UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "B"

2 de junio de 2015 ***Semestre 2015-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Si las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{2-x}}$ tienen la misma ordenada media en el intervalo $[0,\ 1]$, calcular el valor de a.

15 Puntos

---

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las siguientes integrales:

$a)\ \int (\tan x - \sec x)^2\, dx$ $\qquad b)\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ $\qquad c)\ \int \dfrac{2x^2+5x+3}{x^3+x}\, dx$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $y = x^2 - 1$ y de $y = 7 - x^2$. Representar gráficamente la región.

10 Puntos

---

5. Sea la función $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$, representar gráficamente su dominio y obtener las ecuaciones de sus curvas de nivel para $z = 0$ y $z = 1$.

15 Puntos

---

6. Si la temperatura de una placa metálica rectangular está determinada por $T(x, y) = xy(1 + x)(2 - y)$ donde $x \in [0, 1]$ y $y \in [0, 2]$, obtener la dirección en la que la temperatura disminuye más rápidamente a partir del punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN DEL SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

2 de junio de 2015 ***Semestre 2015-2***

---

1. Sean

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}{1}=ang\tan x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$g(c)=\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{a}{2\sqrt{2-x}}\,dx}{1}=-a\sqrt{2-x}\Big]_0^1=-a+a\sqrt{2}$$

como deben ser iguales:

$$-a+a\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{a=\frac{\pi}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

15 Puntos

---

2. Es una integral impropia

$$I=\lim_{u\to\infty}\int_e^u \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^u$$

$$I=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}+1\right]=1$$

$$\therefore\ \boxed{\text{La integral converge}}$$

15 Puntos

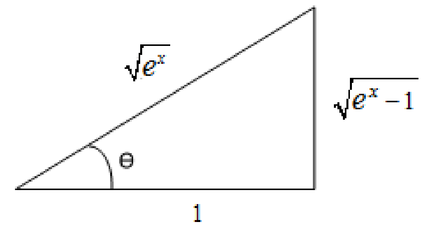
3. a) Por sustitución trigonométrica

$$si\ \sqrt{e^x} = \sec\theta$$

$$\sqrt{e^x - 1} = \tan\theta$$

$$e^x = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow e^x dx = 2\sec^2\theta\tan\theta d\theta$$



$$I = \int \frac{2\sec^2\theta\tan\theta d\theta}{\sec^2\theta\tan\theta} = 2\int d\theta$$

$$I = 2\theta + c \qquad \Rightarrow\ I = 2ang\sec\sqrt{e^x} + c$$

o bien:

$$\boxed{I = 2\,ang\sec\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + C}$$

También se puede resolver con cambio de variable.

b) Por fracciones parciales

Sea

$$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{\left(x^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = A\left(x^2+1\right) + x\left(Bx + C\right)$$

$si\ x = 0 \qquad si\ x = 1 \qquad si\ x = -1$

$\boxed{A = 3} \qquad 10 = 6 + B + C \qquad 0 = 6 + B - C$

$\Rightarrow \boxed{4 = B + C} \qquad \Rightarrow \boxed{-6 = B - C}$

Por lo que:

$$-2 = 2B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -1} \quad y \quad \boxed{C = 5}$$

$$I = \int \left[\frac{3}{x} + \frac{-x+5}{x^2+1} \right] dx$$

$$I = \ln x^3 - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + 5ang \tan x + C$$

$$\therefore \quad \boxed{I = \ln\left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 5ang \tan x + \boldsymbol{C}}$$

c) Al desarrollar el cuadrado:

$$I = \int \left(tan^2 x - 2\, sec\, x\, tan\, x + sec^2 x \right) dx$$

$$I = \int \left(sec^2 x - 1 - 2\, sec\, x\, tan\, x + sec^2 x \right) dx$$

$$\boxed{I = 2\, tan\, x - 2\, sec\, x - x + C}$$

30 Puntos

4. Al hacer simultáneas las ecuaciones:

$$x^2 - 1 = 7 - x^2$$

$$2x^2 = 8 \qquad \Rightarrow A = \int_{-2}^{2} \left[\left(7 - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right) \right] dx$$

$$x = \pm 2 \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$I = 2\int_0^2 \left(8 - 2x^2\right) dx = 2\left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[2(8) - \frac{2}{3}(2)^3\right]$$

$$I = 2\left[2(8) - \frac{2(8)}{3}\right] = 2(8 \bullet 2)\left[1 - \frac{1}{3}\right] = 32\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{I = \frac{64}{3}\, u^2}$$

10 Puntos

5.

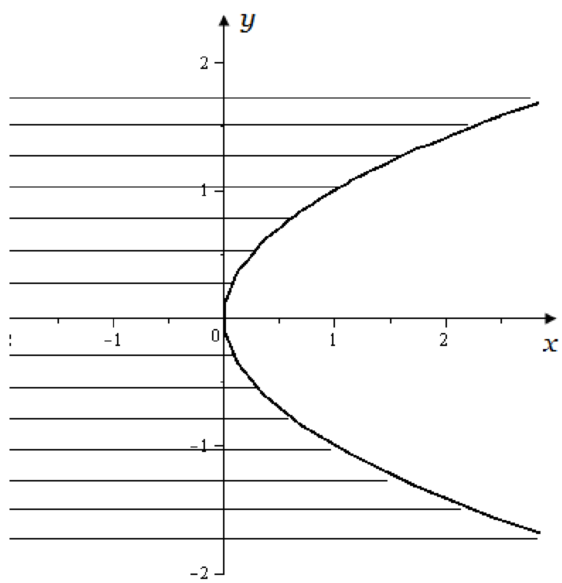
Debe cumplirse que

$$y^2 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \; y^2 \geq x$$

$$D = \left\{ (x, y) \middle| x \leq y^2 \right\}$$

Las ecuaciones de las curvas de nivel son :



$$Para \quad z = 0 \quad ; \quad y^2 = x$$

$$Para \quad z = 1 \quad ; \quad y^2 = x + 1$$

15 puntos

6.

Sea

$$\overline{\nabla}T = \left(\left[x + (1+x) \right] y(2-y) \ , \ \left[-y + (2-y) \right] x(1+x) \right)$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla}T = \left((2x+1)\, y(2-y) \ , \ (2-2y)\, x(1+x) \right)$$

$$si \quad P\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Entonces

$\overline{\nabla}T\Big|_P = (2,0)$ $\quad \therefore$ Disminuye más rápido en la dirección *del vector* $(-2,0)$

15 Puntos