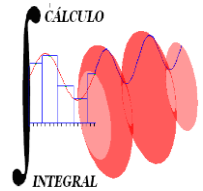




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "A"



1 de diciembre de 2014

Semestre 2015-1

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = |x^2 - 9|$, en el intervalo $[0, 3]$.

15 Puntos

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{e^x} dx$$

15 Puntos

3. Efectuar las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} \quad b) \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} \quad c) \int x \operatorname{ang} \sec x dx$$

30 Puntos

4. Calcular área de la región limitada por la curva de

$$r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$$

10 Puntos

5. Calcular la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = x^2 \cos(2y) \text{ en el punto de coordenadas } \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$$

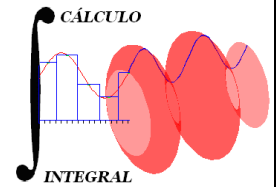
y en la dirección del vector $\vec{v} = 3i - 4j$

15 Puntos

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie

$$y = e^x \cos z \text{ en el punto de coordenadas } P(0, 1, 0).$$

15 Puntos



CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

1 de diciembre de 2014

Semestre 2015-1

1. El valor medio es

$$f(c) = \frac{\int_0^3 [9 - x^2] dx}{3 - (-3)} = \frac{9x + \frac{x^3}{3} \Big|_0^3}{3 + 3}$$

$$f(c) = 9(3) - \frac{(3)^3}{3}$$

$$f(c) = \frac{27 - 9}{6} = \frac{36}{6}$$

$$f(c) = 6$$

15 Puntos

2. Es una integral impropia

$$\int_0^{\infty} 2 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2 e^{-x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} 2 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -2 e^{-x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-2 e^{-b} + 2 e^0)$$

$$= 0 + 2 = 2$$

La integral impropia converge a 2

15 Puntos

3. a) Es una integral directa sólo hay que completar la diferencial.

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} = \int (3 \tan x + 1)^{-\frac{1}{2}} \sec^2 x dx$$

$$I = \frac{2}{3} \sqrt{3 \tan x + 1} + C$$

b) Por fracciones parciales

Sea

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{de donde}$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$\text{si } x = 0 ; \quad \boxed{A = 1}$$

$$\text{si } x = 1 ; \quad \boxed{C = 1}$$

$$\text{si } x = 2 ; \quad \boxed{B = -1} \quad \text{entonces}$$

$$I = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$\therefore \boxed{I = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x-1} + C}$$

c) Por partes

$$u = \operatorname{ang} \sec x \quad dv = x$$

$$du = \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad u = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{ang} \sec x - \int \frac{x^2 dx}{2x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{ang} \sec x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} + C$$

30 Puntos

4.-El área es

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta = 2 \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2 + 2\operatorname{sen}\theta]^2 d\theta$$

$$\text{Si } [2 + 2\operatorname{sen}\theta]^2 = 4 + 8\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta = 4 + 8\operatorname{sen}\theta + \frac{4(1 - \cos 2\theta)}{2}$$

$$[2 + 2\operatorname{sen}\theta]^2 = 4 + 8\operatorname{sen}\theta + 2 - 2\operatorname{sen}2\theta = 6 + 8\operatorname{sen}\theta - 2\cos 2\theta \quad \text{entonces}$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (6 + 8\operatorname{sen}\theta - 2\cos 2\theta) d\theta = 6\theta - 8 \cos \theta - \operatorname{sen}2\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$A = 6 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A = 6\pi u^2$$

10 Puntos

5. Sea

Si $\|\vec{v}\| = 5$ un vector unitario en dirección de v es

$$\vec{u}_v = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

$$\nabla f = (2x \cos 2y)i - (2x^2 \operatorname{sen} 2y)j \Big|_{P(2, \pi/2)}$$

$$\nabla f = 4 \cos \pi i - 8 \operatorname{sen} \pi j$$

La derivada direccional será

$$\frac{df}{ds} = (4 \cos \pi, -8 \operatorname{sen} \pi) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

$$= \frac{12}{5} \cos \pi + \frac{32}{5} \operatorname{sen} \pi$$

$$= \frac{12}{5}(-1) + \frac{32}{5} \operatorname{sen}(0)$$

$$\boxed{\frac{df}{ds} = -\frac{12}{5}}$$

15 Puntos

6. Sea

$$\vec{\nabla} F = (e^x \cos z)i + (-1)j + (-e^x \operatorname{sen} z)k \Big|_{P(0,1,0)}$$

$$r - r_0 = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x - 0, y - 1, z - 0) = 0$$

$$\vec{\nabla} F = e^0 \cos(0)i - j + 0z$$

Entonces

$$(1, -1, 0) \cdot (x - 0, y - 1, z)$$

$$(x - 0) + (-y + 1) = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

$$\boxed{x - y + 1 = 0} \text{ ecuación del plano tangente}$$

15 Puntos