si } x = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n (n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n (n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

que por el criterio de Leibniz es convergente

$$\text{Si } x = 7 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n (n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \text{ que también es}$$

convergente y por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es

$$\boxed{1 \leq x \leq 7}$$

2. Si

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 - 5x^4) dx = [x^3 - x^5]_{-1}^1 = (1-1) - (-1+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3c^2 - 5c^4}{1 - (-1)} = 0, \quad 3c^2 - 5c^4 = 0, \quad c^2(3 - 5c^2) = 0$$

$$c_1 = 0 \quad y \quad c_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

15 Puntos

3.

Solución

a) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = \operatorname{sen} x^2 (x dx) \\ v = -\frac{1}{2} \cos x^2 \end{array} \right.$$

$$I = -\frac{1}{2} x^2 (\cos x^2) + \int \cos x^2 (2x dx)$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} x^2 (\cos x^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x^2) + C \right]$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{2x-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4};$$

$$2x-4 = A(x^2+4) + (Bx+C)x \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow \boxed{-1=A} \\ \text{si } x=1 \Rightarrow 3=B+C \\ \text{si } x=-1 \Rightarrow -1=B-C \end{cases}$$

de donde  $\boxed{1=B}$  y  $\boxed{2=C}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \left[ -\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2+4} \right] dx \\ &= -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \left[ \frac{1}{2} \text{ang tan } \frac{x}{2} \right] + C \\ &= \boxed{\ln \left( \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \right) + \left( \text{ang tan } \frac{x}{2} \right) + C} \end{aligned}$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones

$$10x - x^2 = 3x - 8, \quad x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 8 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^8 \left[ (10x - x^2) - (3x - 8) \right] dx \\ &= \int_{-1}^8 (8 + 7x - x^2) dx \\ &= \left[ 8x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8(8+1) + \frac{7}{2}(64-1) - \frac{1}{3}(512+1) \\
&= 72 + \frac{441}{2} - \frac{513}{3} \\
&= \frac{1}{6}(432 + 1323 - 1026) = \frac{729}{6} \\
&= \boxed{\frac{243}{2}u^2}
\end{aligned}$$

15 Puntos

5.

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$f_x(x, y) = 4x \quad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4 \quad f_y(1, 1) = 2$$

Por lo que la ecuación solicitada es

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z - 3 = 4x - 4 + 2y - 2$$

$$\boxed{4x + 2y - z - 3 = 0}$$

20 Puntos

6.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dy} = (2xy + 3y^4)(\cos 2t)2 + (x^2 + 12xy^3)(-sen t)$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad \begin{cases} x = \text{sen}(0) = 0 \\ y = \text{cos}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = (0 + 3)2(\text{cos } 0) + (0 + 12)(-\text{sen } 0)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 6}$$

15 Puntos