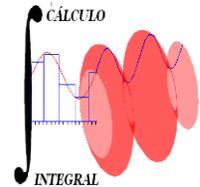




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL



8 de junio de 2016

1221

Semestre 2016-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$$

15 Puntos

2. Dada la función $f(x) = 2 - x^2$ definida en el intervalo $[0, 2]$, determinar el valor de c tal que el valor promedio de la función sea igual a $f(c)$

15 Puntos

3. Efectuar:

a) $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^3} dx$

b) $\int \frac{16}{x^3 + 4x} dx$

20 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$C_1: y = 4x^3$$

$$C_2: y = 8x^2$$

15 Puntos

5. Verificar que la función $u(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

satisface la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$

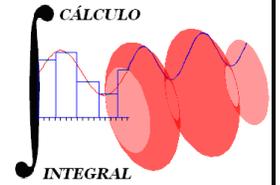
15 Puntos

6. Determinar la máxima razón de cambio de $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$ en el punto $P(1, 0)$.

20 Puntos



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN DEL SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO
1221



8 de junio de 2016

Semestre 2016-2

1. El límite de la razón de D'Alembert quedará

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x-1)^n}{n}} \right| < 1$$

$$|2x-1| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right) < 1$$

$$|2x-1| < 1, \quad -1 < 2x-1 < 1, \quad 0 < 2x < 2, \quad 0 < x < 1$$

Para los extremos:

$$x = 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{serie armónica de signos alternados, es convergente}$$

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{serie armónica de mismos signos, es divergente}$$

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$0 \leq x < 1$$

15 Puntos

2.

$$\text{Valor promedio} = f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

$$\int_0^2 (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$V_{prom} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_{prom} = f(c) \Rightarrow \frac{2}{3} = 2 - c^2; \quad c^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}}} \quad c \in [0, 2]$$

15 Puntos

3. a) Por partes

$$u = \frac{1}{x} \quad du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$dv = \cos \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{x^2} \right) \quad v = -\left(\text{sen} \frac{1}{x} \right)$$

$$I = -\frac{1}{x} \left(\text{sen} \frac{1}{x} \right) - \int \left(\text{sen} \frac{1}{x} \right) \left(\frac{dx}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{x} \left(\text{sen} \frac{1}{x} \right) - \left(\text{cos} \frac{1}{x} \right) + c}$$

b) Por fracciones parciales

$$\frac{16}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 16 = A(x^2 + 4) + Bx^2 + Cx$$

$$\text{si } x = 0$$

$$\boxed{A = 4}$$

$$\text{si } x = 1$$

$$16 = 20 + B + C$$

$$\Rightarrow \boxed{-4 = B} \quad \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$I = \int \left[\frac{4}{x} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right] dx$$

$$\boxed{I = 4(\ln x) - 2 \ln(x^2 + 4) + c}$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones:

$$4x^3 = 8x^2$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

Entonces

$$A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) dx$$

$$A = \left[\frac{8}{3}x^3 - x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{3}(8) - 16$$

$$A = \frac{64 - 48}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{16}{3} \text{ unidades de área}}$$

5. Sean las derivadas indicadas

$$u_x = -e^{-x} \cos y + e^{-y} \operatorname{sen} x$$

$$u_{xx} = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$$

$$u_y = -e^{-x} \operatorname{sen} y + e^{-y} \cos x$$

$$u_{yy} = -e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales:

$$e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x - e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x = 0$$

$$0 = 0 \quad \therefore \text{se verifica}$$

15 Puntos

6.

La máxima razón de cambio es $\left| \bar{\nabla} f \Big|_p \right|$

$$\bar{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

$$\bar{\nabla} f = e^{-y} i + (-x e^{-y} + 3) j$$

$$\bar{\nabla} f \Big|_p = i + 2j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\nabla} f(1, 0) = \sqrt{5}}$$

20 Puntos