UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

07 de Junio de 2010 | *Semestre 2010-2*

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **7 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

1. Calcular el valor de b tal que el valor medio de la función $f(x)=3x^2-1$ en el intervalo $[0,b]$ sea igual a 3

12 puntos

2. Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cosh x)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}}$

12 puntos

3. Efectuar

$a)\ \int x \ln x \, dx \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx \qquad c)\ \int \frac{x^3+1}{x^2-x^3}dx$

21 puntos

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de las abscisas la región limitada por las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = \sqrt{x^2 + 4}\,, \quad y = 0\,, \quad x = -1 \quad y \quad x = 0$$

15 puntos

---

5. Sea la función $f(x, y) = \sqrt[3]{ln(x + y - 1)}$ obtener su recorrido y trazar su región de definición.

10 puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $g(x, y, z) = x^2 + 2xz - yz^2$ en el punto $(1,1,1)$ en la dirección que tiene la recta $\dfrac{x-1}{2} = y - 1 = \dfrac{z-2}{-3}$

15 puntos

---

7. Sea $z = u^2 - v$, $u = e^{2x+y}$ y $v = sen(x+y)$. Calcular $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}}$

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Final

Semestre 2010 – 2

1.

$$f(x) = 3x^2 - 1 \qquad [0\ ,\ b]$$

$$f(c) = 3$$

$$f(c) = \frac{1}{b}\int_0^b \left(3x^2 - 1\right)dx$$

$$3b = 3\int_0^b x^2\,dx - \int_0^b dx$$

$$3b = x^3\Big|_0^b - x\Big|_0^b \quad \Rightarrow \quad 3b = b^3 - b$$

$$b^3 - 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad b\left(b^2 - 4\right) = 0$$

$$b = 2 \quad , \quad \underbrace{b = -2 \quad , \quad b = 0}_{No\ cumple\ para\ estos\ valores}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ b = 2 \end{array}}$$

12 puntos

2.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\cosh x\right)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}}$$

$$y = \left(\cosh x\right)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}}$$

$$\ln y = \ln\left(\cosh x\right)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{senh} x}\ln\left(\cosh x\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cosh x}\operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cosh x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\cosh x)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}} = e$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \lim_{x\to 0^+} (\cosh x)^{\frac{1}{\operatorname{senh} x}} = e \end{array}}$$

12 puntos

3. a)

$$I = \int x \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x \, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

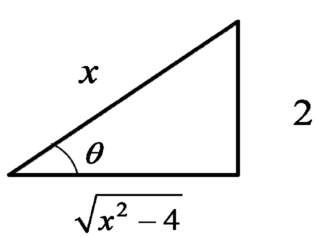
$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{array}}$$

b)

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$$



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \csc \theta$$

$$dx = -2 \csc \theta \cot \theta \, d\theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$I = \int \frac{2\cot\theta\left(-2\csc\theta\cot\theta\right)}{2\csc\theta}d\theta = -2\int \cot^2\theta\, d\theta$$

$$I = -2\int \csc^2\theta\, d\theta + 2\int d\theta = 2\cot\theta + 2\theta + C$$

$$I = \sqrt{x^2-4} + 2\,angsen\left(\frac{2}{x}\right) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = \sqrt{x^2-4} + 2\,angsen\left(\frac{2}{x}\right) + C \end{array}}$$

c)

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^2-x^3}dx = \int \left(-1 + \frac{1+x^2}{x^2-x^3}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^3+1 \\ & \underline{-x^3 \quad + x^2} \\ & 1+x^2 \end{array}$$

$$I = -\int dx + \underbrace{\int \frac{1+x^2}{x^2-x^3}dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{1+x^2}{x^2-x^3}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}\right)dx$$

$$\frac{1+x^2}{x^2-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$$1+x^2 = A\left(1-x\right) + B\left(1-x\right) + Cx^2$$

$$\boxed{A=1} \quad \boxed{B=1} \quad \boxed{C=2}$$

$$I = -\int dx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + 2\int \frac{1}{1-x}dx$$

$$I = -x + ln\left(x\right) - \frac{1}{x} - 2\,ln\left(1-x\right) + C$$

$$I = ln\left|\frac{x}{\left(1-x\right)^2}\right| - x - \frac{1}{x} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ I = ln\left|\frac{x}{\left(1-x\right)^2}\right| - x - \frac{1}{x} + C \end{array}}$$

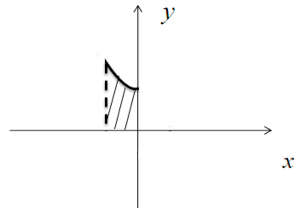
21 puntos

4.

$$y = +\sqrt{x^2+4} \qquad x = -1 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad y = 0$$

$$y^2 = x^2 + 4$$

$$y^2 - x^2 = 4$$



$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{0} \left(x^2+4\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$V = \pi \left[0 - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) \right] = \frac{13}{3} \pi \ u^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}\,sultado \\ V = \dfrac{13}{3}\pi \ u^3 \end{array}}$$

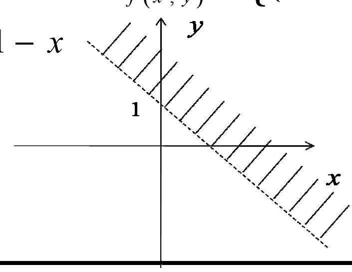
15 puntos

5.

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\ln(x+y-1)} \qquad D_{f(x,y)} = \left\{ (x,y) \middle| \, y > 1 - x \right\}$$

$$y > 1 - x$$

$$R_z = \left\{ z \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}$$



10 puntos

6.

$$g(x,y,z) = x^2 + 2xz - yz^2 \qquad P(1,1,1)$$

$$\frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-2}{3}$$

$$D_{\hat{v}} g(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) \bullet \hat{v}$$

$$\nabla g(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P(1,1,1)} = 2x + 2z = 4 \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{P(1,1,1)} = 2x - 2yz = 0 \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{P(1,1,1)} = -z^2 = -1$$

$$\bar{v} = (2, 1, -3)$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\hat{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$D_{\hat{v}} g(x, y, z) = (4, -1, 0) \bullet \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$D_{\hat{v}} g(x, y, z) = \frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}\,sultado \\ D_{\hat{v}} g(x, y, z) = \dfrac{7}{\sqrt{14}} \end{array}}$$

15 puntos

7.

$$u = e^{2x+y} \qquad\qquad v = sen(x+y)$$

$$Valuando\ a\ u\ y\ v\ en\ x = 1 \quad y \quad y = -1\ se\ tiene$$

$$u = e \qquad\qquad v = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x+y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = cos(x+y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = [2e][2e] + (-1)(1) = 4e^2 - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re\,sultado \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4e^2 - 1 \end{array}}$$

15 puntos