UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

1 de diciembre de 2014 ***Semestre 2015-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \left| x^2 - 9 \right|$, en el intervalo $[0,\ 3]$.

15 Puntos

---

2. Determinar si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{e^{x}}\, dx$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} \qquad b) \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} \qquad c) \int x \operatorname{angsec} x \, dx$$

30 Puntos

4. Calcular área de la región limitada por la curva de

$$r = 2\left(1 + sen\theta\right)$$

10 Puntos

---

5. Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x, y\right) = x^2 \cos\left(2y\right)$ en el punto de coordenadas $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

y en la dirección del vector $\vec{v} = 3i - 4j$

15 Puntos

---

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $y = e^x \cos z$ en el punto de coordenadas $P\left(0, 1, 0\right)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

1 de diciembre de 2014 ***Semestre 2015-1***

---

1. El valor medio es

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_0^3\left[9-x^2\right]dx}{3-(-3)}=\frac{9x+\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^3}{3+3}$$

$$f(c)=9(3)-\frac{(3)^3}{3}$$

$$f(c)=\frac{27-9}{6}=\frac{36}{6}$$

$$\boxed{f(c)=6}$$

15 Puntos

---

2. Es una integral impropia

$$\int_0^{\infty}2\,e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}2\,e^{-x}\,dx=$$

$$\int_0^{\infty}2\,e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\;-2\,e^{-x}\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-2\,e^{-b}+2\,e^{0}\right)$$

$$=0+2=2$$

$\boxed{\text{La integral impropia converge a 2}}$

15 Puntos

3. a) Es una integral directa sólo hay que completar la diferencial.

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3\tan x + 1}} = \int (3\tan x + 1)^{-\frac{1}{2}} \sec^2 x\, dx$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3}\sqrt{3\tan x + 1} + C}$$

b) Por fracciones parciales

Sea

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad de \;\; donde$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$si \;\; x = 0 \;\; ; \qquad \boxed{A = 1}$$

$$si \;\; x = 1 \;\; ; \qquad \boxed{C = 1}$$

$$si \;\; x = 2 \;\; ; \qquad \boxed{B = -1} \qquad entonces$$

$$I = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$\therefore \quad \boxed{I = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} + C}$$

c) Por partes

$$u = ang\,sec\,x \qquad dv = x$$

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad u = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\,ang\,sec\,x - \int \frac{x^2 dx}{2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{2}\,ang\,sec\,x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C}$$

30 Puntos

4.-El área es

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(\theta)\right]^2 d\theta = 2\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[2+2sen\theta\right]^2 d\theta$$

$$Si \quad \left[2+2sen\theta\right]^2 = 4+8sen\theta+4sen^2\theta = 4+8sen\theta+\frac{\cancel{4}\left(1-\cos 2\theta\right)}{\cancel{2}}$$

$$\left[2+2sen\theta\right]^2 = 4+8sen\theta+2-2sen2\theta = 6+8sen\theta-2\cos 2\theta \quad entonces$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6+8sen\theta-2\cos 2\theta\right)d\theta = 6\theta-8\cos\theta-sen2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = 6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{A = 6\pi\ u^2}$$

10 Puntos

5. Sea

$$Si \ \left\|\bar{v}\right\| = 5 \quad un\ vector\ unitario\ en\ dirección\ de\ v\ es$$

$$\vec{u}_{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\nabla f = \left(2x\cos 2y\right)i - \left(2x^2 sen 2y\right)j\Big|_{P\left(2,\pi/2\right)}$$

$$\nabla f = 4\cos\pi\, i - 8 sen\pi\ j$$

$$La\ derivada\ \ direccional\ será$$

$$\frac{df}{ds} = \left(4\cos\pi, -8sen\pi\right)\bullet\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$= \frac{12}{5}\cos\pi + \frac{32}{5} sen\pi$$

$$= \frac{12}{5}\left(-1\right) + \frac{32}{5} sen\left(0\right)$$

$$\boxed{\frac{df}{ds} = -\frac{12}{5}}$$

15 Puntos

6. Sea

$$\bar{\nabla}F = \left(e^x \cos z\right)i + \left(-1\right)j + \left(-e^x sen\, z\right)k\Big|_{P(0,1,0)}$$

$$r - r_0 = \left(x, y, z\right) - \left(0,1,0\right) = \left(x-0, y-1, z-0\right) = 0$$

$$\bar{\nabla}F = e^0 \cos\left(0\right)i - j + 0z$$

$Entonces$

$$\left(1,-1,0\right)\bullet\left(x-0, y-1, z\right)$$

$$\left(x-0\right) + \left(-y+1\right) = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

$$\boxed{x - y + 1 = 0} \ \ ecuación\, del\ plano\, tangente$$

15 Puntos