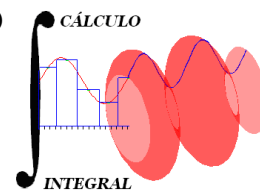




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO
1221

*Sinodales: Ing. Héctor Hernández López
Ing. Luis Hernández Moreno*

Alumno: _____

Semestre 2018-1

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^n}{5^n}$$

15 puntos

2. Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$, tal que la función $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$ tenga como ordenada media a “ b ”.

15 puntos

3. Efectuar.

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} \quad b) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad c) \int \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^3} dx$$

30 puntos

4. Calcula el área limitada por las curvas

$$C_1 : y = 1 - x^2, \quad C_2 : y = 2x - 2$$

10 puntos

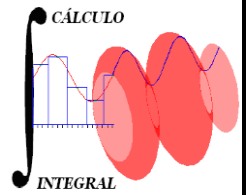
5. Sea la función $f(x, y) = (xy)\ln(xy)$. Calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(e, e)}$$

15 puntos

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ en el punto $P(0,0,0)$ y en la dirección del vector $\bar{u} = (1, 2, -2)$.

15 puntos



Solución del Segundo Examen Extraordinario
Semestre 2018 – 1

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^n}{5^n}$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{2x + 1}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{10}\right) = \frac{2x + 1}{10}$$

Si $\left|\frac{2x + 1}{10}\right| < 1$ la serie converge

$$-1 < \frac{2x + 1}{10} < 1 \Rightarrow -10 < 2x + 1 < 10 \Rightarrow -\frac{11}{2} < x < \frac{9}{2}$$

Al analizar la serie en los extremos de este intervalo,

$$x = -\frac{11}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ que es divergente}$$

$$x = \frac{9}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1)^n \text{ que es divergente}$$

El intervalo de convergencia es $-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ o bien $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

15 puntos

2. Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$, tal que la función $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$ tenga como ordenada media a “b”.

$$f(c) = \frac{\int_0^b x^2 dx}{b-0} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) = \frac{1}{3b} (b^3) = \frac{b^2}{3}$$

$$\text{si } f(c) = b, \text{ entonces, } \frac{b^2}{3} = b \Rightarrow b = 3$$

15 puntos

3. Efectuar

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$$

Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}; 1 = A(x+3)B(x+2) \begin{cases} \text{Si } x = -2 \Rightarrow A = 1 \\ \text{Si } x = -3 \Rightarrow B = -1 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln(x+2) - \ln(x+3) + C$$

$$I = \ln(x+3) + C = \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + C$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

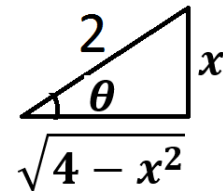
Por sustitución trigonométrica

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \text{sen } \theta \Rightarrow dx = 2 \text{cos } \theta$$

$$\text{cos } \theta = \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right) \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2 \text{cos } \theta$$

$$I = \int \frac{2 \text{cos } \theta}{2 \text{cos } \theta} d\theta = \int d\theta = \theta$$

$$I = \text{ang sin} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$



$$c) \int \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^3} dx$$

Por partes

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$dv = e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{dx}{x^2}\right) \Rightarrow v = -e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$I = -\frac{1}{x} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - \int e^{\left(\frac{1}{x}\right)} dx = -\frac{1}{x} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} + e^{\left(\frac{1}{x}\right)} + C$$

30 puntos

4. Calcula el área limitada por las curvas

$$C_1: y = 1 - x^2, \quad C_2: y = 2x - 2$$

Por las intersecciones

$$1 - x^2 = 2x - 2, \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-3}^1 \left[(1 - x^2) - (2x - 2) \right] dx = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - (9 - 9 - 9) = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{32}{3} u^2} \text{ unidades de área}$$

10 puntos
S2EE18-1

5. Sea la función $f(x, y) = (xy)\ln(xy)$. Calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(e,e)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{xy} (y) + y \ln(xy) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y + y \ln(xy)) = 1 + \frac{xy}{xy} + \ln(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 + \ln(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(e,e)} = 2 + \ln(ee) = 2 + 2 = 4$$

15 puntos

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ en el punto $P(0,0,0)$ y en la dirección del vector $\bar{u} = (1, 2, -2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ze^x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^z + e^x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$D_u f = (1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$D_u f = \frac{1}{3}$$

15 puntos