UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL

1221

8 de junio de 2016 ***Semestre 2016-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$$

15 Puntos

---

2. Dada la función $f(x) = 2 - x^2$ definida en el intervalo $[0,2]$, determinar el valor de c talque el valor promedio de la función sea igual a $f(c)$

15 Puntos

---

3. Efectuar:

$$a) \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^3}\, dx \qquad b) \int \frac{16}{x^3 + 4x}\, dx$$

20 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$C_1: \quad y = 4x^3 \qquad\qquad C_2: \quad y = 8x^2$$

15 Puntos

---

5. Verificar que la función $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

satisface la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$

15 Puntos

---

6. Determinar la máxima razón de cambio de $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$

en el punto $P(1, 0)$.

20 Puntos

1. El límite de la razón de D´Alembert quedará

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(2x-1)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(2x-1)^{n}}{n}}\right| < 1$$

$$|2x-1|\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)<1$$

$$|2x-1|<1\ ,\ -1<2x-1<1\ ,\ 0<2x<2\ ,\ 0<x<1$$

Para los extremos:

$x = 0 :\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ serie armónica de signos alternados, es convergente

$x = 1 :\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serie armónica de mismos signos, es divergente

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$0\le x<1$$

15 Puntos

2.

$$\text{Valor promedio} = f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

$$\int_0^2 \left(2 - x^2\right) dx = 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$V_{prom} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \left.\frac{2}{3}\right]$$

$$V_{prom} = f(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 2 - c^2 ; \quad c^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}}} \qquad c \in [\,0\,,\,2\,]$$

15 Puntos

3. a) Por partes

$$u = \frac{1}{x} \qquad\qquad du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$dv = \cos\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{x^2}\right) \qquad\qquad v = -\left(sen\frac{1}{x}\right)$$

$$I = -\frac{1}{x}\left(sen\frac{1}{x}\right) - \int\left(sen\frac{1}{x}\right)\left(\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{1}{x}\left(sen\frac{1}{x}\right) - \left(\cos\frac{1}{x}\right) + c}$$

b) Por fracciones parciales

$$\frac{16}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+4\right)}$$

$$\Rightarrow\ 16 = A\left(x^2+4\right)+Bx^2+Cx$$

$$si\ x=0 \qquad\qquad si\ x=1$$

$$\boxed{A=4} \qquad\qquad 16=20+B+C$$

$$\Rightarrow \boxed{-4=B} \qquad \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$I = \int\left[\frac{4}{x}-\frac{4x}{x^2+4}\right]dx$$

$$\boxed{I=4\left(\ln x\right)-2\ \ln\left(x^2+4\right)+c}$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones:

$$4x^3=8x^2$$

$$x=0 \qquad x=2$$

Entonces

$$A=\int_0^2\left(8x^2-4x^3\right)dx$$

$$A=\left[\frac{8}{3}x^3-x^4\right]_0^2=\frac{8}{3}(8)-16$$

$$A=\frac{64-48}{3}$$

$$\boxed{A=\frac{16}{3}\ unidades\ de\ área}$$

15 Puntos

5. Sean las derivadas indicadas

$$u_x = -e^{-x}\cos y + e^{-y}\,sen\,x$$

$$u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$$

$$u_y = -e^{-x}sen\,y + e^{-y}\cos x$$

$$u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales:

$$e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x - e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x = 0$$

$$\boxed{0 = 0 \quad \therefore \;\; se\ verifica}$$

15 Puntos

6.

La máxima razón de cambio es $\left| \overline{\nabla} f \Big|_p \right|$

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

$$\overline{\nabla} f = e^{-y} i + \left(-x e^{-y} + 3\right) j$$

$$\overline{\nabla} f \Big|_p = i + 2j \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{\nabla} f\left(1, 0\right) = \sqrt{5}}$$

20 Puntos