UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO
1221

Sinodales: Quím. Ma. Del Rosario Cabeza Luna
Ing. Héctor Hernández López

Alumno: ____ ***Semestre 2018-2***

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n}}{5^{n}}$$

15 puntos

2. Determina el valor de $b \in \mathbb{R}$, tal que la función $f(x)=x^2$, $x \in [0,b]$ tenga como ordenada media a *"b"*.

15 puntos

3. Efectuar.

$$a) \int \frac{dx}{x^2+5x+6} \qquad b) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad c) \int \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^3}\, dx$$

30 puntos

4. Calcula el área de la región limitada por las curvas

$$C_1 : y = 1 - x^2, \quad C_2 : y = 2x - 2$$

10 puntos

5. Sea la función $f(x,y) = (xy)\ln(xy)$. Calcular:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y dx}\right|_{(e,e)}$$

15 puntos

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$ en el punto $P(0,0,0)$ y en la dirección del vector $\bar{u} = (1,2,-2)$.

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Extraordinario

Semestre 2018 – 2

---

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n}}{5^{n}}$$

$$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n}}{5^{n}}}=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{5}=\frac{2x+1}{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} r=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x+1}{10}\right)=\frac{2x+1}{10}$$

$$Si\ \left|\frac{2x+1}{10}\right|<1 \text{ la serie converge}$$

$$-1<\frac{2x+1}{10}<1 \Rightarrow -10<2x+1<10 \Rightarrow -\frac{11}{2}<x<\frac{9}{2}$$

Al analizar la serie en los extremos de este intervalo,

$$x=-\frac{11}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \text{ que es divergente}$$

$$x=\frac{9}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n \text{ que es divergente}$$

El intervalo de convergencia es $-\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$ o bien $x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

15 puntos

---

2. Determinar el valor de $b\in\mathbb{R}$, tal que la función $f(x)=x^2$, $x\in[0,b]$ tenga como ordenada media a *"b"*.

$$f(c)=\frac{\int_0^b x^2dx}{b-0}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{1}{3b}\left(b^3\right)=\frac{b^2}{3}$$

$$si\ \ f(c)=b,\text{ entonces, }\ \frac{b^2}{3}=b\Rightarrow b=3$$

15 puntos

3. Efectuar

$$a)\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$$

Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3};1=A(x+3)B(x+2)\begin{cases}Si\ \ x=-2\Rightarrow A=1\\ Si\ x=-3\Rightarrow B=-1\end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=ln(x+2)-ln(x+3)+C$$

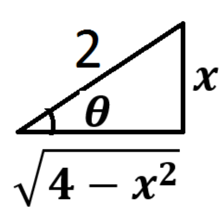
$$I=ln(x+3)+C=ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)+C$$

$$b)\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Por sustitución trigonométrica

$$sen\theta=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2sen\theta\Rightarrow dx=2\cos\theta$$

$$\cos\theta=\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=2\cos\theta$$



$$I=\int\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta=\int d\theta=\theta$$

$$I=ang\ sin\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$c)\int \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^3}\,dx$$

Por partes

$$u=\frac{1}{x}\Rightarrow du=-\frac{dx}{x^2}$$

$$dv=e^{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{dx}{x^2}\right)\Rightarrow v=-e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{x}e^{\left(\frac{1}{x}\right)}-\int\frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}e^{\left(\frac{1}{x}\right)}+e^{\left(\frac{1}{x}\right)}+C$$

30 puntos

---

4. Calcula el área limitada por las curvas

$$C_1: y=1-x^2,\qquad C_2: y=2x-2$$

Por las intersecciones

$$1-x^2=2x-2,\ x^2+2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=1\end{cases}$$

$$\mathrm{A}=\int_{-3}^{1}\left[\left(1-x^2\right)-(2x-2)\right]dx=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)dx$$

$$\mathrm{A}=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-(9-9-9)=\frac{5}{3}$$

$$\boxed{\mathrm{A}=\frac{32}{3}\,u^2}\ \text{unidades de área}$$

10 puntos

5. Sea la función $f(x,y)=(xy)\ln(xy)$. Calcular:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y dx}\right|_{(e,e)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y dx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{xy}(y)+y\ln(xy)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y+y\ln(xy)\right)=1+\frac{xy}{xy}+\ln(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y dx}=2+\ln(xy)\Rightarrow\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y dx}\right|_{(e,e)}=2+\ln(ee)=2+2=4$$

15 puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^x$ en el punto $P(0,0,0)$ y en la dirección del vector $\bar{u}=(1,2,-2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y+ze^{\ x}\Rightarrow\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+e^{\ z}\Rightarrow\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=ye^z+e^{\ x}\Rightarrow\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=1$$

$$D_u f=(1,1,1)\bullet\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$$

$$D_u f=\frac{1}{3}$$

15 puntos