UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

9 de diciembre de 2016 ***1221*** ***Semestre 2017-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$$

Incluir el análisis de los extremos.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales:

$$a)\int (sen\, x - cos\, x)^2\, dx \qquad b)\int x^2 \ln x^2\, dx \qquad c)\int \frac{x+1}{3x^2+3x-6}\, dx$$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$C_1: \quad y = -\,x^2 \qquad\qquad C_2: \quad y = x^2 - 2$$

Hacer la representación gráfica de la región.

10 Puntos

---

5. Obtener el recorrido de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ y representar gráficamente su dominio.

10 Puntos

---

6. Determinar la máxima razón de cambio de la función $f(x, y) = x \cos y + y \operatorname{sen} x$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

20 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Segundo Examen Final

Semestre 2017 – 1

1.

Sea

$$r=\frac{\dfrac{(x+3)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(x+3)^{n}}{2^{n}}}=\frac{(x+3)^{n+1}\,2^{n}}{(x+3)^{n}\,2^{n+1}}=\frac{x+3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} r=\frac{x+3}{2}=\rho \;\; si\;\; |\rho|<1,\text{ de donde}$$

-5<x<-1

Análisis de los extremos

Si x=-5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

que es divergente, según el criterio de Leibniz

si $x=-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

que es divergente por compararla con la armónica

Por lo que el intervalo es $\boxed{-5<x<-1}$

15 puntos

2.

Si se efectúa el quebrado

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}\right]=\frac{0}{0}$$ podemos aplicar la regla

$$\lim_{x \to 0^+}\left[\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\right]=\frac{0}{0}$$ volvemos aplicar la regla

$$\lim_{x \to 0^+}\left[\frac{-e^x}{xe^x+e^x+e^x}\right]=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

15 Puntos

3.

a) Al desarrollar el binomio quedan dos intregrales inmediatas

$$\text{I}=\int(\operatorname{sen} x-\cos x)^2\,dx=\int\left(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x\right)dx$$

$$\text{I}=\int(1-2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

$$\boxed{I = x-\operatorname{sen}^2 x+C}$$

b) Por partes $\int 2x^2 \ln x\,dx$

$$u=2\ln x \qquad dv=x^2dx$$

$$du=\frac{2}{x}dx \qquad v=\frac{x^3}{3}$$

$$\text{I}=\frac{2}{3}x^3\ln x-\int\frac{2}{3}x^2dx$$

$$\text{I}=\frac{2}{3}x^3\ln x-\frac{2}{9}x^3+C$$

$$\boxed{\text{I}=\frac{2}{3}x^3\left[\ln x-\frac{1}{3}\right]+C}$$

c)Por fracciones parciales

$$\frac{x+1}{3x^2+3x-6}=\frac{x+1}{3(x+2)(x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow x+1=A(x-1)+B(x+2)$$

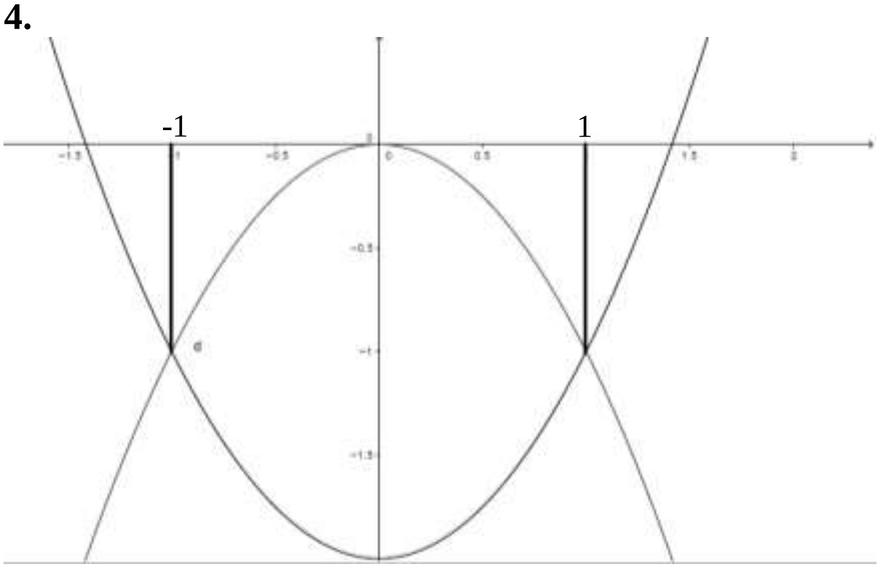
$Si \quad x=-2$	$Si \quad x=1$
$A=\frac{1}{3}$	$B=\frac{2}{3}$

$$I=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}\right]dx$$

$$\boxed{I=\frac{1}{3}\ln\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}+C}$$

30 Puntos

4.



Al hacer simultáneas las ecuaciones

$$-x^2=x^2-2$$

$$-2x^2=-2$$

$$x_1=-1 \quad x_2=1$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^2-\left(x^2-2\right)\right]dx=4\int_{0}^{1}\left(-x^2+1\right)dx$$

$$A=-\frac{4}{3}x^3+4x\Big]_0^1=-\frac{4}{3}(1)^3+4(1)$$

$$A=-\frac{4}{3}+4$$

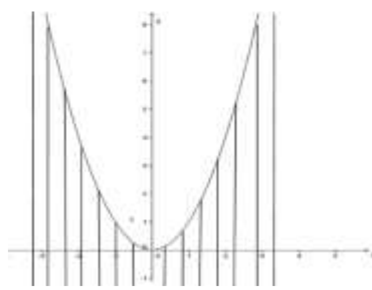
$$A=\frac{8}{3}\text{ unidades de área}$$

10 Puntos

5.

El dominio tiene su expresión analítica como $D_f=\left\{\left(x,y\right)\mid x^2-y\geq 0\right\}$

por lo que la gráfica es:



Y el recorrido es: $R_f=\{z\mid z\geq 0\}$

10 Puntos

6.

Sea $\nabla f=\left(\cos y+y\cos x\,,-x\,sen\,y+sen\,x\right)$

$\Rightarrow \overline{\nabla}f\Big|_p=\left(0,\,1-\dfrac{\pi}{2}\right)$ por lo que

$$\boxed{\left|\overline{\nabla}f\right|=\frac{\pi}{2}-1}$$

20 Puntos